

## Метод эквивалентных замещений при точном аналитическом решении задач синтеза многослойных периодических структур со связанными волновыми толщинами и с заданными амплитудно–фазовыми характеристиками.

А. Е. Жителев,\* А. В. Козарь†

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2*

(Поступила в редакцию 31.05.2022; подписана в печать 11.07.2022)

На основе методов эквивалентных замещений и связанных волновых толщин построен алгоритм численно–аналитического расчёта значений толщин интерференционной просветляющей структуры ( $\pi$ –структуры) для произвольного числа составляющих её слоёв. Полученный алгоритм позволяет синтезировать структуры, обеспечивающие заданный коэффициент отражения на всем непрерывном множестве значений от 0 до 1 для любых встречающихся на практике показателей преломления как материалов слоев структур, так и материалов сред, ограничивающих структуру. Корректность полученного алгоритма и работоспособность метода подтверждена численным экспериментом.

PACS: 41.20.-q

УДК: 537

Ключевые слова: метод эквивалентных замещений, интерференционные просветляющие структуры, коэффициент отражения, показатель преломления, интерференция.

### ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая разработка методов синтеза интерференционных периодических структур с заданными амплитудно–фазовыми характеристиками является актуальной проблемой для целого ряда областей как прикладной, так и фундаментальной физики. Численные методы решения задачи синтеза такого рода структур хорошо развиты. Им посвящен ряд работ [1–3], и получены пакеты программ (доступных для коммерческого использования), решающих поставленную задачу. Однако решение такого рода задачи в численном виде хотя и возможно, и часто может быть эффективно, тем не менее, имеет ряд недостатков по сравнению с аналитическим решением задачи. В частности, аналитические решения позволяют выполнять обобщённый анализ свойств полученных решений в зависимости от физических факторов, характеризующих полученную структуру (потери в слоях структуры, возможные разбросы толщин слоёв и показателей преломления). Помимо этого, с помощью полученного в аналитической форме алгоритма решения поставленной задачи становится возможным быстрый поиск оптимальных решений по различным критериям (минимальное количество слоёв, общая оптическая толщина структуры и т.п.) и определение возможных диапазонов различных характеристик слоёв структуры (диапазон возможных показателей преломления, толщин).

Аналитическим вопросам синтеза структур с заданными амплитудно–фазовыми характеристиками посвящено большое количество работ [4–11], в которых хорошо развиты методы, использующие периодические

структуры, состоящие из полуволновых, четвертьволновых и близких к ним по оптическим толщинам слоёв. Однако для ряда прикладных задач требуется строгий аналитический метод, позволяющий решать задачу синтеза многослойных интерференционных покрытий с заданными амплитудно–фазовыми характеристиками в более общей постановке.

В работе [12] был предложен метод (метод связанных волновых толщин) и на его основе построен универсальный аналитический алгоритм синтеза нового класса многослойных периодических структур. Предложенный алгоритм позволяет синтезировать многослойные периодические структуры, амплитудные характеристики которых зависят не только от числа слоёв, как в классических алгоритмах синтеза четвертьволновых структур, но и от соотношения волновых (оптических) толщин слоёв в периоде структуры. Причем, предложенный алгоритм одновременно с выполнением амплитудного требования, вне зависимости от числа слоёв и физических толщин связанных слоёв, всегда обеспечивает значение фазы коэффициента отражения от такой структуры равное  $\pi$ . Последнее обстоятельство и обусловило название такого класса структур —  $\pi$ –структуры. Указанный метод является универсальным в том смысле, что позволяет найти все возможные точные структурные решения в задачах синтеза просветляющей интерференционной структуры, при этом показатели преломления как слоёв структуры, так и ограничивающих её сред могут принимать любые значения из всего непрерывного множества действительных чисел. В процессе решения задачи определяется оптимальное число слоёв  $\pi$ –структуры.

