

## О пондеромоторной магнитной силе взаимодействия половинок однородно намагниченного цилиндрического стержня

М.А. Пятаков,<sup>\*</sup> М.Л. Акимов,<sup>†</sup> П.А. Поляков<sup>‡</sup>  
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
физический факультет, кафедра общей физики  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2  
(Поступила в редакцию 10.05.2023; подписана в печать 14.05.2023)

В работе проведено теоретическое исследование пондеромоторной магнитной силы взаимодействия двух половинок длинного стержневого цилиндрического магнита, однородно намагниченного перпендикулярно оси цилиндра, в зависимости от воздействия магнитного поля двух других аналогичных магнитов, расположенных симметрично. Показано, что сила сцепления этих половинок существенно зависит от расположения магнитов и может быть как силой притяжения, так и силой отталкивания.

PACS: 41.20.Gz, 75.50.Ww, 71.15.Mb, 14.80.Nv, 03.50.-z. УДК: 537.61.

Ключевые слова: постоянный магнит, пондеромоторная магнитная сила, намагниченность, метод фиктивных магнитных зарядов.

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время постоянные магниты находят широкое применение в различных технических устройствах и отраслях, например, в электротехнике, электронике, спинтронике и др. [1–5]. Они также используются в различных биологических и медицинских исследованиях. К примеру, в работе [6] исследуются магнитотактические бактерии, являющиеся привлекательными для биомедицинского и промышленного применения благодаря существованию превосходных постоянных магнитов. Эти магнитные бактерии могут быть задействованы в качестве инструмента диагностики наномасштабного объекта на наличие в нем дефектов.

Популяризации постоянных магнитов, в частности, способствовало создание очень мощных магнитных материалов, подобных магнитам на основе неодима, железа и бора [7–10]. Они способны взаимодействовать с очень большой магнитной силой. С этим понятием, безусловно, связано понятие сильного магнитного поля. Исследование способов его создания остается актуальным вопросом в современной науке [11].

Поэтому является важной задача расчета пондеромоторных сил в различных системах постоянных магнитов и анализа их особенностей. Так, в работах [12, 13] рассматривалась задача о расчете пондеромоторной силы и поля методом изображений. Например, в работе [13] приведено общее аналитическое выражение для силы сцепления полубесконечной ферромагнитной среды с магнитной решеткой, состоящей из магнитов, имеющих достаточно большую длину. В статье [14] для обоснования применимости метода изображений к нелинейным системам, подобным ферромагнетикам и сегнетоэлектрикам, рассчитывается элек-

трическое поле, которое индуцировано линейным зарядом, размещенным над диэлектриком с конкретной нелинейной функциональной зависимостью диэлектрической восприимчивости и поляризации от поля.

Хорошо известно, что два магнита притягиваются разноименными полюсами и отталкиваются одноименными, а сила взаимодействия этих магнитов, величина которой определяется, прежде всего, величиной вектора намагниченности [15, 16] и формой этих магнитов [17, 18], является одним из важных параметров для использования и их применения в различных устройствах. Однако, это справедливо, если магнит изолированный, а в случае системы постоянных магнитов это свойство может не выполняться: сила притяжения разноименных полюсов может стать силой отталкивания. Это и было показано в данной работе, а именно: для системы трех цилиндрических стержней методом фиктивных магнитных зарядов [19] была рассчитана  $z$ -проекция пондеромоторной силы взаимодействия половинок центрального стержневого магнита.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ РЕШЕНИЕ

В данной работе рассчитывается взаимодействие трех длинных стержней цилиндрической формы, намагниченных вдоль оси  $Z$ , как показано на рис. 1. На одном из них (центральном) имеется горизонтальный разрез по диаметру сечения, перпендикулярного оси цилиндра, и рассматривается взаимодействие разнесенных на некоторое расстояние полуцилиндров друг с другом. Такой вычислительный прием, как разрез, выполнен для осуществления расчета методом фиктивных магнитных зарядов, то есть разрез — это условный прием, который не влияет на результаты расчетов, это так называемый «виртуальный» воздушный зазор [20, 21]. Другие два соседних аналогичных магнита, расположенных симметрично относительно центрального, являются цельными (без воздушных проме-

\* E-mail: f3326103344444@yandex.ru

† E-mail: ml.akimov@physics.msu.ru

‡ E-mail: polyakovpa@mail.ru

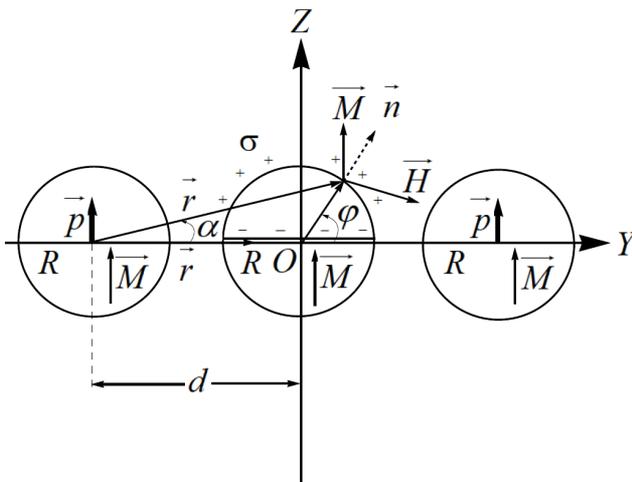


Рис. 1. Система намагниченных цилиндрических стержней с одинаковым направлением намагниченности

