Светоподобные сингулярные гиперповерхности в квадратичной гравитации

И. Д. Иванова*
Институт ядерных исследований РАН. Россия,
117312, Москва, пр-т 60-летия Октября, д. 7а
(Поступила в редакцию 07.08.2021; подписана в печать 10.09.2021)

С помощью принципа наименьшего действия были получены уравнения движения для сингулярной гиперповерхности произвольного типа в квадратичной гравитации. Уравнения, содержащие компоненты поверхностного тензора энергии-импульса, соответствующие «внешнему давлению» и «внешнему потоку», вместе с условиями Лихнеровича необходимы для нахождения самой гиперповерхности, тогда как остальные уравнения определяют произвольные функции, которые возникают из-за неявного присутствия δ'. Оказалось, что для квадратичной поправки Гаусса-Бонне не существует ни двойных слоев, ни тонких оболочек. Было продемонстрировано, что для светоподобных сингулярных гиперповерхностей отсутствует «внешнее давление». Для сферически-симметричных светоподобных сингулярных гиперповерхностей дополнительно равен нулю «внешний поток», поэтому такие гиперповерхности могут быть только тонкими оболочками. В этом случае система уравнений движения редуцируется до одного, которое, наряду с условиями Лихнеровича, выражается через инварианты сферической геометрии.

PACS: 02.40.Ky, 02.40.-k, 04.50.Kd УДК: 53.02, 531-9
Ключевые слова: квадратичная гравитация, светоподобные гиперповерхности, тонкая оболочка, двойной слой.

ВВЕДЕНИЕ

Квадратичная гравитация принадлежит к классу теорий высших производных, проанализированных еще Остроградским [1], который доказал, что их гамильтониан неограничен снизу. Подобные теории подчиняются теореме Остроградского о неустойчивости, которая классифицирует все невырожденные теории высших производных как неустойчивые по Ляпунову. Это серьезная проблема, потому что такие нестабильные теории обычно обладают состояниями с отрицательной энергией, которые решительно исключаются из квантовых теорий поля. Несмотря на это, в последнее время наблюдается всплеск интереса к теориям высших производных по ряду причин, основные из которых будут приведены далее.

Во-первых, перенормируемость теорий высших производных в отличии от общей теории относительности [2–4] означает, что изучение подобных теорий может дать важные подсказки относительно того, как квантовать гравитацию. Во-вторых, несколько групп исследователей независимо обнаружили [5–15], что поправки к гравитационному лагранжиану, возникающие в однопетлевом приближении при перенормировке в квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени включают члены квадратичные по тензору кривизны Римана и его сверткам. Кроме того, А. А. Старобинский [16] использовал эти неизбежные поправки к действию гравитации и заметил, что космологическое решение без сингулярности, которое относится к типу вселенной де-Ситтера, может быть получено путем их учета. Это привело к созданию новаторской модели инфляции. В силу вышеперечисленных, а также многих других обстоятельств исследование квадратичной гравитации на настоящий момент является актуальной проблемой.

Как в общей теории относительности, так и в квадратичной гравитации встречаются сингулярные гиперповерхности. Это гиперповерхности на которых тензор кривизны имеет сингулярные составляющие, в частности, слагаемые пропорциональные θ–функции или δ–функции.

В любой теории гравитации сингулярные гиперповерхности являются важными идеализированными объектами, предназначенными для описания локальной концентрации вещества или энергии на данной гиперповерхности, например, доменных стенок, тонких слоев материи или гравитационных полей, распространения светоподобной материи, гравитационных ударных волн, границ материя-вакуум, каустик, фазовых переходов в вакууме и т. д.

Роль точных решений в понимании физических явлений трудно переоценить. Поскольку уравнения поля любой теории гравитации сильно нелинейны, поиск решений становится очень непростой задачей, поэтому исследование, наряду с остальными, сингулярных распределений полей материи крайне важно.

Уравнения Эйнштейна на сингулярной гиперповерхности впервые были выведены В. Израэлем [17–19]. В случае квадратичной гравитации соответствующие уравнения получены Дж. М. М. Сеновийей [20–25]. Они существенно отличаются от уравнений Израэля, прежде всего тем, что содержат не только δ–функцию, но и ее производную. Таким образом, они описывают не только тонкие оболочки, но и так называемые двойные слои.

В статье [26] было показано, что уравнения движения сингулярной гиперповехности в квадратичной гравитации можно вывести, используя только

* pc_mouse@mail.ru

принцип наименьшего действия. Основным преимуществом такого метода является отсутствие производной δ–функции в явном виде в ходе вычислений. Настоящая работа обобщает результаты, представленные в публикации [26] на светоподобные гиперповерхности. Кроме того, для данного типа гиперповерхностей разобран важный частный случай сферической симметрии.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Добавление членов высшего порядка по кривизне является естественным обобщением теории гравитации Эйнштейна. В первом приближении эти поправки дают квадратичные члены, соответственно, действие квадратичной гравитации в общем случае можно представить в виде:

$$S_q = -\frac{1}{16\pi}\int_\Omega \sqrt{-g}\left(\alpha_1 R_{abcd}R^{abcd} + \alpha_2 R_{ab}R^{ab} + \right. \\ \left. +\alpha_3 R^2 + \alpha_4 R + \alpha_5 \Lambda\right)\, d^4x. \quad (1)$$

Здесь g — детерминант метрики, компоненты которой в данном случае выступают в качестве динамических переменных, α_i - произвольные константы, $R^a_{\ bcd}$ — тензор Римана:

$$R^a_{\ bcd} = \partial_c \Gamma^a_{bd} - \partial_d \Gamma^a_{bc} + \Gamma^a_{ce}\Gamma^e_{bd} - \Gamma^a_{de}\Gamma^e_{bc}.$$

Тензор Риччи и скалярная кривизна определяются как:

$$R_{ab} = R^c_{\ acb},\ R = R^a_a.$$

Здесь и далее используются сигнатура $(+,-,-,-)$ и геометрические единицы, в которых $c = G = 1$.

Рассмотрим четырехмерное пространство–время Ω, разделенное на две области — Ω^+ и Ω^- с различной геометрией сингулярной гиперповерхностью Σ_0. Сингулярной гиперповерхностью мы будем называть гиперповерхность, на которой тензор кривизны Римана имеет сингулярную составляющую.

В системе координат, непрерывной в окрестности Σ_0, где функция, определяющая Σ_0, выбрана в качестве одной из координат, уравнение гиперповерхности сводится к $n = 0$. Кроме того, без ограничения общности можно считать, что:

$$(N_a N^a)|_{\Sigma_0} = (\partial_a n \partial^a n)|_{\Sigma_0} = g^{nn}|_{\Sigma_0} = \varepsilon.$$

Здесь N^a — нормаль к гиперповерхности, $\varepsilon = -1$ для времениподобной гиперповерхности и 1 для пространственноподобной. Для светоподобной поверхности:

$$(N_a N^a)|_{\Sigma_0} = (\partial_a n \partial^a n)|_{\Sigma_0} = g^{nn}|_{\Sigma_0} = 0.$$

С учетом принятых обозначений метрику во всем пространстве-времени Ω можно формально представить в виде суммы:

$$g_{ab} = g^+_{ab}(x)\,\theta(n) + g^-_{ab}(x)\,\theta(-n). \quad (2)$$

При дифференцировании выражения (2) возникает слагаемое с дельта–функцией:

$$\partial_c g_{ab} = \partial_c g^+_{ab}\theta(n) + \partial_c g^-_{ab}\theta(-n) + \delta^n_c \delta(n)[g_{ab}].$$

Здесь и далее δ^n_c — символ Кронекера, скобки $[g_{ab}] = g^+_{ab} - g^-_{ab}$ обозначают скачок соответствующей величины на поверхности Σ_0.

Если $[g_{ab}] \neq 0$, то δ-функция возникает в символах Кристоффеля. В этом случае δ^2, которая неопределена в теории обобщенных функций, появляется в тензоре кривизны Римана и в лагранжиане как для общей теории относительности так и для квадратичной гравитации.

За счет преобразований координат различных для $\Omega^\pm$ всегда можно сделать тензор g_{ab} непрерывным на Σ_0, что было продемонстрировано, в частности, в работе [27]. Соответственно, как в общей теории относительности, так и в квадратичной гравитации необходимо либо работать в подобной специальной системой координат, либо в явном виде требовать $[g_{ab}] = 0$ для того, чтобы избежать появления δ^2 в лагранжиане.