В ряде прикладных и теоретических задачах оптимальное число слоёв  $\pi$ –структуры может оказаться достаточно большим, а в аналитической форме решение для толщин слоёв  $\pi$ –структуры получено в случаях, когда их число не превышает пяти [12]. В задачах, где

\* [ae.zhitelev@physics.msu.ru](mailto:ae.zhitelev@physics.msu.ru)

† [avk@phys.msu.ru](mailto:avk@phys.msu.ru)

предполагается синтез структуры с большим числом слоёв (например, для получения структур с какими-то заданными спектральными особенностями), необходимо использовать несколько иной подход для поиска необходимых параметров  $\pi$ -структуры.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

В данной работе будет рассмотрено нормальное падение плоской монохроматической волны на многослойную структуру ( $N$  — число слоёв,  $K$  — число периодов) из среды с действительными показателями преломления  $n_L$  (среда, из которой распространяется волна). Просветляемая среда имеет показатель преломления  $n_S$  (рис. 1). Интерференционная структура характеризуется двухслойным периодом с показателями преломления слоёв  $n_1$  и  $n_2$  ( $n_2$  — слой, прилегающий к среде с показателем преломления  $n_S$ ) и обеспечивает на заданной (рабочей) длине волны  $\lambda$  выполнение как амплитудного  $|r_c| = |r_s|$ , так и фазового,  $\varphi = \varphi_s + \pi(2k + 1)$  условий согласования [12] (где:  $|r_c|$  и  $\varphi_c$  — модуль и фаза коэффициента отражения волны от структуры при падении волны со стороны слоя с показателем преломления  $n_2$  в отсутствие согласуемой среды,  $|r_s|$  и  $\varphi_s$  — модуль и фаза коэффициента отражения от согласуемой среды в отсутствие согласующей структуры).

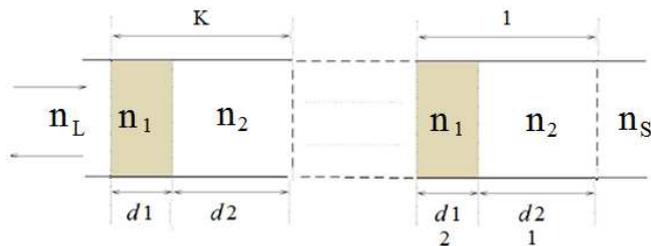


Рис. 1. Согласующая интерференционная структура с двухслойным периодом

Полное множество всех структурных решений для просветляющей двухкомпонентной периодической структуры определяется системой связанных уравнений, которая выглядит следующим образом [12]:

$$n_S = \left| \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 T_2 + n_2 T_1} \right| \frac{n_1 n_2}{n_L}, \quad (1)$$

$$1 - \Psi T_2^2 = \frac{U_{K-2}(x)}{U_{K-1}(x)} \sqrt{(1 + (AT_2)^2)(1 + T_2^2)}, \quad (2)$$

где:  $\Psi = \begin{cases} P & \text{если } N = 2K, \\ B & \text{если } N = 2K + 1, \end{cases}$ ;  $T_i \equiv \text{tg}(2\pi n_i d_i / \lambda)$ , ( $i = 1, 2$ );  $d_{1,2}$  — физическая толщина слоёв;  $U_{K-1}(x)$ ,

$U_{K-2}(x)$  — полиномы Чебышева второго рода:

$$U_K(x) = 2^K \left[ x^K - \frac{K-1}{1!2^2} x^{K-2} + \frac{(K-2)(K-3)}{2!2^4} x^{K-4} - \frac{(K-3)(K-4)(K-5)}{3!2^4} x^{K-6} \dots \right],$$

$$x = (1 - pA(T_2)^2) / \sqrt{(1 + (AT_2)^2)(1 + T_2^2)},$$

$$p = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1 n_2},$$

$$B = \frac{n_2^4 - n_L n_S n_1^2}{n_2^2 (n_L n_S - n_1^2)},$$

$$P = \frac{(n_2^2 - n_L n_S)(n_L n_1^2 - n_S n_2^2)}{n_2^2 (n_L - n_S)(n_L n_S - n_1^2)}.$$