жутков между половинками). Тогда эти полуцилиндры центрального элемента взаимодействуют друг с другом как магниты. На рис. 1 представлены сечения, перпендикулярные осям цилиндрических магнитов, их расположение относительно декартовой системы координат и обозначения физических и геометрических параметров, а именно:  $\mathbf{M}$  — вектор намагниченности,  $\mathbf{p}$  — дипольный момент на единицу длины,  $d$  — расстояние между осями цилиндрических магнитов,  $R$  — радиус сечения. Намагниченность имеет одинаковое направление у всех элементов. Для верхней половины центрального магнита также плюсами и минусами обозначены фиктивные поверхностные магнитные заряды, чья поверхностная плотность равна нормальной составляющей вектора намагниченности [22], то есть

$$\sigma = (\mathbf{M}\mathbf{n}) = M \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = M \sin \phi, \quad (1)$$

где  $\mathbf{n}$  и  $\phi$  — соответственно единичная нормаль к поверхности центрального цилиндра ( $|\mathbf{n}| = 1$ ) и угол, которые также показаны на рис. 1.

В работах [23, 24] был осуществлен расчет силы взаимодействия однородно намагниченных вдоль оси цилиндров. Аналогично можно рассмотреть намагниченные перпендикулярно оси цилиндры и найти проекцию на вертикальную ось поперечной силы, приходящейся на единицу длины вдоль оси цилиндра (вдоль оси абсцисс) и действующей на верхний полуцилиндр центрального элемента со стороны его нижней части, то есть собственную силу взаимодействия. В данной работе приведем только окончательный результат. Выражение для этой компоненты силы  $f_z^{\text{own}}$  следующее:

$$f_z^{\text{own}} = -\frac{2}{3}\pi M^2 R. \quad (2)$$

Осуществим вычисление проекции на вертикальную ось силы, приходящейся на единицу длины вдоль оси

цилиндра и действующей на внешние заряды (положительные заряды закругленной поверхности) верхнего полуцилиндра центрального элемента со стороны одного из боковых цилиндров (со стороны второго будет действовать такая же сила, так как у нас симметричный случай). Кроме того, здесь мы считаем, что цилиндры достаточно длинные ( $L \gg R$ ), чтобы можно было пренебречь краевыми эффектами, то есть влиянием торцов цилиндров. Обозначим эту проекцию силы как  $f_z^1$ . Таким образом, необходимо рассчитать силу магнитного воздействия поля боковых цилиндров на центральный, которая складывается из силы воздействия на внешние заряды (закругленную поверхность), внутренние заряды (плоскую поверхность) верхней половинки центрального магнита со стороны двух боковых, а также из силы воздействия на верхний полуцилиндр центрального элемента со стороны нижнего полуцилиндра. Поле каждого из боковых магнитов вне их объемов будет эквивалентно полю двумерного диполя, помещенного в центр каждого из них [12], напряженность которого может быть вычислена по формуле

$$\mathbf{H} = 2 \left( \frac{2(\mathbf{pr})\mathbf{r}}{r^4} - \frac{\mathbf{p}}{r^2} \right), \quad (3)$$

где  $\mathbf{r}$  — вектор, показанный на рис. 1. Соотношение (3) приведено в гауссовой системе единиц. Из геометрических соображений путем использования теоремы косинусов мы можем записать связь

$$r^2 = d^2 + R^2 - 2dR \cos(\pi - \phi) = d^2 + R^2 + 2dR \cos \phi. \quad (4)$$

Нам необходимо вычислить  $z$ -компоненту силы, поэтому запишем проекцию напряженности магнитного поля на вертикальную ось, спроецировав напряженность магнитного поля, определяемую (3), на соответствующую ось следующим образом:

$$H_z = \frac{(\mathbf{H}\mathbf{M})}{M} = \frac{(\mathbf{H}\mathbf{p})}{p}, \quad (5)$$

где учтено, что векторы намагниченности и дипольного момента на единицу длины направлены по вертикальной оси.