Если метрика не испытывает скачка на Σ_0, из (2) получается следующее выражение для компонент связности:

$$\Gamma^a_{bc} = \Gamma^{+a}_{bc}\theta(n) + \Gamma^{-a}_{bc}\theta(-n), \quad (3)$$

из которого следует, что:

$$R^a_{bcd} = R^{+a}_{bcd}\,\theta(n) + R^{-a}_{bcd}\,\theta(-n) + \\ + \left(\delta^n_c [\Gamma^a_{bd}] - \delta^n_d [\Gamma^a_{bc}]\right)\delta(n). \quad (4)$$

Для действия Эйнштейна–Гилберта и соответствующего ему уравнения движения выражение (4) для тензора Римана, содержащее дельта–функцию, было бы приемлемым, потому что в этом случае сингулярную часть тензора Римана можно непосредственно связать с поверхностной частью тензора энергии–импульса. Этот факт впервые был продемонстрирован в работах Израэля [17–19]. В квадратичной гравитации для того, чтобы избежать появления неопределенных функций: δ^2 и $\delta(n)\theta(n)$ в лагранжиане, необходимо наложить дополнительные ограничения, а именно, условия Лихнеровича [28]:

$$[\Gamma^a_{bc}] = 0. \quad (5)$$

Рассмотрим ситуацию, когда тензор энергии-импульса полей материи имеет разное поведение в областях $\Omega^\pm$ и сингулярную составляющую непосредственно на Σ_0:

$$T^{ab} = S^{ab}\,\delta(n) + T^{+ab}\,\theta(n) + T^{-ab}\,\theta(-n), \quad (6)$$

где тензор S^{ab} определяется как поверхностный тензор энергии-импульса. В данной постановке задачи предполагается, что T^{ab} не содержит других сингулярных членов, в частности, производных δ–функции.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Основная цель настоящей работы состоит в том, чтобы найти уравнения движения сингулярной светоподобной гиперповерхности в квадратичной гравитации. Для этого необходимо выделить поверхностную часть в системе уравнений, полученных варьированием действия (1) по обратной метрике в случае, когда тензор Римана имеет структуру (4), с (6) в качестве источника.

Компоненты поверхностного тензора энергии–импульса S^{nn} и S^{ni} для квадратичной гравитации в отличии от общей теории относительности в общем случае не равны нулю. Этот факт впервые был отмечен в работах Дж. М. М. Сеновийи [20–25], где S^{nn} и S^{ni} определяются как «внешнее давление» и «внешний поток» соответственно.

В общей теории относительности уравнения поля имеют второй порядок по производным метрического тензора. Появление δ–функции в T^{ab} приводит к ее появлению в тензоре Римана, тогда $[\Gamma^a_{bc}] \neq 0$, в таком случае Σ_0 называется тонкой оболочкой. Уравнения Израэля описывают свзязь скачков компонент связности и их производных с тензором S^{ab}. Если в T^{ab} присутствует только скачок, то соответствующий скачок кривизны описывает ударную гравитационную волну, сопровождаемую ударной волной в веществе.

В квадратичной гравитации уравнения поля имеют четвертый порядок по производным метрического тензора. Если определенные компоненты тензора кривизны непрерывны на Σ_0, то их вторые производные могут содержать не более чем δ-функцию, которой соответствует δ-функция в T_{ab}, тогда Σ_0 — тонкая оболочка. Если же эти компоненты тензора кривизны испытывают скачок на Σ_0, то их вторые производные содержат δ'-функцию, тогда Σ_0 — двойной слой. Уравнения движения двойного слоя в квадратичной гравитации, как уже было отмечено выше, впервые были получены Дж. М. М. Сеновийей. Скачок кривизны, описывающий гравитационную ударную волну, может сопровождаться или не сопровождаться ударной волной в распределении вещества, т.е. в квадратичной гравитации может существовать чисто гравитационная ударная волна.

В силу условий Лихнеровича, необходимых для квадратичной гравитации,тензор Римана и, как следсвие, тензор Риччи и скалярная кривизна могут испытывать не более чем скачок на поверхности Σ_0. В этом случае воспользовавшись тем, что $\theta^2(n) = \theta(n)$ и $\theta(n)\theta(-n) = 0$, подставляя тензор Римана (4) и его светртки в действие (1), получим:

$$S_q = -\frac{1}{16\pi}\int_{\Omega^+}\sqrt{|g|}L_q^+\,d^4x - \frac{1}{16\pi}\int_{\Omega^-}\sqrt{|g|}L_q^-\,d^4x, \tag{7}$$

где $L^+ = \alpha_1 R^+_{abcd}R^{+abcd} + \alpha_2 R^+_{ab}R^{+ab} + \alpha_3 (R^+)^2 + \alpha_4 R^+ + \alpha_5\Lambda$, аналогично определяется L^-.

Варьируя действие (7) по обратной метрике получим [29]:

$$\delta S_q = -\frac{1}{16\pi}\int_{\Omega^+}\sqrt{|g|}\left(H^+_{ab}\delta g^{ab} + \nabla_c V^{+c}\right)d^4x - \\ -\frac{1}{16\pi}\int_{\Omega^-}\sqrt{|g|}\left(H^-_{ab}\delta g^{ab} + \nabla_c (V^{-c})\right)d^4x. \tag{8}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$H^+_{ab} = 2\alpha_1 R^+_{amlp}R_b^{+mlp} - 2(2\alpha_1+\alpha_2)R_d^{+c}R^{+d}_{bac} - 4\alpha_1 R_a^{+c}R^+_{bc} + 2\alpha_3 R^+R^+_{ab} + \alpha_4 R^+_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}L^+ + \\ + (\alpha_2+4\alpha_1)\Box R^+_{ab} + \frac{1}{2}(4\alpha_3+\alpha_2)g_{ab}\Box R^+ - (2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)\nabla_a\nabla_b R^+,$$

$$V^{+c} = \left\{(4\alpha_1+\alpha_2)\nabla^c R^{+bd} + \frac{1}{2}(\alpha_2+4\alpha_3)g^{bd}\nabla^c R^+\right\}\delta g_{bd} - 2\nabla^b\left\{(2\alpha_1+\alpha_2)R^{+cd} + \alpha_3 g^{cd}R^+\right\}\delta g_{bd} + \\ + (\alpha_4+2\alpha_3R^+)(g^{ab}g^{cd} - g^{ac}g^{bd})\nabla_a\delta g_{bd} + \left\{\alpha_2(2g^{cd}R^{+ab} - g^{ac}R^{+bd} - g^{bd}R^{+ac}) - 4\alpha_1 R^{+abcd}\right\}\nabla_a\delta g_{bd}.$$

Аналогичным образом определяются вектор V^{-c} и тензор H^-_{ab}.

По определению, для вывода уравнений движения с помощью принципа наименьшего действия используется вариация с закрепленными концами, т.е. значения динамических переменных фиксированы на границе всего объема интегрирования: $\delta g_{ab} = 0$ на $\partial\Omega$. Соответственно, воспользовавшись теоремой Гаусса-Стокса, получим следующее выражение для δS_q:

$$\delta S_q = -\frac{1}{16\pi}\int_{\Omega^+}\sqrt{|g|}\left(H^+_{ab}\delta g^{ab}\right)d^4x - \\ -\frac{1}{16\pi}\int_{\Omega^-}\sqrt{|g|}\left(H^-_{ab}\delta g^{ab}\right)d^4x + \frac{1}{16\pi}\int_{\Sigma_0}[V^c]\,dS_c.$$

Здесь dS_c — направленный элемент поверхности. В данном случае удобно использовать определение dS_c, которое применимо как для времениподобной (пространственноподобной), так и для светоподобной гиперповерхности:

$$dS_c = \epsilon N_c \sqrt{|g(x^a(y^i))|} d^3y,$$

где $|g(x^a(y^i))|$ — модуль ограничения детерминанта метрики во всем пространстве-времени Ω на Σ_0, $\{y^i\}$ — произвольные внутренние координаты на гиперповерхности. Как и ранее, $\epsilon = -1$ для времениподобной гиперповерхности и 1 для пространственноподобной, но дополнительно ϵ также равно 1 для светоподобной гиперповерхности.