Соотношение (1) можно переписать в виде:

$$T_1 = AT_2, \quad (3)$$

где:

$$A = \frac{n_1(n_2^2 - n_L n_S)}{n_2(n_L n_S - n_1^2)}. \quad (4)$$

Таким образом, в соответствии с (3), условие связи волновых толщин имеет вид:

$$D_1 = \frac{\lambda}{2\pi} \left( \text{arctg} \left( A \cdot \text{tg} \frac{2\pi}{\lambda} D_2 \right) + \pi k \right), \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

где  $D_2 = \frac{\lambda}{2\pi} (\text{arctg} T_2 + \pi k)$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ),  $D_1 = d_1 n_1$ ,  $D_2 = d_2 n_2$  — волновые (оптические) толщины слоёв в периоде многослойной структуры.

### 2. МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ЗАМЕЩЕНИЙ

В более общей постановке задачи, когда требуется синтезировать структуру, обеспечивающую заданный коэффициент отражения на всем непрерывном множестве его значений от 0 до 1, можно, используя предложенный алгоритм на основе связанных уравнений (1)–(2), воспользоваться методом эквивалентных замещений, суть которого заключается в замене конструктивно сложной многослойной структуры на менее сложную, но имеющую такую же амплитудно-фазовую характеристику на заданной длине волны. Особенности применения метода эквивалентных замещений для синтеза и анализа  $\pi$ -структур подробно изложены в работах [13, 14].

Поскольку  $\pi$ -структуры по определению имеют фазу коэффициента отражения равную  $\pi$  [12], то можно

заменить такую структуру на некоторый слой с эквивалентным  $\pi$ -структуре показателем преломления  $n_{eq}$ , волновая толщина которого равна  $\lambda_\varepsilon/4$  ( $\lambda_\varepsilon = \lambda/n_{eq}$ ), а фаза коэффициента отражения равна  $\pi$  (рис. 2). Тогда выражение для эффективного показателя преломления слоя со средой может быть представлено в следующем виде [7, 13]:

$$n_{eff} = n_{eq} \frac{n_s + in_{eq}T}{n_{eq} + in_s T}, \quad (5)$$

где  $T = tg(2\pi n_{eq}d/\lambda)$ ,  $n_{eq}$  — эквивалентный показатель преломления слоя, представляющий собой амплитудно-фазовый аналог  $\pi$ -структуры на заданной длине волны.

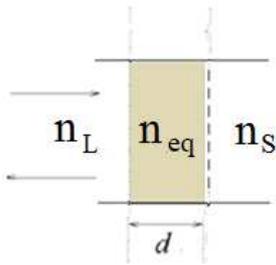


Рис. 2. Представление  $\pi$ -структуры в виде эквивалентного слоя

Поскольку в интересующем нас случае  $d = \lambda_\varepsilon/4$ ,  $T \rightarrow \infty$ , выражение (5) запишется в следующем виде:

$$n_{eff} = \frac{n_{eq}^2}{n_s}. \quad (6)$$

Модуль коэффициента отражения, в таком случае определяется как:

$$|r| = \left| \frac{n_{eff} - n_L}{n_{eff} + n_L} \right| = \left| \frac{n_{eq}^2/n_s - n_L}{n_{eq}^2/n_s + n_L} \right| = \left| \frac{n_{eq}^2 - n_L n_s}{n_{eq}^2 + n_L n_s} \right|. \quad (7)$$

При анализе выражения (7) необходимо рассмотреть два случая:

**А:**  $n_{eq}^2 - n_L n_s > 0$ , тогда  $|r| = \frac{n_{eq}^2 - n_L n_s}{n_{eq}^2 + n_L n_s}$ ,

**Б:**  $n_{eq}^2 - n_L n_s < 0$ , тогда  $|r| = \frac{n_L n_s - n_{eq}^2}{n_{eq}^2 + n_L n_s}$ .

Учитывая (6), можно записать:

**А:**  $n'_s = n_s \frac{1+|r_x|}{1-|r_x|}$  для  $|r_x| > |r_s|$ ,

**Б:**  $n'_s = n_s \frac{1-|r_x|}{1+|r_x|}$  для  $|r_x| < |r_s|$ ,

где  $n'_s$  — показатель преломления некоторой гипотетической согласуемой среды, такой, что  $n'_s = n_{eff}$ . Таким образом, синтезированная в соответствии с алгоритмом на основании связанных уравнений (1)–(2)  $\pi$ -структура, обеспечивающая нулевой коэффициент

отражения от среды с показателем преломления  $n'_s$ , будет обеспечивать заданный коэффициент отражения  $|r_x|$  от среды с показателем преломления  $n_s$ .