Введем угол  $\alpha$ , также показанный на рис. 1, и снова применим теорему косинусов:

$$R^2 = r^2 + d^2 - 2rd \cos \alpha, \quad (6)$$

Выразим из формулы (6) косинус угла  $\alpha$ :

$$\cos \alpha = \frac{r^2 + d^2 - R^2}{2rd}. \quad (7)$$

Сила, действующая на элемент цилиндрической поверхности  $Rd\phi$ , будет определяться как

$$df_z = \sigma Rd\phi H_z, \quad (8)$$

где  $\sigma Rd\phi$  — это заряд, приходящийся на единицу длины цилиндров ( $L$ ) и на дугу  $Rd\phi$ . Тогда можно посчитать требуемую величину  $f_z^1$  путем соответствующего

интегрирования соотношения (8) следующим образом:

$$f_z^1 = \int_0^\pi df_z = \int_0^\pi \sigma R H_z d\phi, \quad (9)$$

Подставим в (9) выражение для плотности поверхностных зарядов из (1) и учтем, что  $H_z \equiv H_z(\phi)$ . Тогда имеем

$$f_z^1 = \int_0^\pi M \sin \phi R H_z(\phi) d\phi. \quad (10)$$

Примем во внимание факт (5) и перепишем (10) в виде

$$f_z^1 = \int_0^\pi M \sin \phi R \frac{(\mathbf{H}(\phi) \mathbf{p})}{p} d\phi. \quad (11)$$

Подставим в (11) формулу для напряженности поля (3). Выполнив также некоторые математические преобразования, мы получим

$$\begin{aligned} f_z^1 &= R \int_0^\pi M \sin \phi \frac{2}{p} \left( \frac{2(\mathbf{pr})(\mathbf{rp})}{r^4} - \frac{\mathbf{pp}}{r^2} \right) d\phi = \\ &= R \int_0^\pi M \sin \phi \frac{2}{p} \left( \frac{2(\mathbf{pr})(\mathbf{pr})}{r^4} - \frac{\mathbf{p}^2}{r^2} \right) d\phi = \\ &= R \int_0^\pi M \sin \phi \frac{2}{p} \left( \frac{2(\mathbf{pr})^2}{r^4} - \frac{p^2}{r^2} \right) d\phi. \end{aligned} \quad (12)$$

Если учесть, что из геометрических соображений скалярное произведение

$$(\mathbf{pr}) = pr \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} f_z^1 &= 2MRp \int_0^\pi \sin \phi \left( 2 \left( 1 - \frac{(d^2 + R^2 + 2dR \cos \phi + d^2 - R^2)^2}{4(d^2 + R^2 + 2dR \cos \phi) d^2} \right) - 1 \right) \frac{1}{d^2 + R^2 + 2dR \cos \phi} d\phi = \\ &= 2MRp \int_0^\pi \sin \phi \left( 2 \left( 1 - \frac{(2d^2 + 2dR \cos \phi)^2}{4(d^2 + R^2 + 2dR \cos \phi) d^2} \right) - 1 \right) \frac{1}{d^2 + R^2 + 2dR \cos \phi} d\phi = \\ &= 2MRp \int_0^\pi \sin \phi \left( 2 \left( 1 - \frac{4(d + R \cos \phi)^2 d^2}{4(d^2 + R^2 + 2dR \cos \phi) d^2} \right) - 1 \right) \frac{1}{d^2 + R^2 + 2dR \cos \phi} d\phi = \\ &= 2MRp \int_0^\pi \sin \phi \left( 2 \left( 1 - \frac{(d + R \cos \phi)^2}{(d^2 + R^2 + 2dR \cos \phi)} \right) - 1 \right) \frac{1}{d^2 + R^2 + 2dR \cos \phi} d\phi = \\ &= 2MRp \int_0^\pi \sin \phi \left( 1 - 2 \frac{(d + R \cos \phi)^2}{(d^2 + R^2 + 2dR \cos \phi)} \right) \frac{1}{d^2 + R^2 + 2dR \cos \phi} d\phi. \end{aligned} \quad (17)$$

Выполним в (17) следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} v &= \cos \phi, \\ dv &= d(\cos \phi) = -\sin \phi d\phi, \\ d\phi \sin \phi &= -dv. \end{aligned} \quad (18)$$

то формулу (12) можно переписать в виде

$$f_z^1 = R \int_0^\pi M \sin \phi \frac{2}{p} \left( \frac{2(pr \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha))^2}{r^4} - \frac{p^2}{r^2} \right) d\phi. \quad (14)$$

Выполним некоторые математические преобразования (14), используя основное тригонометрическое тождество и принимая во внимание тот факт, что  $r \equiv r(\phi)$ . Получим

$$\begin{aligned} f_z^1 &= 2MR \int_0^\pi \sin \phi \left( \frac{2p \sin^2 \alpha}{(r(\phi))^2} - \frac{p}{(r(\phi))^2} \right) d\phi = \\ &= 2MR \int_0^\pi \sin \phi (2 \sin^2 \alpha - 1) \frac{p}{(r(\phi))^2} d\phi = \\ &= 2MRp \int_0^\pi \sin \phi (2(1 - \cos^2 \alpha) - 1) \frac{1}{(r(\phi))^2} d\phi. \end{aligned} \quad (15)$$