Аналогичным образом вариация действия материи с тензором энергии-импульса (6) разделяется на объемную и поверхностную части:

$$\delta S_m = \frac{1}{2}\int_{\Omega^+} \sqrt{|g|}\left(T^+_{ab}\delta g^{ab}\right) d^4x + \frac{1}{2}\int_{\Omega^-} \sqrt{|g|}\left(T^-_{ab}\delta g^{ab}\right) d^4x - \frac{1}{2}\int_{\Sigma_0} \sqrt{|g(x^a(y^i))|}\left(S^{ab}\delta g_{ab}\right) d^3y.$$

Согласно принципу наименьшего действия: $\delta S = \delta S_q + \delta S_m = 0$. Откуда находим систему уравнений движения:

$$H^{\pm}_{ab} = 8\pi T^{\pm}_{ab}, \tag{9}$$

$$\epsilon[V^c]N_c = 8\pi S^{ab}\delta g_{ab}. \tag{10}$$

Из (10) напрямую выводится аналог уравнения Израэля для квадратичной гравитации. Случай времениподобных и пространственноподобных гиперповерхностей разобран, в частности, в работах [23], [26]. Как уже было указано выше, здесь мы сосредоточимся на рассмотрении светоподобного случая. Тем не менее, прежде чем переходить к определенному типу гиперповерхности, выражение (10) можно существенно упростить.

Так как вариация гравитационной части действия δS_q содержит дивергенцию от вектора V^c, можно утверждать, что сам вектор V^c определен с точностью до прибавления к нему другого вектора, дивергенция от которого равна нулю, помноженного на произвольную константу — $2CU^c$. Как это было продемонстрировано в статье [29], вектор U^c удобно выбрать следующим:

$$U^c = -\nabla^b\left(R^{cd} - \frac{1}{2}g^{cd}R\right)\delta g_{bd} + \left(R^{ab}g^{cd} - R^{bc}g^{ad}\right)\nabla_a\delta g_{bd}.$$

Константу C при этом положим равной $2\alpha_3$, тогда:

$$\widetilde{V}^{+c} = V^{+c} + 4\alpha_3 U^{+c} = \left\{(4\alpha_1+\alpha_2)\nabla^c R^{+bd} + \frac{1}{2}(\alpha_2+4\alpha_3)g^{bd}\nabla^c R^+\right\}\delta g_{bd} - 2(2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)\nabla^b R^{+cd}\delta g_{bd} + (\alpha_4 + 2\alpha_3 R^+)(g^{ab}g^{cd} - g^{ac}g^{bd})\nabla_a\delta g_{bd} + \left\{\alpha_2(2g^{cd}R^{+ab} - g^{ac}R^{+bd} - g^{bd}R^{+ac}) - 4\alpha_1 R^{+abcd}\right\}\nabla_a\delta g_{bd} + 4\alpha_3(R^{+ab}g^{cd} - R^{+bc}g^{ad})\nabla_a\delta g_{bd}\,.$$

Как и до этого, вектора U^{-c},$\widetilde{V}^{-c}$ определяются аналогично.

В координатах $\{x^a\}$: $N_c = \delta^n_c$, поэтому, заменив $V^{\pm c}$ на $\widetilde{V}^{\pm c}$ в (10) получим:

$$\epsilon[\widetilde{V}^n] = 8\pi S^{ab}\delta g_{ab}. \tag{11}$$

Если выполняются условия Лихнеровича, то как следствие: $[\nabla_a\delta g_{bd}] = 0$, поэтому этот множитель можно вынести за скобку при вычислении скачка $[\widetilde{V}^n]$:

$$[\widetilde{V}^n] = \left\{(4\alpha_1+\alpha_2)[\nabla^n R^{bd}] + \frac{1}{2}(\alpha_2+4\alpha_3)g^{bd}[\nabla^n R] - 2(2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)[\nabla^b R^{nd}]\right\}\delta g_{bd} + \left\{2\alpha_3[R](g^{ab}g^{nd} - g^{an}g^{bd}) + \alpha_2(2g^{nd}[R^{ab}] - g^{an}[R^{bd}] - g^{bd}[R^{an}])\right\}\nabla_a\delta g_{bd} + \left\{4\alpha_3([R^{ab}]g^{nd} - [R^{bn}]g^{ad}) - 4\alpha_1[R^{abnd}]\right\}\nabla_a\delta g_{bd}. \tag{12}$$

Для того, чтобы преобразовать вектор $[\widetilde{V}^n]$, выпишем выражения для скачков компонент тензора Римана и его сверток, имея в виду, что скачки присутствуют только в тех величинах, которые содержат производные от метрики по координате n, начиная с производной второго порядка, так как скачки первых производных метрики равны нулю в силу условий Лихнеровича:

$$[R_{iklm}] = \frac{1}{2}\left(\delta_k^n \delta_l^n [\partial^2_{nn} g_{im}] + \delta_i^n \delta_m^n [\partial^2_{nn} g_{kl}] - \delta_i^n \delta_l^n [\partial^2_{nn} g_{km}] - \delta_k^n \delta_m^n [\partial^2_{nn} g_{il}]\right), \tag{13}$$

$$R^{ab} = \frac{1}{2}\left(g^{an} g^{bn} g^{cd} + g^{nn} g^{ac} g^{bd} - g^{an} g^{bd} g^{cn} - g^{bn} g^{ad} g^{cn}\right) [\partial^2_{nn} g_{cd}], \tag{14}$$

$$[R] = \left(g^{nn} g^{cd} - g^{cn} g^{dn}\right) [\partial^2_{nn} g_{cd}]. \tag{15}$$

Множитель в $[\widetilde{V}^n]$ при $\nabla_a \delta g_{bd}$ (обозначим его A^{abd}) требует более детального рассмотрения, с учетом соотношений (13-15) получим:

$$\begin{aligned} A^{abd} = -(\alpha_2 + 4\alpha_3) g^{an} g^{bd} [R_{nn}^{n\ \ n}] + (\alpha_2 + 4\alpha_3) g^{an} (g^{bn} g^{dn} - g^{bd} g^{nn}) [R_{nn}] + \\ + 2(2\alpha_1 + 2\alpha_3 + \alpha_2) g^{nb} g^{nd} [R_{nn}^{n\ \ a}] + 4(\alpha_3 - \alpha_1) g^{an} g^{dn} [R_{n\ \ n}^{\ bn}] + \\ + 2(2\alpha_1 + 2\alpha_3 + \alpha_2) g^{nn} g^{nd} [R_{n\ n}^{\ b\ a}] - (\alpha_2 + 4\alpha_1) g^{nn} g^{na} [R_{n\ n}^{\ b\ d}] = \\ = -\frac{1}{2}(\alpha_2 + 4\alpha_3) g^{an} g^{bd} [R] + 2(2\alpha_1 + 2\alpha_3 + \alpha_2) g^{nd} [R^{ab}] - (\alpha_2 + 4\alpha_1) g^{an} [R^{bd}]. \end{aligned} \tag{16}$$

Для того, чтобы выполнить следующую операцию с A^{abd}, необходимо вернуться к интегрированию A^{abd} в составе $[\widetilde{V}^c]$ по гиперповерхности Σ_0:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_0} \left(A^{abd} \nabla_a \delta g_{bd}\right) \sqrt{|g(x^a(y^i))|} d^3y = \int_{\Sigma_0} \left(-\nabla_i A^{ibd} \delta g_{bd} + A^{nbd} \nabla_n \delta g_{bd}\right) \sqrt{|g(x^a(y^i))|} d^3y + \\ + \int_{\Sigma_0} \nabla_i \left(A^{ibd} \delta g_{bd}\right) \sqrt{|g(x^a(y^i))|} d^3y = \int_{\Sigma_0} \left((-\nabla_a A^{abd} + \nabla_n A^{nbd}) \delta g_{bd}\right) \sqrt{|g(x^a(y^i))|} d^3y + \\ + \int_{\Sigma_0} \left(A^{nbd} \nabla_n \delta g_{bd}\right) \sqrt{|g(x^a(y^i))|} d^3y + \int_{\Sigma_0} \nabla_i \left(A^{ibd} \delta g_{bd}\right) \sqrt{|g(x^a(y^i))|} d^3y, \quad i \neq n. \end{aligned}$$

Покажем, что интеграл $\int_{\Sigma_0} \nabla_i \left(A^{ibd} \delta g_{bd}\right) \sqrt{|g(x^a(y^i))|} d^3y$ равен нулю. Так как выражение под знаком интеграла представляет из себя полную дивергенцию на гиперповерхности Σ_0 от некоторого вектора, в силу теоремы Гаусса-Стокса, этот интеграл сводится к интегралу по границе гиперповерхности Σ_0, которая является частью границы всего рассматриваемого пространства-времени $\partial\Omega$, где $\delta g_{bd} = 0$.