При практическом решении такой задачи необходимо, в первую очередь, определить минимальное число слоёв, которое должна иметь  $\pi$ -структура для обеспечения полного согласования среды с показателем преломления  $n'_s$ . Минимальное число слоёв  $\pi$ -структуры при этом задаётся выражениями [12]:

$$N = 2K : K_{min} = \left\lceil \ln \left( \frac{n_L n'_s}{n_h n_l} \right) / \ln \left( \frac{n_h}{n_l} \right) \right\rceil + 1, \quad (8)$$

$$N = 2K + 1 : K_{min} = \left\lceil \ln \left( \frac{n_L n_s}{n_h^2} \right) / 2 \ln \left( \frac{n_h}{n_l} \right) \right\rceil + 1. \quad (9)$$

где  $n_h = n_1$ ,  $n_l = n_2$  если  $n_1 > n_2$  или  $n_h = n_2$ ,  $n_l = n_1$  если  $n_1 < n_2$ .

На втором этапе синтеза  $\pi$ -структуры из уравнения (2) для найденного значения  $K_{min}$  определяется значение  $d_2$ , а из уравнения связи (3)  $d_1$ .

Таким образом, при любых заданных значениях показателей преломления граничных сред и слоёв структуры всегда существуют решения для  $d_1$ ,  $d_2$  и  $N$ , позволяющие синтезировать  $\pi$ -структуру с заданными амплитудно-фазовыми свойствами.

Нетрудно видеть, что при варьировании значений показателей преломления материалов слоёв структуры и обрамляющих её сред, используемых в выражениях (8)–(9), величина  $K_{min}$  может принимать довольно большие значения. Однако точные аналитические решения уравнения (2) на данный момент получены только для структур, число слоёв которых не превышает пяти [12]. Однако, для случаев, когда  $N > 5$  можно воспользоваться численно-аналитическим методом синтеза  $\pi$ -структур.

### 3. ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СИНТЕЗА $\pi$ -СТРУКТУР

В работе [12] были найдены точные аналитические соотношения, содержащие полное множество всех структурных решений синтеза  $\pi$ -структур при  $N \leq 5$ . Нахождение точных аналитических решений для синтеза  $\pi$ -структур с большим числом слоёв ( $N > 5$ ) возможно, но крайне затруднено. Тем не менее, алгоритм синтеза, предложенный в работе [12] дает возможность их нахождения численно, с использованием условия связи (3) и соотношений для минимального числа слоев, начиная с которого задача синтеза имеет действительные решения для толщин слоев  $d_1$  и  $d_2$ . Для выбранного  $N > N_{min}$  величина  $d_2$  варьировалась в интервале главных значений от нуля до значения оптической толщины  $\lambda/2$ , соответствующей на заданной длине волны полуволновому слою. В соответствии с  $d_2$  одновременно менялось значение  $d_1$ , кото-