Вспомним соотношение (7) и перепишем с учетом него (15):

$$\begin{aligned} f_z^1 &= 2MRp \int_0^\pi \sin \phi \times \\ &\times \left( 2 \left( 1 - \left[ \frac{(r(\phi))^2 + d^2 - R^2}{2r(\phi)d} \right]^2 \right) - 1 \right) \frac{1}{(r(\phi))^2} d\phi, \end{aligned} \quad (16)$$

где тоже учтено, что  $r \equiv r(\phi)$ . Произведем упрощение (16), учитывая (4):

Тогда пределы интегрирования преобразуются как

$$\begin{aligned} \phi = 0 &\Rightarrow v = \cos 0 = 1, \\ \phi = \pi &\Rightarrow v = \cos \pi = -1. \end{aligned} \quad (19)$$

С учетом (18), (19) и свойства определенного интеграла интегральное соотношение (17) запишем в виде

$$\begin{aligned}
 f_z^1 &= -2MRp \int_1^{-1} \left( 1 - 2 \frac{(d+Rv)^2}{(d^2 + R^2 + 2dRv)} \right) \frac{1}{d^2 + R^2 + 2dRv} dv = \\
 &= 2MRp \int_{-1}^1 \left( 1 - 2 \frac{(d+Rv)^2}{(d^2 + R^2 + 2dRv)} \right) \frac{1}{d^2 + R^2 + 2dRv} dv.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Перепишем (20) как

$$f_z^1 = 2MRpI, \tag{21}$$

где введено обозначение

$$I = \int_{-1}^1 \left( 1 - 2 \frac{(d+Rv)^2}{(d^2 + R^2 + 2dRv)} \right) \frac{1}{d^2 + R^2 + 2dRv} dv. \tag{22}$$

Интеграл (22) берется, результат представим в аналитическом виде. Соотношение до подстановки пределов следующее:

$$I = \frac{1}{4d^3} \left( -2dv + \frac{(d^2 - R^2)^2}{R(d^2 + R^2 + 2dRv)} + 2R \ln(d^2 + R^2 + 2dRv) \right) \Big|_{-1}^1 \tag{23}$$

Осуществим подстановку пределов интегрирования в (23) и выполним упрощения. Получим

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{4d^3} \left( -4d + \frac{(d^2 - R^2)^2}{R} \left( \frac{1}{(d+R)^2} - \frac{1}{(d-R)^2} \right) + 2R \ln \frac{(d+R)^2}{(d-R)^2} \right) = \\
 &= \frac{1}{4d^3} \left( -4d + \frac{(d^2 - R^2)^2}{R} \left( \frac{(d-R)^2 - (d+R)^2}{(d^2 - R^2)^2} \right) + 4R \ln \frac{d+R}{d-R} \right) = \\
 &= \frac{1}{4d^3} \left( -4d + \frac{2d(-2R)}{R} + 4R \ln \frac{d+R}{d-R} \right) = \frac{1}{4d^3} \left( -8d + 4R \ln \frac{d+R}{d-R} \right) = -\frac{1}{d^2} \left( 2 - \frac{R}{d} \ln \frac{d+R}{d-R} \right).
 \end{aligned} \tag{24}$$

Таким образом, возвращаясь к (21), с учетом (24) мы получаем

$$f_z^1 = -2MRp \frac{1}{d^2} \left( 2 - \frac{R}{d} \ln \frac{d+R}{d-R} \right), \tag{25}$$

где модуль дипольного момента на единицу длины можно переписать через модуль вектора намагниченности и площадь поперечного сечения цилиндра  $S$  как

$$p = MS = M\pi R^2. \tag{26}$$

С учетом (25) и (26) получаем итоговое выражение для проекции на вертикальную ось силы, приходящейся на единицу длины вдоль оси цилиндра и действующей на внешние заряды (закругленную поверхность) верхнего полуцилиндра центрального элемента со стороны одного из боковых цилиндров:

$$f_z^1 = -2\pi M^2 R \frac{R^2}{d^2} \left( 2 - \frac{R}{d} \ln \frac{d+R}{d-R} \right). \tag{27}$$

Осуществим теперь вычисление проекции на вертикальную ось силы, приходящейся на единицу длины вдоль оси цилиндра и действующей на внутренние

заряды (отрицательные заряды плоской поверхности) верхнего полуцилиндра центрального элемента со стороны одного из боковых цилиндров (со стороны второго будет действовать такая же сила, так как у нас симметричный случай). Обозначим эту проекцию силы как  $f_z^2$ . Эта процедура вычисления аналогична проделанной выше. Однако необходимо учитывать, что плотность фиктивных магнитных зарядов уже имеет постоянное значение, поскольку, если обратиться снова к соотношению (1), для любой точки плоской поверхности верхней половинки цилиндра мы получаем

$$\sigma = (\mathbf{Mn}) = -M \cos(0) = -M, \tag{28}$$

где знак минус возникает в силу того, что  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль, направленная противоположно вектору намагниченности, и показывает, что на данной поверхности расположены отрицательные заряды.