С учетом всего вышеперечисленного, уравнение (11) можно привести к виду:

$$\begin{aligned} (\alpha_2 + 4\alpha_1) \left\{2[\nabla^n R^{bd}] - g^{nn} [\nabla_n R^{bd}]\right\} \delta g_{bd} + \frac{1}{2}(\alpha_2 + 4\alpha_3) g^{bd} \left\{2[\nabla^n R] - g^{nn} [\nabla_n R]\right\} \delta g_{bd} - \\ - (\alpha_2 + 2\alpha_1 + 2\alpha_3) \left\{2g^{ib} [\nabla_i R^{nd}] + g^{nd} [\nabla^b R]\right\} \delta g_{bd} + \\ + \left(-\frac{1}{2}(\alpha_2 + 4\alpha_3) g^{nn} g^{bd} [R] + (2\alpha_1 + 2\alpha_3 + \alpha_2) g^{nd} g^{bn} [R] - (\alpha_2 + 4\alpha_1) g^{nn} [R^{bd}]\right) \nabla_n \delta g_{bd} = \\ = 8\pi\epsilon S^{ab} \delta g_{ab}, \quad i \neq n. \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь необходимо отметить, что при выводе 17, помимо всего прочего, было использовано соотношение, которое является следствием (13-15):

$$[R^{nb}] = \frac{1}{2} g^{nb} [R]. \tag{18}$$

Рассмотрим подробнее множитель при $\nabla_n \delta g_{bd}$, покажем, что он равен нулю, если хотя бы один из индексов b или d равен n:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(\alpha_2 + 4\alpha_3) g^{nn} g^{bn} [R] + (2\alpha_1 + 2\alpha_3 + \alpha_2) g^{nn} g^{bn} [R] - \\ -(\alpha_2 + 4\alpha_1) g^{nn} [R^{bn}] = \frac{1}{2}(\alpha_2 + 4\alpha_3) g^{nn} (g^{bn} [R] - 2[R^{bn}]) = 0. \end{aligned}$$

В последнем равенстве мы воспользовались соотношением (18).

Как отмечено в публикации [26], с одной стороны, вариация производных метрики $\delta(\partial_n g_{ij})$ на Σ_0 не является независимой относительно вариаций компонент метрики δg_{ij} на гиперповерхности, с другой стороны, в некотором смысле отношение между ними произвольно, так как уравнения движения в квадратичной гравитации четвертого порядка по производным метрического тензора, поэтому их решения не определяются однозначно заданием начальных условий на компоненты метрики и их первые производные на некоторой гиперповерхности Коши. Таким образом, мы вынуждены требовать:

$$\delta(\partial_n g_{ij}) = B^{kl}_{ij}(y)\delta g_{kl}, \quad i,j,l,k \neq n,$$

где $B^{kl}_{ij}(y)$ — произвольные функции.

Появление произвольных функций апосредовано связано с присутствием производной δ–функции в уравнениях движения и фактически является маркером двойного слоя.

С учетом всего вышеперечисленного, уравнения движения двойного слоя произвольного типа в квадратичной гравитации имеют вид:

$$2(\alpha_3-\alpha_1)\left(g^{nn}[\partial^n R]-2[\nabla^n R^{nn}]\right)+\frac{1}{2}(\alpha_2+4\alpha_3)g^{nn}\left(2[\nabla_n R^{nn}]-g^{nn}[\partial_n R]\right)=8\pi\epsilon S^{nn}, \tag{19}$$

$$\begin{aligned}&(\alpha_2+6\alpha_1-2\alpha_3)[\nabla^n R^{ni}]+2(\alpha_3-\alpha_1)g^{nn}[\nabla_n R^{ni}]+\frac{1}{2}(\alpha_2+6\alpha_3-2\alpha_1)g^{ni}[\partial^n R]-\\&\quad-(\alpha_2+2\alpha_1+2\alpha_3)\left([\nabla^i R^{nn}]-g^{ni}[\nabla_n R^{nn}]+\frac{1}{2}g^{nn}[\partial^i R]+g^{ni}g^{nj}\Gamma^n_{nj}[R]\right)+\\&\quad+\frac{1}{2}(\alpha_2+4\alpha_3)g^{nn}\left(g^{ij}\Gamma^n_{nj}[R]-g^{ni}[\partial_n R]\right)+(\alpha_2+4\alpha_1)g^{nn}\Gamma^n_{nj}[R^{ij}]=8\pi\epsilon S^{ni},\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}&(\alpha_2+4\alpha_1)\left\{2[\nabla^n R^{ij}]-g^{nn}[\nabla_n R^{ij}]+g^{nn}\Gamma^j_{nk}[R^{ik}]+g^{nn}\Gamma^i_{nk}[R^{jk}]-g^{nn}B^{ij}_{kl}(y)[R^{kl}]\right\}+\\&+\frac{1}{2}(\alpha_2+4\alpha_3)\left\{2g^{ij}[\partial^n R]-g^{nn}g^{ij}[\partial_n R]+g^{nn}g^{ik}\Gamma^j_{nk}[R]+g^{nn}g^{jk}\Gamma^i_{nk}[R]-g^{nn}g^{kl}B^{ij}_{kl}(y)[R]\right\}+\\&+(\alpha_2+2\alpha_1+2\alpha_3)\left\{g^{ni}[\nabla_n R^{nj}]+g^{nj}[\nabla_n R^{ni}]-[\nabla^i R^{nj}]-[\nabla^j R^{ni}]-\frac{1}{2}g^{ni}[\partial^j R]-\frac{1}{2}g^{nj}[\partial^i R]\right\}+\\&+(\alpha_2+2\alpha_1+2\alpha_3)[R]\left\{-g^{ni}g^{nk}\Gamma^j_{nk}-g^{nj}g^{nk}\Gamma^i_{nk}+g^{nk}g^{nl}B^{ij}_{kl}(y)\right\}=8\pi\epsilon S^{ij},\ i,j,k,l\neq n.\end{aligned} \tag{21}$$

Для светоподобного двойного слоя систему уравнений (19-21) можно значительно упростить:

$$-4(\alpha_3-\alpha_1)g^{ni}[\nabla_i R^{nn}]=-4(\alpha_3-\alpha_1)g^{ni}[\nabla_i(N_aN_bR^{ab})]=-4(\alpha_3-\alpha_1)g^{ni}\partial_i[R^{nn}]=0=8\pi S^{nn}, \tag{22}$$

$$(\alpha_2+6\alpha_1-2\alpha_3)g^{nj}[\nabla_j R^{ni}]+\frac{1}{2}(\alpha_2+6\alpha_3-2\alpha_1)g^{ni}g^{nj}[\partial_j R]-(\alpha_2+2\alpha_1+2\alpha_3)g^{ni}g^{nj}\Gamma^n_{nj}[R]=8\pi S^{ni}, \tag{23}$$

$$\begin{aligned}&2(\alpha_2+4\alpha_1)g^{nk}[\nabla_k R^{ij}]+(\alpha_2+4\alpha_3)g^{nk}g^{ij}[\partial_k R]-\\&\quad-(\alpha_2+2\alpha_1+2\alpha_3)\left\{g^{ik}[\nabla_k R^{nj}]+g^{jk}[\nabla_k R^{ni}]+\frac{1}{2}g^{ni}[\partial^j R]+\frac{1}{2}g^{nj}[\partial^i R]\right\}+\\&\quad+(\alpha_2+2\alpha_1+2\alpha_3)[R]\left\{-g^{ni}g^{nk}\Gamma^j_{nk}-g^{nj}g^{nk}\Gamma^i_{nk}+g^{nk}g^{nl}B^{ij}_{kl}(y)\right\}=8\pi S^{ij},\\&\qquad i,j,k,l\neq n.\end{aligned} \tag{24}$$

Стоит отметить, что из уравнения (22) следует, что S^{nn} равен нулю в любой системе координат, так как это скаляр: $S^{nn}=N_aN_bS^{ab}$. Этот факт означает отсутствие «внешнего давления» для любой светоподобной сингулярной гиперповерхности.