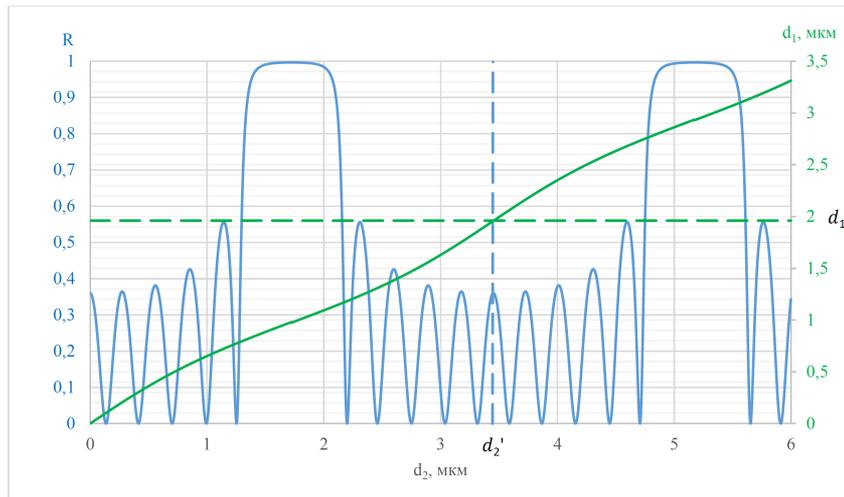


Рис. 3. Зависимость  $R(d_2)$ ,  $d_1(d_2)$  при  $N = 10$

рое однозначно определялось с учётом выражения (3). Далее производился расчёт коэффициента отражения полученной таким образом структуры в зависимости от варьируемой величины  $d_2$ . На рис. 3 представлен пример такого расчёта  $R(d_2)$  для рабочей длины волны  $\lambda = 10$  мкм, а также представлена соответствующая зависимость  $d_1(d_2)$ .

В данном случае в качестве материалов для синтеза интерференционного покрытия были выбраны  $BaF_2$  ( $n_2 = 1.45$ ) и  $ZnSe$  ( $n_1 = 2.55$ ). Интерференционная структура состоит из десяти ( $N = 10$ ) слоёв. Волна распространяется из свободного пространства ( $n_L = 1$ ), показатель преломления согласуемой среды  $n_S = 4$ , причем, минимальное число слоев в этом случае  $N_{min} = 2$ . Вертикальной пунктирной линией на рис. 2 отмечено значение  $d_2'$ , соответствующее полуволновой толщине слоя с показателем преломления  $d_2$ , примыкающего к просветляемой среде, горизонтальной пунктирной линией указано значение  $d_1'$ , также соответствующее полуволновой толщине слоя с показателем преломления  $n_1$ . Исследование свойств структуры при дальнейшем увеличении  $d_2$  неоправдано, так как период представленной на рис. 2 величины  $R$ , как следует из теории, изложенной в [12] (и видно из рис. 2) составляет по координате  $d_2$  именно  $\lambda/2$ . В ходе расчётов было показано, что минимумы  $R$  являются глобальными, т.е. при уточнении значения  $d_2$  в точках с координатой по  $d_2$ , соответствующей предполагаемому значению глобального минимума до шестого знака после запятой, значение  $R$  определялось как нулевое с точностью до 15-го знака после запятой (машинный ноль).

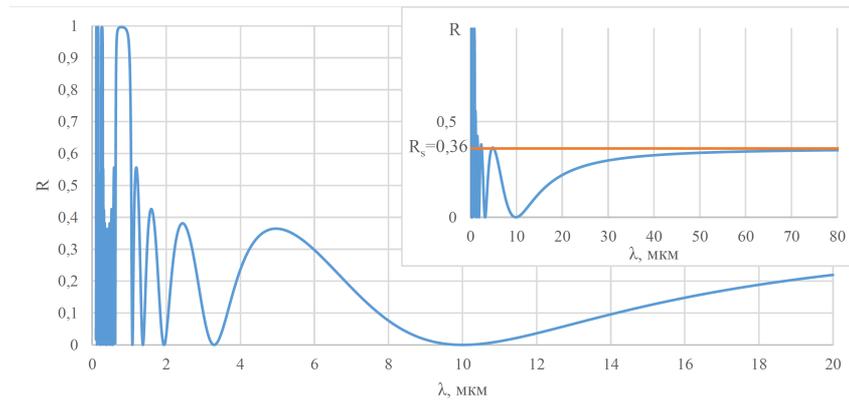
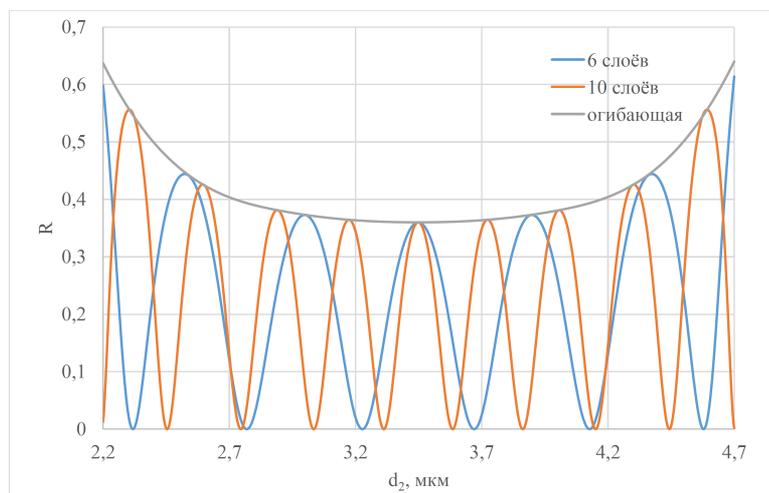
Видно, что в интервале  $(0; d_2')$  значение  $R$  достигает глобального минимума  $M = 10$  раз. Аналогичные численные эксперименты были проведены для структур с различным числом слоёв, в ходе которых было определено, что число глобальных минимумов напрямую связано с числом слоёв системы  $N$  и в случае чётного