Примем во внимание также, что векторы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{r}$  взаимно перпендикулярны. Тогда соотношение для напряженности поля (3) можно представить в виде

$$\mathbf{H} = \left( 0 - \frac{2\mathbf{p}}{r^2} \right) = -\frac{2\mathbf{p}}{r^2}, \tag{29}$$

откуда для проекции на вертикальную ось вытекает формула (проецируем аналогично (5))

$$H_z = -\frac{2(\mathbf{pp})}{r^2 p} = -\frac{2p^2}{r^2 p} = -\frac{2p}{r^2}. \quad (30)$$

Сила, действующая на элемент плоской поверхности  $dy$ , может быть представлена как

$$df_z = \sigma dy H_z, \quad (31)$$

где  $\sigma dy$  — это заряд, приходящийся на единицу длины цилиндров ( $L$ ) и на элемент  $dy$ . С учетом (28) и (30) формула (31) перепишется в виде

$$df_z = \sigma dy H_z = -M dy H_z = \frac{2pM dy}{r^2}. \quad (32)$$

(32) Тогда можно посчитать требуемую величину  $f_z^2$  путем соответствующего интегрирования соотношения (32) по плоской части в пределах от  $-R$  до  $R$ :

$$f_z^2 = \int_{-R}^R df_z = \int_{-R}^R \frac{2pM dy}{(r(y))^2}, \quad (33)$$

где учтено, что  $r \equiv r(y)$ . По рис. 1 видно, что

$$r = d + y. \quad (34)$$

Преобразуем (33) с учетом (34):

$$f_z^2 = \int_{-R}^R df_z = \int_{-R}^R \frac{2pM dy}{(r(y))^2} = \int_{-R}^R \frac{2pM dy}{(d + y)^2}. \quad (35)$$

Интеграл в (35) может быть вычислен, так как это

$$F_z = f_z^{\text{own}} + 2(f_z^1 + f_z^2) = -\frac{2}{3}\pi M^2 R + 2 \left( -2\pi M^2 R \frac{R^2}{d^2} \left( 2 - \frac{R}{d} \ln \frac{d+R}{d-R} \right) + 4\pi M^2 R \frac{R^2}{d^2 - R^2} \right). \quad (38)$$

Введем в (38) безразмерный параметр

$$v = \frac{d}{R}. \quad (39)$$

Тогда с учетом этого параметра (39) формула для проекции силы (38) может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} F_z &= -\frac{2}{3}\pi M^2 R + 2 \left( -2\pi M^2 R \frac{R^2}{d^2} \left( 2 - \frac{R}{d} \ln \frac{\frac{d}{R} + 1}{\frac{d}{R} - 1} \right) + 4\pi M^2 R \frac{\left(\frac{R}{R}\right)^2}{\left(\frac{d}{R}\right)^2 - 1} \right) = \\ &= -\frac{2}{3}\pi M^2 R + 2 \left( -2\pi M^2 R \frac{1}{v^2} \left( 2 - \frac{1}{v} \ln \frac{v+1}{v-1} \right) + 4\pi M^2 R \frac{1}{v^2 - 1} \right) = \\ &= -\frac{2}{3}\pi M^2 R + \frac{2}{3}\pi M^2 R \left( -\frac{6}{v^2} \left( 2 - \frac{1}{v} \ln \frac{v+1}{v-1} \right) + \frac{12}{v^2 - 1} \right) = \\ &= -\frac{2}{3}\pi M^2 R + \frac{2}{3}\pi M^2 R \left( -\frac{6}{v^2} \left( 2 - \frac{1}{v} \ln \frac{v+1}{v-1} \right) + \frac{12}{v^2 - 1} \right) = \\ &= -\frac{2}{3}\pi M^2 R + 12 \frac{2}{3}\pi M^2 R \left( -\frac{1}{v^2} \left( 1 - \frac{1}{2v} \ln \frac{v+1}{v-1} \right) + \frac{1}{v^2 - 1} \right). \end{aligned} \quad (40)$$

интеграл табличного типа. Результат следующий:

$$\begin{aligned} f_z^2 &= \int_{-R}^R \frac{2pM dy}{(d + y)^2} = -2pM \frac{1}{d + y} \Big|_{-R}^R = \\ &= -2pM \left( \frac{1}{d+R} - \frac{1}{d-R} \right) = -2pM \left( \frac{d-R-d-R}{(d+R)(d-R)} \right) = \\ &= 2pM \frac{2R}{d^2 - R^2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Используя связь (26), можно переписать (36) в виде

$$f_z^2 = 4\pi M^2 R \frac{R^2}{d^2 - R^2}. \quad (37)$$

Итак, соотношение (37) — проекция на вертикальную ось силы, приходящейся на единицу длины вдоль оси цилиндра и действующей на внутренние заряды (отрицательные заряды плоской поверхности) верхнего полуцилиндра центрального элемента со стороны одного из боковых цилиндров.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ

С учетом записанных выражений (2), (27) и (37), а также указанной выше симметрии боковых цилиндрических магнитов относительно центрального можно записать выражение для полной проекции на вертикальную ось  $OZ$  силы, приходящейся на единицу длины вдоль оси цилиндра (то есть вдоль оси  $OX$ ) и действующей на верхнюю половинку центрального элемента. Это соотношение имеет вид

Представим выражение (40) в безразмерном виде путем нормирования на вертикальную компоненту (взяв по модулю) собственной силы взаимодействия, то есть на выражение

$$|f_z^{\text{own}}| = \left| -\frac{2}{3}\pi M^2 R \right| = \frac{2}{3}\pi M^2 R. \quad (41)$$

Тогда получим с учетом (40)

$$\begin{aligned} \frac{F_z}{\frac{2}{3}\pi M^2 R} &= \frac{3F_z}{2\pi M^2 R} = \\ &= -1 + 12 \left( -\frac{1}{v^2} \left( 1 - \frac{1}{2v} \ln \frac{v+1}{v-1} \right) + \frac{1}{v^2-1} \right). \end{aligned} \quad (42)$$

По полученной зависимости (42) безразмерной плотности силы от безразмерного расстояния между магнитами построена зависимость, которая показана на рис. 2.

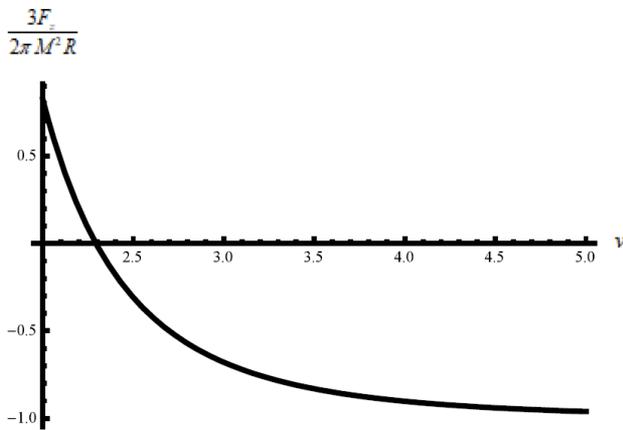


Рис. 2. График нормированной проекции на вертикальную ось плотности полной пондеромоторной силы взаимодействия половинок центрального стержневого магнита для случая одинакового направления намагниченности

Проанализируем полученный результат. Во-первых, при больших расстояниях между цилиндрами (при удалении боковых цилиндров на достаточно большое расстояние), значение безразмерной плотности силы стремится к  $-1$ , то есть к тому значению, как если бы мы рассматривали взаимодействие половинок изолированного центрального магнита:

$$v = 5 \Rightarrow \frac{3F_z}{2\pi M^2 R} \approx -1. \quad (43)$$

И половинки в этом случае притягиваются, то есть пондеромоторная магнитная сила имеет характер притяжения.

Во-вторых, при симметричном сближении боковых магнитов относительно центрального мы видим, что пондеромоторная сила притяжения уменьшается, например, приведем значение нашей безразмерной плотности силы в конкретной точке:

$$v = 3 \Rightarrow \frac{3F_z}{2\pi M^2 R} \approx -0.68. \quad (44)$$

В-третьих, при дальнейшем уменьшении расстояния  $v$  сила меняет знак при некотором значении этого безразмерного параметра, то есть при некотором расстоянии между элементами. В этом случае сила притяжения переходит в силу отталкивания, характер взаимодействия кардинально меняется.

В-четвертых, это расстояние было определено:

$$v = 2.29 \Rightarrow \frac{3F_z}{2\pi M^2 R} \approx 0. \quad (45)$$

В-пятых, при последующем уменьшении расстояния, то есть при  $v < 2,29$ , полуцилиндры центрального магнита уже отталкиваются, эта сила отталкивания монотонно увеличивается и достигает своего максимального значения при минимальном расстоянии между магнитами, а именно:

$$v = 2 \Rightarrow \frac{3F_z}{2\pi M^2 R} \approx 0.82. \quad (46)$$

Наконец, рассмотрим еще один (не менее важный) случай, когда векторы намагниченности боковых магнитов, как показано на рис. 3, будут направлены противоположно вектору намагниченности центрального магнита (по отношению друг к другу они сонаправлены).