При выводе уравнений (19-21) гиперповерхность Σ_0 считалась заданной априори, но при работе с приложениями возникает обратная задача, когда решения уравнений движения в областях $\Omega^\pm$ — $g^\pm_{ab}$ известны, и требуется найти уравнение гиперповерхности, на которой происходит сшивка. В этом случае уравнения с S^{nn} и S^{ni} в правой части вместе с условиями Лихнеровича необходимы для определения гиперповерхности Σ_0, тогда как остальные уравнения с S^{ij} в правой части служат для определения «произвольных» функций $B^{ij}_{kl}(y)$.

Для тонких оболочек картина иная. Основными критерием того, что Σ_0 представляет из себя тонкую оболочку, а не двойной слой, является отсутствие произвольных функций в уравнениях движения гиперповерхности. Для времениподобного и пространственноподобного случаев этот критерий сводится к отсутствию скачков в тензоре Риччи: $[R^{bd}] = 0$. Для светоподобной гиперповерхности это отсутствие скачков в скалярной кривизне $[R] = 0$. При этом скачок $[R_{nn}]$ может быть ненулевым, так как $g^{nn}|_{\Sigma_0} = 0$ для светоподобной гиперповерхности. Можно показать, что из равенства нулю соответствующих скачков для любого типа гиперповерхностей помимо отсутсвия произвольных функций также следует, что $S^{nn} = S^{ni} = 0$.

Таким образом, уравнения движения времениподобной и пространственноподобной тонких оболочек являются частным случаем системы (19-21), для которого выполняется дополнительное условие $[R^{bd}] = 0$:

$$S^{nn} = S^{ni} = 0,$$

$$(\alpha_2 + 4\alpha_1)g^{nn}[\nabla_n R^{ij}] + \frac{1}{2}(\alpha_2 + 4\alpha_3)g^{nn}g^{ij}[\partial_n R]-$$
$$-(\alpha_2 + 2\alpha_1 + 2\alpha_3)g^{ni}g^{nj}[\partial_n R] = 8\pi\varepsilon S^{ij}, \quad i, j \neq n. \tag{25}$$

Аналогично для светоподобных тонких оболочек получим:

$$S^{nn} = S^{ni} = 0,$$

$$2(\alpha_2 + 4\alpha_1)g^{nk}[\nabla_k R^{ij}] - (\alpha_2 + 2\alpha_1 + 2\alpha_3)\times$$
$$\times \left\{g^{ik}[\nabla_k R^{nj}] + g^{jk}[\nabla_k R^{ni}] + g^{nj}g^{ni}[\partial_n R]\right\} = 8\pi\varepsilon S^{ij},$$
$$i, j, k \neq n. \tag{26}$$

Кроме того, далее будет продемонстрировано, что для светоподобной гиперповерхности условие $[R] = 0$ выполняется для случая, когда Σ_0 является как минимум локально слоем некоторого светоподобного слоения Ω.

3. УСЛОВИЯ СШИВКИ. СВЕТОПОДОБНЫЙ СЛУЧАЙ

Как уже было отмечено ранее, для того, чтобы избежать появления неопределенных функций в лагранжиане, необходимо обеспечить непрерывность компонент метрики на рассматриваемой гиперповерхности. Этого всегда можно добиться подбором соответствующих координат. Так для времениподобных и пространственноподобных гиперповерхностей как правило удобно использовать гауссовы нормальные координаты. В публикации [27] было продемонстрировано, что для данного типа сингулярных гиперповерхностей всегда возможно состыковать две различные гауссовы нормальные системы координат из областей $\Omega^{\pm}$ на рассматриваемой гиперповерхности таким образом, чтобы скачки компонент метрики были равны нулю.

Для светоподобных гиперповерхностей существуют некоторые аналоги гауссовых нормальных координат, такие как гауссовы светоподобные координаты (GNC) [30]–[32] или координаты для слоения рассматриваемого многообразия светоподобными гиперповерхностями (NSFC) [33]–[35]. Тем не менее, в настоящей работе был использован более минималистичный подход, не предполагающий дополнительной информации относительно поведения нормального векторного поля гиперповерхности вне Σ_0. С помощью формализма, описанного в книге Э. Пуассона [36], были найдены непрерывные в окрестности гиперповерхности координаты, в которых метрика непрерывна на по крайней мере непосредственно на Σ_0. Далее приведено краткое описание этого процесса.

Рассмотрим светоподобную гиперповерхность Σ_0, заданную в областях $\Omega^{\pm}$ с различными координатами $\{x^{\pm}\}$ уравнениями: $n^{\pm}(x^{\pm}) = 0$. Нормальное векторное поле к гиперповерхности определяется соотношением: $N_{\pm a} = \partial_a n^{\pm}(x^{\pm})$. Временно опустим обозначения $\pm$ для удобства и будем записывать все уравнения в одной из областей.

В случае светоподобной гиперповерхности, норма $N^a N_a$ равна нулю на Σ_0, поэтому вектор нормали определен с точностью до умножения на произвольную скалярную функцию. Так как вектор N^a — светоподобный на Σ_0, он одновременно является касательным к рассматриваемой поверхности.

Покажем, что векторное поле N^a на гиперповерхности является касательным к семейству светоподобных геодезических, которые лежат на Σ_0:

$$\nabla_b N_a N^b = \nabla_{ab} n \partial^b n = \nabla_{ba} n \partial^b n = \frac{1}{2}\nabla_a \left(N_b N^b\right).$$

Скаляр $N^a N_a$ равен нулю на всей Σ_0, поэтому его градиент направлен вдоль N_a, тогда

$$\nabla_b N_a N^b = \kappa N_a,$$

где κ — некоторый скаляр.

Таким образом, N^a на гиперповерхности является касательным к светоподобным геодезическим, которые лежат на Σ_0 и являются ее генераторами.

Выберем произвольный (не обязательно афинный) параметр λ на вышеуказаных светоподобных генераторах гипеповерхности и две дополнительные координаты — $\theta^A, A = 2, 3$ для маркировки геодезических, вместе они образуют систему внутренних координат $y^i = \{\lambda, \theta^A\}$ гиперповерхности. Параметр λ является афинным, если уравнение $n(x) = const$ задает целое семейство светоподобных гиперповерхностей, в этом случае функция $\partial_b n \partial^b n$ равна нулю не только на гиперповерхности, но как минимум в некоторой ее окрестности.

Вычислим индуцированную метрику на рассматриваемой гиперповерхности:

$$ds^2_{\Sigma_0} = g_{ab}dx^a(y^i)dx^b(y^j) = g_{ab}e^a_i e^b_j dy^i dy^j, \quad e^a_i = \frac{\partial x^a}{\partial y^i}.$$

Векторные поля e^a_i являются касательными к кривым, лежащим на гиперповерхности, поэтому на Σ_0

они ортогональны нормали:

$$N_a e^a_A = 0, \quad N_a e^a_1 = N_a \frac{\partial x^a}{\partial \lambda} = N_a N^a = 0.$$

Из этих же соотношений следует, что индуцированная метрика на светоподобной гиперповерхности Σ_0 является эффективно двумерной:

$$ds^2_{\Sigma_0} = g_{ab} e^a_A e^b_B d\theta^A d\theta^B = \sigma_{AB} d\theta^A d\theta^B.$$

Систему векторных полей $\{N^a, e^a_A\}$ можно дополнить до базиса в ограничении векторного расслоения многообразия Ω на гиперповерхность — $T\Omega|_{\Sigma_0}$, если найти вспомогательное светоподобное векторное поле l^a со следующими свойствами:

$$l^a N_a = 1, \quad l_a e^a_A = 0, \quad l^a l_a = 0.$$

Существование такого вектора, а также полнота системы векторных полей $\{l^a, N^a, e^a_A\}$ в $T\Omega|_{\Sigma_0}$ продемонстрированы в вышеупомянутой работе [36], а также в публикации [37], где вводится обобщение векторов подобного типа (rigging vector) для сингулярных гиперповерхностей смешанного каузального характера.