числа слоёв  $M = N$ , и в случае нечётного числа слоёв  $M = N - 1$ . Такой результат аналогичен полученному аналитическим методом ранее в работе [12].

Из рис. 3 видно, что как для  $d_1$ , так и для  $d_2$  глобальные минимумы 1–5 (начиная от нуля по  $d_2$ ), показанные на рис. 2, располагаются в первой четверти ( $0 < \arg(T_i) < \pi/2$ ), минимумы 6–10 — во второй ( $\pi/2 < \arg(T_i) < \pi$ ). Так как функция  $T_i$  — периодическая, то в дальнейшем будем рассматривать только главные решения, для которых:  $0 < \arg(T_i) < \pi$ , или, в толщинах:  $0 < d_i < \lambda_\varepsilon/2$ .

На рис. 4 представлена спектральная зависимость коэффициента отражения от длины волны ( $\lambda$ ) на интервале  $0 \leq \arctg T_2 \leq \pi/2$  для 10–слойной структуры с наименьшим из возможных пяти значений  $d_2 = 0.136299$  мкм, представленных на рис. 3. Поскольку в точное аналитическое уравнение (2), определяющее полное множество всех значений  $d_2$  (в данном случае на выбранном интервале длин волн  $i = 5$ ), входят не абсолютные значения  $d_2$  и  $\lambda$ , а их относительная величина  $d_2/\lambda$ , то  $\frac{d_2}{\lambda} = \text{const}$  и для фиксированного значения  $d_2$  существует дополнительно четыре значения  $\lambda$ , удовлетворяющих уравнению (2). Для рабочей длины волны  $\lambda = 10$  мкм наблюдается глобальный и самый длинноволновый (поскольку выбрана наименьшая толщина  $d_2$ ) минимум. Дополнительно, из рис. 4 видно, что при  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $R(\lambda)$  асимптотически стремится к величине  $R_s = 0.36$ , которая определяется выражением  $R_s = ((n_s - 1)/(n_s + 1))^2$ .

В результате анализа была установлена следующая особенность зависимости  $R$  от  $d_2$  (пример которой представлен на рис. 3). Огибающая максимумов отражения остается неизменной вне зависимости от числа слоёв при неизменных значениях показателей преломления слоёв структуры и окружающих её сред. На рис. 5 представлен пример, демонстрирующий эту особенность. Показатели преломления слоёв структу-

Рис. 4. Спектр решения для  $d_2 = 0.136299$  мкмРис. 5. Огибающая для максимумов зависимостей  $R(d_2)$  для разных значений  $N$ 

ры и окружающих её сред соответствуют тем, что были рассмотрены в примере, показанном на рис. 3. Для демонстрации указанной особенности рассмотрены структуры с числом слоёв  $N = 6, 10$ . Для удобства и большей наглядности представлен участок зависимости  $R(d_2)$ , лежащий внутри интервала значений  $T_2$  таким, что  $\pi/4 < \arg(T_2) < 3\pi/4$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методами эквивалентных замещений и связанных волновых толщин найден алгоритм для численно-аналитического синтеза  $\pi$ -структур обеспечивающих получение заданного коэффициента отражения (на всем непрерывном множестве его значений от 0 до 1) от среды с любым действительным показателем преломления, вне зависимости от заданных априори значения показателей преломления слоев в периоде структуры. Рассмотрены некоторые спектральные и струк-

турные особенности многослойных  $\pi$ -структур.