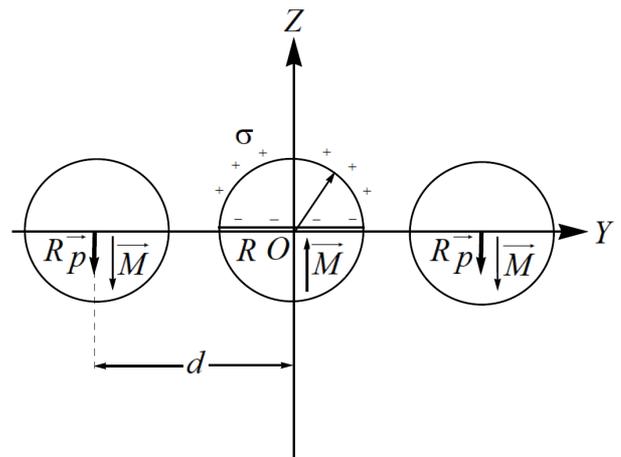


Рис. 3. Система намагниченных цилиндрических стержней с разным направлением намагниченности

Формула (42) легко обобщается на этот случай, а именно собственная сила взаимодействия половинок остается точно такой же, поскольку направление намагниченности центрального магнита не изменяется (см. формулу (2)), силы со стороны боковых магнитов (проекции) меняют знак, поскольку меняет знак направление намагниченности (дипольного момента на единицу длины) боковых цилиндров:

$$\mathbf{M} \rightarrow -\mathbf{M}, \mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}. \quad (47)$$

Для этого случая формула (42) запишется в виде:

$$\frac{F_z}{\frac{2}{3}\pi M^2 R} = \frac{3F_z}{2\pi M^2 R} = -1 - 12 \left( -\frac{1}{v^2} \left( 1 - \frac{1}{2v} \ln \frac{v+1}{v-1} \right) + \frac{1}{v^2-1} \right). \quad (48)$$

По полученной зависимости (48) безразмерной плотности силы от безразмерного расстояния между магнитами была также построена зависимость, которая показана на рис. 4.

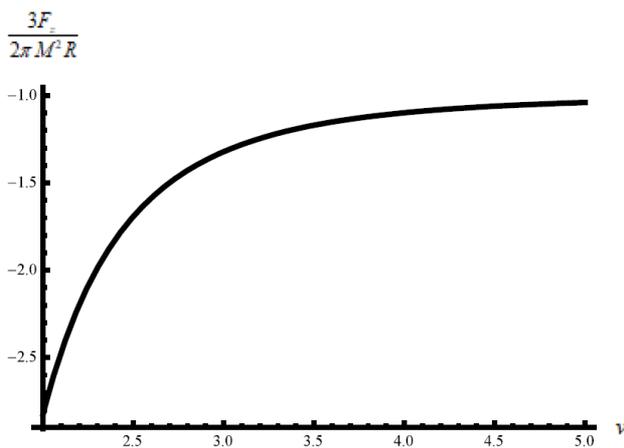


Рис. 4. График нормированной проекции на вертикальную ось плотности полной поперечной силы взаимодействия половинок центрального стержневого магнита для случая разного направления намагниченности

Из этого графика и соответствующего аналитического выражения (48) мы можем сделать следующие выводы. Во-первых, половинки центрального магнита притягиваются при любых значениях параметра  $v$ , причем при наименьшем расстоянии между цилиндрами (при максимальном сближении) сила сцепления полуцилиндров центрального элемента достигает своего макси-

мального значения:

$$v = 2 \Rightarrow \frac{3F_z}{2\pi M^2 R} \approx -2.82. \quad (49)$$

Причем отметим, что это значение превышает примерно в три раза силу взаимодействия половинок изолированного магнита, которая стремится к  $-1$ , как было отмечено выше.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной статье рассмотрена система из трех намагниченных цилиндрических магнитов, выполнен анализ их взаимодействия. Получены следующие интересные и важные результаты.

Во-первых, в случае, когда векторы намагниченности сонаправлены у всех магнитов, было показано, что поперечная сила взаимодействия половинок центрального цилиндрического магнита меняет знак при симметричном сближении боковых магнитов при некотором значении безразмерного расстояния, то есть при некотором расстоянии между элементами. В этом случае сила притяжения переходит в силу отталкивания половинок центрального магнита. Во-вторых, было вычислено это значение. В-третьих, в случае, когда боковые магниты расположены на достаточно большом расстоянии, центральный элемент можно считать изолированным, его половинки (полуцилиндры) притягиваются (как два разноименных полюса магнитов). То есть при удалении боковых магнитов на бесконечность сила взаимодействия половинок центрального цилиндра асимптотически стремится к силе взаимодействия половинок изолированного цилиндра. В-четвертых, если векторы намагниченности боковых магнитов будут одинаково направлены по отношению друг к другу и противоположно направлены вектору намагниченности центрального, то половинки этого магнита будут притягиваться при любых значениях расстояния между цилиндрами, а при максимальном сближении магнитов сила сцепления половинок центрального магнита достигнет максимального значения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

- [1] Бадаев А.С., Чернышов А.В. Физические основы микроэлектроники. Ч. 1. Физические свойства твердых тел. Воронеж, 2011.
- [2] An Z., Han X., Mauger M. et al. // *IEEE Trans. on Power Electronics*. **37**, N 10. 12391. (2022).
- [3] Trench A., Sykes J.P. // *Engineering*. **6**, N 2. 115. (2020).
- [4] Tong W., Li S., Pan X. et al. // *IEEE Trans. on Energy Conversion*. **35**, N 4. 2191. (2020).
- [5] Adly A.A., Huzayyin A. // *J. of Adv. Res.* **17**. 103. (2019).