Так как векторые поля $\{l^a, N^a, e^a_A\}$ образуют базис в $T\Omega|_{\Sigma_0}$, возможно записать соотношение полноты для обратной метрики:

$$g^{ab} = l^a N^b + l^b N^a + \sigma^{AB} e^a_A e^b_B. \tag{27}$$

Выберем в качестве локальных координат в окрестности гиперповерхности $\{n, \lambda, \theta^A\}$. В этих координатах на Σ_0 выполняются соотношения:

$$\begin{gathered} N_a = \delta^n_a, \quad N^a = \frac{\partial x^a(y^i)}{\partial \lambda} = \delta^a_\lambda, \\ l_\lambda = l^n = 1, \quad l_n = -l^\lambda, \quad l_A = 0. \end{gathered} \tag{28}$$

С учетом (27), в этих координатах обратная метрика имеет следующую структуру на гиперповерхности:

$$\begin{gathered} g^{n\lambda} = 1, \quad g^{nn} = g^{nA} = 0, \quad g^{\lambda\lambda} = 2\, l^\lambda, \\ g^{\lambda A} = l^A, \quad g^{AB} = \sigma^{AB}. \end{gathered} \tag{29}$$

Тогда для тензора g_{ab}, обратного к g^{ab} получим:

$$\begin{gathered} g_{n\lambda} = 1, \quad g_{\lambda\lambda} = g_{\lambda A} = 0, \quad g_{nn} = -2\, l^\lambda + \sigma_{AB} l^B l^A, \\ g_{nA} = -\sigma_{AB} l^B, \quad g_{AB} = \sigma_{AB}. \end{gathered} \tag{30}$$

Необходимо отметить, что соотношения (29,30) выполняются только на Σ_0, т.е. при $n = 0$, это означает,в частности, что вторые производные по n от $g_{n\lambda}, g_{\lambda\lambda}, g_{\lambda A}$ и их скачки на Σ_0 в общем случае ненулевые. Скачки первых производных по n приняты равными нулю в силу условий Лихнеровича. Подобный вид метрики распространяется и на окрестность Σ_0, только если векторное поле $\partial_a n(x)$ является светоподобным в некоторой окрестности Σ_0, а не только при $n = 0$, но даже в этом случае: $\partial^2_{nn}\, g_{\lambda n} \neq 0$.

Общая для $\Omega^\pm$ система координат с необходимыми свойствами строится следующим образом: n^+ и n^- можно непрерывно объединить в координату n и выбрать y^{+i} или y^{-i} в качестве оставшихся координат. Непрерывность компонент метрики на Σ_0 обеспечивается соотношениями (29) и соответствующим подбором функций $y^{+i}(y^{-j})$.

Далее перейдем к анализу уравнений (22-24,26) в координатах $\{n, \lambda, \theta^A\}$. Вычислим скачки, присутствующие в данных уравнениях:

$$[R] = 2\,[R^n_{nn}{}^n] = [\partial^2_{nn} g_{\lambda\lambda}], \quad [\partial_i R] = [\partial_i \partial^2_{nn} g_{\lambda\lambda}], \tag{31}$$

$$[R^{ab}] = \frac{1}{2}\left(\delta^a_\lambda\, g^{bc}\,[\partial^2_{nn} g_{c\lambda}] + \delta^b_\lambda\, g^{ac}\,[\partial^2_{nn} g_{c\lambda}] - \delta^a_\lambda\, \delta^b_\lambda\, g^{cd}\,[\partial^2_{nn} g_{cd}]\right), \tag{32}$$

$$[\nabla_\lambda R^{bd}] = \partial_\lambda [R^{bd}] + \delta^b_\lambda \left(\Gamma^\lambda_{\lambda\lambda}[R^{\lambda d}] + \Gamma^d_{\lambda A}[R^{\lambda A}] + \frac{1}{2}\Gamma^d_{\lambda n}\,[R]\right) + \delta^d_\lambda \left(\Gamma^\lambda_{\lambda\lambda}[R^{\lambda b}] + \Gamma^b_{\lambda A}[R^{\lambda A}] + \frac{1}{2}\Gamma^b_{\lambda n}\,[R]\right), \tag{33}$$

$$[\nabla_i R^{nd}] = \frac{1}{2}\,\delta^d_\lambda\left(\partial_i[R] + \Gamma^n_{in}\,[R] + 2\,\Gamma^n_{iA}\,[R^{\lambda A}]\right) + \frac{1}{2}\,\Gamma^d_{i\lambda}\,[R]. \tag{34}$$

С учетом всего вышеперечисленного, получим уравнения для светоподобного двойного слоя в координатах $\{n, \lambda, \theta^A\}$:

$$S^{nn} = 0, \tag{35}$$

$$\begin{aligned} &2(\alpha_2 + 4\alpha_1)[\nabla_\lambda R^{\lambda\lambda}] + (\alpha_2 + 4\alpha_3) g^{\lambda\lambda}[\partial_\lambda R] - \\ &\qquad - (\alpha_2 + 2\alpha_1 + 2\alpha_3)\left(2 g^{\lambda i}[\nabla_i R^{\lambda n}] + [\partial^\lambda R] + 2\Gamma^\lambda_{\lambda n}[R] - B^{\lambda\lambda}[R]\right) = 8\pi\, S^{\lambda\lambda}, \end{aligned} \tag{36}$$

$$(\alpha_2 - 2\alpha_3 + 6\alpha_1)[\nabla_\lambda R^{\lambda n}] + \frac{1}{2}(\alpha_2 - 2\alpha_1 + 6\alpha_3)[\partial_\lambda R] - (\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_1)\Gamma^n_{\lambda n}[R] = 8\pi\, S^{n\lambda}, \tag{37}$$

$$\begin{aligned} &2(\alpha_2 + 4\alpha_1)[\nabla_\lambda R^{\lambda A}] + (\alpha_2 + 4\alpha_3) g^{\lambda A}[\partial_\lambda R] - \\ &- \frac{1}{2}(\alpha_2 + 2\alpha_1 + 2\alpha_3)\left(2g^{iA}[\nabla_i R^{\lambda n}] + [\partial^A R] + g^{\lambda B}\Gamma^A_{\lambda B}[R] + 2\Gamma^A_{\lambda n}[R] - 2B^{\lambda A}[R]\right) = 8\pi\, S^{\lambda A}, \end{aligned} \tag{38}$$

$$(\alpha_2 + 4\alpha_3)\sigma^{AB}[\partial_\lambda R] - (\alpha_2 + 2\alpha_1 + 2\alpha_3)[R](\sigma^{AC}\Gamma^B_{C\lambda} - B^{AB}) = 8\pi\, S^{AB}. \tag{39}$$

Разберем важный частный случай, когда векторное поле $\partial_a n(x)$ является светоподобным в некоторой окрестности Σ_0. Тогда из (31-34) следует, что:

$$[R] = [R^{\lambda A}] = [\partial_i R] = [\nabla_i R^{nd}] = 0, \tag{40}$$

$$[\nabla_\lambda R^{bd}] = \delta^b_\lambda\, \delta^d_\lambda\, [\partial_\lambda R^{\lambda\lambda}]. \tag{41}$$

Таким образом, он соответствует сценарию тонкой светоподобной оболочки, уравнение для которой в координатах $\{n, \lambda, \theta^A\}$ выглядит как:

$$2(\alpha_2 + 4\alpha_1)[\partial_\lambda R^{\lambda\lambda}] - (\alpha_2 + 2\alpha_1 + 2\alpha_3)[\partial_n R] = 8\pi\, S^{\lambda\lambda}. \tag{42}$$

4. СФЕРИЧЕСКИ–СИММЕТРИЧНЫЕ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

Исследуем частный случай светоподобных сингулярных гиперповерхностей — сферически-симметричные светоподобные гиперповерхности, разделяющие два сферически-симметричных пространства-времени. Далее будет продемонстрировано, что такие сингулярные гиперповерхности могут быть только тонкими оболочками.