Из преимуществ представленного в данной работе численно-аналитического метода к решению задачи синтеза многослойных интерференционных структур можно выделить следующие:

1. в  $\pi$ -структурах с двухслойным периодом толщины слоёв в периоде связаны жестким условием связи, следовательно численная задача по подбору необходимой толщины слоёв из двухмерной (подбор  $d_1$  и  $d_2$ ) редуцируется до одномерной (нахождение  $d_2$  с одновременным определением из условия связи значения величины  $d_1$ )
2. метод позволяет рассчитывать минимальное число слоёв, необходимое для решения поставленной задачи и тем самым экономить расчётное время и вычислительные ресурсы.
3. метод позволяет найти полное множество всех точных решений задачи синтеза структур с заданной амплитудно-фазовой характеристикой.

- 
- [1] Гласко В.Б., Тихонов А.Н., Тихонравов А.В. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1974. **14**. № 1. С. 135.
- [2] Свешиников А.Г., Тихонравов А.В. // Матем. моделирование. 1989. **1**, № 7. С. 13.
- [3] Тихонов А.Н. (мл.), Тихонравов А.В., Трубецков М.К. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. **33**, № 10. С. 1518.
- [4] Кард П.С. Анализ и синтез многослойных интерференционных покрытий. Таллин: Валгус, 1971.
- [5] Фурман Ш.А. Тонкослойные оптические покрытия. Л.: Машиностроение, 1977.
- [6] Розенберг Т.В. Оптика тонкослойных покрытий. Москва: Наука, 1958.
- [7] Бреховских Л.В. Волны в слоистых средах. Москва: АН СССР, 1973.
- [8] Борн М., Вольф Э. Основы оптики. Москва, Наука, 1980.
- [9] Телен А. Физика тонких плёнок. Москва, Мир, 1972.
- [10] Delano E., Pegis R.G. // Progress in Optics. 1969. **7**. P. 69.
- [11] Dobrowolski J.A. // Journ. Opt. Soc. Amer. 1959. **49**. P. 794.
- [12] Козарь А.В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2020. № 6. С. 92.
- [13] Козарь А.В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2009. № 3. С. 54.
- [14] Козарь А.В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2018. № 6. С. 61.
- 

## The method of equivalent substitutions, applied for the exact analytical solution of multilayer periodic structures with coupled wave thicknesses and specified amplitude–phase characteristics synthesis

A. E. Zhitelev<sup>a</sup>, A. V. Kozar<sup>b</sup>

Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia  
E-mail: <sup>a</sup>ae.zhitelev@physics.msu.ru, <sup>b</sup>avk@phys.msu.ru

Based on the method of equivalent substitutions and the method of coupled wave thicknesses, an analytical solution to the problem of calculations of the thickness values of the interference anti-reflective structure ( $\pi$ -structure) for an arbitrary number of layers is obtained. Exact algorithm is obtained that make it possible to synthesize antireflection structures providing a predefined reflection coefficient on the entire continuous set of values from 0 to 1 for any real values of the refractive indices of both matched media and materials of layers of such structures. The correctness of the obtained algorithm and the efficiency of the method are confirmed by a numerical experiment.

PACS: 41.20.-q.

*Keywords:* equivalent substitution method, interference antireflection structures, reflection coefficient, refractive index, interference.

*Received 31 May 2022.*

1. Жителев Александр Евгеньевич — аспирант; e-mail: ae.zhitelev@physics.msu.ru.
  2. Козарь Анатолий Викторович — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: avk@phys.msu.ru.
-