- [6] Eljmal S.R., Alshikhi S.I., Abed Alkreem N.M., Hamouda S.A. // *Mordovia University Bulletin*. **27**, № 1, 108. (2017).
- [7] Chalmers B.J., Akmes R. // *J. of Magnetism and Magnetic Materials*. **196–197**. 277. (1999).
- [8] Михайлова Е.Г., Гончаров В.И. Сб. статей: Материалы VII Международной научно-практической конференции «Современные инновации: достижения и перспективы III тысячелетия». С. 17–19. (2017). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32500618>

- [9] *Brown D., Ma Bao-Min, Chen Z.* // *J. of Magnetism and Magnetic Materials.* **248**, N 3. 432. (2002).
- [10] *Zhou T., Chen J., Wang Q. et al.* // *J. of Alloys and Compounds.* **937**. Art No. 168368. (2023).
- [11] *Шнеерсон Г.А.* Основы техники получения сильных и сверхсильных импульсных магнитных полей. СПб., 2011.
- [12] *Пятаков М.А., Поляков П.А., Русакова Н.Е.* // Изв. РАН. Сер. физ. **84**. № 5. 719. (2020). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=42652163> (*Piatakov M.A., Polyakov P.A., Rusakova N.E.* // *Bull. of the Russian Academy of Sciences: Physics.* **84**, № 5. 593. (2020)).
- [13] *Пятаков М.А., Акимов М.Л., Поляков П.А.* // Изв. РАН. Сер. физ. **85**, № 11. 1568. (2021). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=46688093> (*Piatakov M.A., Akimov M.L., Polyakov P.A.* // *Bull. of the Russian Academy of Sciences: Physics.* **85**, N 11. 1230. (2021)).
- [14] *Акимов М.Л., Пятаков М.А., Поляков О.П., Поляков П.А.* // Изв. РАН. Сер. физ. **86**, № 9. 1251. (2022). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49273435> (*Akimov M.L., Piatakov M.A., Polyakov O.P., Polyakov P.A.* // *Bull. of the Russian Academy of Sciences: Physics.* **86**, N 9. 1037. (2022)).
- [15] *Кринчик Г.С.* Физика магнитных явлений. М., 1976.
- [16] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М., 2016.
- [17] <https://supermagnit.net/news/sila-magnita-ot-chego-ona-zavisit/>
- [18] <https://krepcom.ru/blog/vse-o-krepezhе/neodimovyy-magnit-supersilnyy-i-superpoleznyy/>
- [19] *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М., 1989.
- [20] *Choi H.S., Park I.H., Lee S.H.* // *IEEE Tran. on Magnetics.* **42**, N 4. 663. (2006).
- [21] *Seo J.H., Choi H.S.* // *IEEE Trans. on Magnetics.* **50**, N 2. Art. No. 7012904. (2014).
- [22] *Алиев И.Н., Копылов И.С.* // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Естественные науки». **63**, № 6. 25. (2015). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25414998>.
- [23] *Vokoun D., Beleggia M., Heller L., Sittner P.* // *J. of Magnetism and Magnetic Materials.* **321**, N 22. 3758. (2009).
- [24] *Robertson W., Cazzolato B., Zander A.* // *IEEE Trans. on Magnetics.* **47**, N 8 2045. (2011).

## On the ponderomotive magnetic force of interaction between halves of a uniformly magnetized cylindrical rod

**М.А. Piatakov<sup>a</sup>, М.Л. Akimov<sup>b</sup>, P.A. Polyakov<sup>c</sup>**

*Department of General Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University  
Moscow 119991, Russia*

*E-mail: <sup>a</sup>f3326103344444@yandex.ru, <sup>b</sup>ml.akimov@physics.msu.ru, <sup>c</sup>polyakovpa@mail.ru*

In this work, a theoretical study of the ponderomotive magnetic force of interaction between two halves of a long rod cylindrical magnet, uniformly magnetized perpendicular to the cylinder axis, depending on the influence of the magnetic field of two other similar magnets arranged symmetrically, is carried out. It is shown that the bonding force of these halves depends significantly on the configuration and arrangement of the magnets.

PACS: 41.20.Gz, 75.50.Ww, 71.15.Mb, 14.80.Hv, 03.50.-z.

*Keywords:* permanent magnet, ponderomotive magnetic force, magnetisation, fictitious magnetic charge method.

*Received 10 May 2023.*

### Сведения об авторах

1. Пятаков Максим Андреевич — аспирант; e-mail: f3326103344444@yandex.ru.
2. Акимов Михаил Львович — канд. физ.-мат. наук, ст. преподаватель; e-mail: ml.akimov@physics.msu.ru.
3. Поляков Петр Александрович — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (499) 907-29-59, e-mail: polyakovpa@mail.ru.