Рассмотрим сферически–симметричную метрику наиболее общего вида:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \gamma_{\alpha\beta}(x)\, dx^\alpha dx^\beta - r^2(x)\, d\Omega^2 = \\ &= r^2(x)\left(\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta}(x)\, dx^\alpha dx^\beta - d\Omega^2\right), \quad \alpha, \beta = 0, 1. \end{aligned} \tag{43}$$

Для геометрии такого типа выполняются следующие соотношения:

$$R_{\theta\theta} = 1 + r\sigma + \Delta, \quad R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta}\, \sin^2\theta, \tag{44}$$

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\gamma_{\alpha\beta}}{r^2}\left(\frac{1}{2}\,\widetilde{R} + \Delta - r\,\sigma\right) - \frac{2}{r}\,\nabla_\alpha\nabla_\beta\, r, \tag{45}$$

$$R = \frac{1}{r^2}\left(\widetilde{R} - 2 - 6\, r\, \sigma\right), \tag{46}$$

где Δ, σ, $\widetilde{R}$ — инварианты сферической геометрии:

$$\Delta = \gamma^{\alpha\beta}\, \partial_\alpha r\, \partial_\beta r, \quad \sigma = \gamma^{\alpha\beta}\, \nabla_\alpha\nabla_\beta\, r\,, \tag{47}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{R} = &\frac{1}{\widetilde{\gamma}}\left(-\partial^2_{11}\widetilde{\gamma}_{00} + 2\partial^2_{01}\widetilde{\gamma}_{01} - \partial^2_{00}\widetilde{\gamma}_{11}\right) + \frac{1}{2\widetilde{\gamma}^2}\left(\widetilde{\gamma}_{11}\left(\partial_1\widetilde{\gamma}_{00}\right)^2 + \widetilde{\gamma}_{00}\left(\partial_0\widetilde{\gamma}_{11}\right)^2\right) + \\ &+ \frac{1}{2\widetilde{\gamma}^2}\left(\partial_1\widetilde{\gamma}_{00}\left(-\partial_0\widetilde{\gamma}_{11}\,\widetilde{\gamma}_{10} + \partial_1\widetilde{\gamma}_{11}\,\widetilde{\gamma}_{00} - 2\partial_1\widetilde{\gamma}_{01}\,\widetilde{\gamma}_{10}\right) + \partial_0\widetilde{\gamma}_{11}\left(\partial_0\widetilde{\gamma}_{00}\,\widetilde{\gamma}_{11} - 2\,\partial_0\widetilde{\gamma}_{10}\,\widetilde{\gamma}_{10}\right)\right) + \\ &+ \frac{1}{2\widetilde{\gamma}^2}\left(\partial_0\widetilde{\gamma}_{00}\left(\partial_1\widetilde{\gamma}_{11}\,\widetilde{\gamma}_{01} - 2\,\partial_1\widetilde{\gamma}_{10}\,\widetilde{\gamma}_{11}\right) - 2\,\partial_0\widetilde{\gamma}_{10}\left(\partial_1\widetilde{\gamma}_{11}\,\widetilde{\gamma}_{00} - 2\,\partial_1\widetilde{\gamma}_{10}\,\widetilde{\gamma}_{10}\right)\right). \end{aligned} \tag{48}$$

Здесь $\widetilde{R}$ и $\widetilde{\gamma}$ — детерминант и скалярная кривизна $\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta}$ соответственно.

Для любой сферически-симметричной светоподобной гиперповерхности в геометрии (44), заданной уравнением $n(x) = 0$, верно следующее:

$$\gamma_{00}\left(\partial^0 n(x)\right)^2 + 2\gamma_{01}\,\partial^0 n(x)\,\partial^0 n(x) + \gamma_{11}\left(\partial^1 n(x)\right)^2 = 0.$$

Если данное уравнение возможно разрешить относительно переменной $\frac{\partial^0 n(x)}{\partial^1 n(x)}$ или обратной величины при любых значениях x, это означает, что функция $n(x)$ задает целое семейство светоподобных гиперповерхностей $n(x) = const$, т.е. векторное поле $\partial^\alpha n(x)$ является светоподобным как минимум в некоторой окрестности гиперповерхности. Так как это квадратное уравнение относительно указанной переменной, для того чтобы оно всегда имело хотя бы одно решение необходима неотрицательность $-\gamma$, но данное условие выполняется для любой лоренцевой сферически-симметричной метрики везде, где детерминант γ существует.

Таким образом было показано, что светоподобная сферически-симметричная сингулярная гиперповерхность в сферически-симметричной геометрии может быть только тонкой оболочкой.

Используем определенные в предыдущем разделе специальные координаты $\{n, \lambda, \theta, \phi\}$ для описания сферически-симметричной светоподобной тонкой оболочки. В этих координатах метрика в окрестности Σ_0 имеет вид:

$$ds^2 = g_{nn}(n,\lambda)\, dn^2 + 2g_{n\lambda}(n,\lambda)\, dn\, d\lambda - r^2(n,\lambda)\, d\Omega^2 \tag{49}$$

Уравнение (42), описывающее динамику светоподобной тонкой оболочки, в данном случае возможно переписать с помощью представленных выше инвариантов и их производных по n:

$$2(\alpha_2 + 4\alpha_1)[\partial_n \Delta] - (\alpha_2 + 2\alpha_1 + 2\alpha_3)[\partial_n \widetilde{R}] + \\ + 4r\,(\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_1)[\partial_n \sigma] = 8\pi\, r^2\, S_n^{\lambda} \tag{50}$$

Домножив обе части на $\partial_\lambda r$, получим полностью инвариантную форму уравнения движения:

$$2(\alpha_2{+}4\alpha_1)[g^{ab}\partial_a r\, \partial_b \Delta]-(\alpha_2{+}2\alpha_1{+}2\alpha_3)[g^{ab}\partial_a r\, \partial_b \widetilde{R}]+ \\ + 4r\,(\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_1)[g^{ab}\partial_b r\, \partial_n \sigma] = 8\pi\, r^2\, S_n^a\, \partial_a r. \tag{51}$$

Условия Лихнеровича также можно выразить через инварианты:

$$[\Delta] = 0, \quad [\widetilde{R}] = 0. \tag{52}$$

Здесь необходимо пояснить, что соотношения (52) обеспечивают отсутствие скачков: $[\partial_n g_{n\lambda}], [\partial_n r]$, тогда как для метрики вида (49) необходимо также требовать: $[\partial_n g_{nn}] = 0$. Это условие может быть удовлетворено, если добавить $[\sigma] = 0$ к (52), но в этом нет необходимости, так как в соответствии с (46) оно автоматически следует из условий Лихнеровича (52) и непрерывности скалярной кривизны. Строго говоря, эти два ограничения $[\widetilde{R}] = 0$ и $[\sigma] = 0$ взаимозаменяемы для данного случая.

Особенность светоподобных сферически-симметричных тонких оболочек заключается в том, что общий вид уравнения самой гиперповерхности известен, тогда как условия Лихнеровича (52) вместе с (50) накладывают определенные ограничения на сшиваемые метрики и поверхностный тензор энергии-импульса. Далее поясним этот факт на некоторых примерах.

Любую сферически-симметричную метрику с помощью преобразований координат возможно привести к виду:

$$ds^2 = 2H(u,v)\, du dv - r^2(u,v)\, d\Omega^2.$$

Так как он сохраняется при заменах координат типа: $u \to \widetilde{u}(u)$, $v \to \widetilde{v}(v)$ или при замене u на v, без ограничения общности можно считать, что гиперповерхность в областях $\Omega^{\pm}$ задана уравнениями $u^{\pm} = 0$. Таким образом, $n^{\pm} = u^{\pm}$, а координаты $\lambda^{\pm}$ зависят только от $v^{\pm}$ и определяются соотношениями: $d\lambda = H(o,v)\, dv$. Связь координат $\lambda^{\pm}$ для областей $\Omega^{\pm}$ определяется из условия непрерывности метрики на гиперповерхности, так как $H^{\pm}(0,\lambda^{\pm}) = 1$, остается только одно уравнение: $r^+(0,\lambda^+) = r^-(0,\lambda^-)$, которое также определяет связь между исходными координатами $v^+(v^-)$. Условия Лихнеровича накладывают ограничения функции $r^{\pm}$, $H^{\pm}$ при $u^{\pm} = 0$:

$$\partial_{u^+} r^+(0, v^+(v^-)) = \partial_{u^-} r^-(0, v^-),$$
$$\partial_{u^+} H^+(0, v^+(v^-)) = \partial_{u^-} H^-(0, v^-).$$

Инвариантная форма уравнений (52) в некоторых случаях позволяет определить, возможна ли сшивка с помощью светоподобной гиперповерхности для рассматриваемых $\Omega^{\pm}$, не прибегая к специальным координатам $\{n, \lambda\}$. Например, для класса метрик: $f(r)\, dt^2 - f^{-1}(r)\, dr^2 - r^2\, d\Omega^2$, где $\Delta = -f(r)$, из непрерывности Δ и r на гиперповерхности следует, что $r = r_0 = \mathrm{const}$ на Σ_0. С другой стороны, если Σ_0 светоподобная гиперповерхность, то $f^{\pm}(r_0) = 0$, но тогда $[\Delta] = 0$ означает, что $f^+(r) = f^-(r)$, то есть $\Omega^{\pm}$ совпадают. В частности, это означает, что в отличии от общей теории относительности [36], в квадратичной гравитации не существует светоподобной тонкой оболочки, разделяющей пространство–время Шварцшильда и вакуум Минковского.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этом заключительном разделе обсудим полученные результаты. Продолжая работу начатую в статье [26], было показано, что для сингулярной гиперповерхности произвольного типа в квадратичной гравитации уравнения движения могут быть получены с использованием только принципа наименьшего действия. Из уравнений движения (19–21) следует, что для отношения коэффициентов, соответствующих квадратичному слагаемому Гаусса–Бонне: $\alpha_1 = \alpha_3 = -\frac{1}{4}\alpha_2$, $\alpha_4 = \alpha_5 = 0$, все компоненты поверхностного тензора энергии–импульса равны нулю. Таким образом, даже при наличии скачка в тензоре кривизны Римана или его производных на гиперповерхности, квадратичная поправка Гаусса–Бонне не создает ни двойных слоев, ни тонких оболочек, если выполняются условия Лихнеровича.

Анализ уравнений движения (22–24) светоподобного двойного слоя показывает, что в отличие от времениподобного и пространственноподобного случаев $S^{nn} = N_a N_b S^{ab} = 0$ в любой системе координат. Это означает, что у светоподобных сингулярных гиперповерхностей в квадратичной гравитации отсутствует так называемое «внешнее давление».

Что касается тонких оболочек, основное отличие светоподобного случая от остальных состоит в критериях того, что рассматриваемая сингулярная гиперповерхность является тонкой оболочкой. Для светоподобной тонкой оболочки это отсутствие скачка скалярной кривизны, для остальных — отсутствие скачков в компонентах тензора Риччи.

Было продемонстрировано, что светоподобные сферически-симметричные сингулярные гиперповерхности в квадратичной гравитации могут быть только тонкими оболочками, так как для них автоматически выполняется критерий $[R] = 0$. В этом случае система уравнений движения (26) сводится к одному уравнению, которое, наряду с условиями Лихнеровича, можно записать с помощью инвариантов сферической геометрии.

Благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю доктору физ.-мат. наук В. А. Березину за советы и ценные замечания при работе над данной статьей.

[1] *Ostrogradsky M.* // Mem. Ac. St. Petersbourg. 1850. **VI**. P. 385.
[2] *Hooft G., Veltman M. J. G.* // Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor. A 1974. **20**. P. 69.
[3] *Deser S.* // Conf. Proc. C. 1975. **750926** P. 229.
[4] *Stelle K. S.*// Phys. Rev. D. 1977. **16**. P. 953.
[5] *Utiyama R. and DeWitt B. S.* // J. Math. Phys. 1962 **3**. P. 608.
[6] *Zel'dovich Ya. B.* // JETP Lett. 1970. **12**. P. 307.
[7] *Grib A. A., Mamaev S. G.*// Sov. J. Nucl. Phys. 1970. **10**. P. 722.
[8] *Zel'dovich Ya. B., Pitaevsky L. P.*// Comm. Math. Phys. 1971. **23**. P. 185.
[9] *Zel'dovich Ya. B., Starobinskii A. A.*// Sov. Phys. JETP. 1972. **34**. P. 1159.
[10] *Parker L., Fulling S. A.*// Phys. Rev. D. 1973. **7**. P. 2357.
[11] *Hu B. L., Fulling S. A., Parker L.* // Phys. Rev. D. 1973. **8**. P. 2377.
[12] *Hu B L, Fulling S A, Parker L*// Phys. Rev. D. 1974. **10** P. 3905.
[13] *Fulling S. A., Parker L.*// Ann. Phys. 1974. **87**. P. 176.
[14] *Lukash V. N., Starobinskii A. A.*// Sov. Phys. JETP. 1974. **39**. P. 742.
[15] *Zel'dovich Ya. B., Starobinskii A. A.* //JETP. Lett. 1977. **26**. P. 252.
[16] *Starobinskii A A*// Phys. Lett. B. 1980. **91**. P. 99.
[17] *Israel W.* //Il Nuovo Cim. B. 1966. **44**. P. 1.
[18] *Israel W.* // Phys. Lett. A. 1967. **24**. P. 184.
[19] *de la Cruz V., Israel W.*//Il Nuovo Cim. A. 1967. **51**. P. 744.
[20] *Senovilla J. M. M.* // Phys. Rev. D. 2013. **88**. 064015.
[21] *Senovilla J. M. M.*//Class. Quantum Grav. 2014. **31**. 072002.
[22] *Senovilla J M M*//J. Phys.: Conf. Ser. 2015. **600**. 012004.
[23] *Reina B, Senovilla J. M. M. and Vera R.*// Class. Quantum Grav. 2016. **33**. 105008.
[24] *Eiroa E. F., Figueroa Aguirre G. and Senovilla J. M. M.*// Phys. Rev. D. 2017. **95**. 124021.
[25] *Senovilla J. M. M.*// J. High Energ. Phys. 2018. 134.
[26] *Berezin V. A., Dokuchaev V. I., Eroshenko Yu. N. and Smirnov A. L.*// Class. Quantum Grav. 2021. **38**. 045014.
[27] *Berezin V. A., Kuzmin V. A., and Tkachev I. I.*// Phys. Rev. D. 1987. **36**. P. 2919.
[28] *Lake K.*// Gen. Rel. Grav. 2017. **49**. P. 134.
[29] *Deruelle N., Madore J.*// On the quasi-linearity of the Einstein- "Gauss-Bonnet"gravity field equations. Preprint. gr-qc/0305004. 2003.
[30] *Moncrief V. and Isenberg J.*// Commun.Math.Phys. 1983. **89**. P. 387.
[31] *Friedrich H, Racz I. and Wald R. M.* // Commun.Math.Phys. 1999. **204**. P. 691.
[32] *Racz I.* // Class.Quant.Grav. 2007. **24**. 5541.
[33] *Parattu K, Chakraborty S., Majhi B. R.* et al.// Gen. Rel. Grav. 2016. **48**. P. 94.
[34] *Jezierski J., Kijowski J. and Czuchry E.* // Rep. Math. Phys. 2001. **46**. P. 399.
[35] *Padmanabhan T.*// Phys.Rev. D. 2011. **83**. 044048.
[36] *Poisson E.*// A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics. 2004.
[37] *Mars M. and Senovilla J. M. M.*// Class. Quantum Grav. 1993. **10**. P. 1865.

Lightlike singular hypersurfaces in quadratic gravity

I. D. Ivanova

Institute for Nuclear Research of the Russian Academy of Sciences, Moscow 117312, Russia
E-mail: pc_mouse@mail.ru

For a singular hypersurface of arbitrary type in quadratic gravity equations of motion were obtained using the principle of least action. The equations containing the components of the surface energy-momentum tensor corresponding to the «external pressure» and «external flow» together with the Lichnerowicz conditions are necessary to find the hypersurface itself, while the rest of the equations define «arbitrary» functions that arise due to the implicit presence of δ'. It turned out that there are no double layers or thin shells for the Gauss-Bonnet quadratic term. It was demonstrated that there is no «external pressure» for null singular hypersurfaces. For spherically symmetric lightlike singular hypersurfaces the «external flux» is additionally equal to zero; therefore, such hypersurfaces can only be thin shells. In this case the system of equations of motion is reduced to one, which is expressed through the invariants of spherical geometry along with the Lichnerowicz conditions.

PACS: 02.40.Ky, 02.40.-k, 04.20.Fy.
Keywords: quadratic gravity, lightlike hypersurfaces, thin shell, double layer.
Received 2021.

Сведения об авторе

Иванова Инна Дмитриевна — стажер–исследователь; e-mail: pc_mouse@mail.ru.