Структура радиационных сил в вязком жидком слое на упругом полупространстве и создаваемых ими акустических течений

Д. А. Жарков,* В. А. Гусев†
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра акустики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
(Поступила в редакцию 03.10.2021; подписана в печать 06.10.2021)

Рассчитано поле поверхностной акустической волны в системе «слой вязкой жидкости-упругая подложка» с учетом сдвиговых компонент в жидкости. Решено дисперсионное уравнение и рассчитаны амплитуды поверхностной волны. Рассчитано радиационное давление, возникающее в вязкой жидкости со стороны стоячей поверхностной волны и действующее на элемент объема за счет нелинейности уравнений движения, и создаваемые им акустические течения. Показано, что учет вязкости изменяет пространственное распределение радиационного давления. Затухание волны вызывает дополнительную тенденцию к сбору взвешенных частиц в центре системы. Сдвиговые компоненты приводят к значительным градиентам радиационного давления вблизи границы раздела сред. Они играют определяющую роль в формировании упорядоченных ансамблей взвешенных частиц на последнем этапе процесса самоорганизации.

PACS: 43.25.Qp. УДК: 534.2
Ключевые слова: вязкая жидкость, поверхностная волна, радиационное давление, акустические течения.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время активно развиваются методики построения искусственных материалов и сред с заранее заданными характеристиками. К таким материалам можно отнести метаматериалы, обладающие необычными для естественных сред свойствами, в частности, фотонные и фононные кристаллы. Для создания в них периодической структуры используется, например, метод осаждения наночастиц, взвешенных в коллоидном растворе, в процессе диссипативной самосборки [1, 2]. Этот метод может быть расширен за счет приложения внешних полей, например, акустического или электромагнитного, для управления процессом формирования структуры и ее параметрами. Проведенные ранее экспериментальные [1, 3] и теоретические [2] исследования показали возможность и эффективность методики, основанной на формировании стоячей поверхностной акустической волны (ПАВ) в жидком слое на упругой подложке.

Однако в предыдущих работах влияние вязкости на структуру формируемых в жидком слое радиационных сил было рассмотрено в очень упрощенной постановке. Не учитывалось наличие сдвиговых компонент акустического поля в вязкой жидкости [2], что привело к неточной записи дисперсионного уравнения и амплитудных характеристик. Как следствие, может измениться не только пространственная структура акустических полей и радиационных сил, но и динамика акустических потоков и частиц в них. В частности, вязкость может оказывать и положительное действие, уменьшая влияние броуновского движения мелких частиц и способствуя формированию кластеров наночастиц. Таким образом, необходимо дальнейшее исследование структуры ПАВ с учетом вязкости для определения оптимальных условий и параметров акустического поля для формирования периодических структур при осаждении наночастиц.

Целью данной работы является расчет полей радиационных сил и создаваемых ими акустических течений в слоистых структурах с учетом вязкости жидкости и сравнение полученных результатов с итогами, сделанными ранее без учета вязкости.

1. ГЕОМЕТРИЯ ЗАДАЧИ

Геометрия задачи следующая. Граница раздела полупространств расположена при $z = 0$, ось z направлена вниз. Упругое тело заполняет полупространство $z > 0$. Вязкая жидкость занимает слой $-h < z < 0$. Сверху при $-\infty < z < -h$ находится вакуум. Вдоль границы раздела в положительном и отрицательном направлениях оси x распространяются навстречу друг другу две поверхностные волны одинаковой частоты, формируя стоячую волну. При этом поля этих встречных волн будут симметричны относительно точки $x = 0$. Рассматривается двумерная задача.

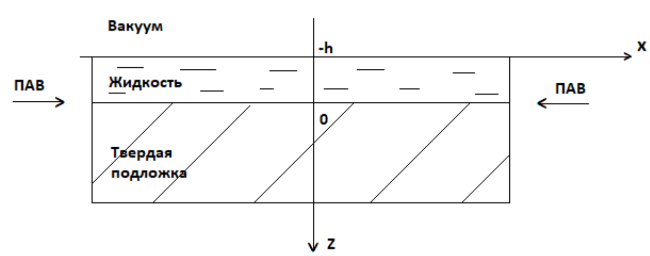

Рис. 1. Геометрия задачи

* denis.Zharkov2014@yandex.ru
† vgusev@bk.ru

2. АКУСТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В РАССМАТРИВАЕМОЙ СИСТЕМЕ

Акустическое поле в вязкой жидкости. Поле малой амплитуды описывается системой линеаризованных уравнений Навье-Стокса, непрерывности и состояния:

$$\begin{gathered}\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p' + \eta \triangle \mathbf{u} + \left(\xi + \frac{\eta}{3}\right) \operatorname{graddiv} \mathbf{u}, \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ p' = \rho' c_0^2. \end{gathered} \tag{1}$$

Методика расчета поля поверхностной волны стандартна [4] и отличается, главным образом, учетом сдвиговых компонент в жидкости. Ранее было получено, что акустическое поле, представляемое как $\mathbf{u} = \nabla\varphi + \operatorname{rot}\mathbf{A}$, в исследуемой системе описывается следующими уравнениями [5]:

$$\begin{aligned}\varphi &= \left(B_1 e^{-irz} + B_2 e^{irz}\right) e^{-i(\omega t - kx)}, \\ A &= \left(C_1 e^{-i\kappa z} + C_2 e^{i\kappa z}\right) e^{-i(\omega t - kx)}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$r^2 = \frac{k_0^2 - k^2 + \frac{i\omega b}{\rho_0 c_0^2} k^2}{1 - \frac{i\omega b}{\rho_0 c_0^2}}$$

где $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$ — волновое число в жидкости, $k = \frac{\omega}{c}$, c — искомая скорость поверхностной волны, $\kappa^2 = \frac{i\omega\rho_0}{\eta} - k^2$, $B_{1,2}$, $C_{1,2}$ — амплитуды соответствующих потенциалов. В упругой среде получаем соответственно:

$$\begin{gathered}\Phi = D e^{-qz} e^{-i(\omega t - kx)}, \\ \Psi = F e^{-sz} e^{-i(\omega t - kx)}, \\ q = \sqrt{k^2 - k_l^2}, \\ s = \sqrt{k^2 - k_t^2}. \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь введены волновые числа $k_l = \frac{\omega}{c_l}$ — для продольных волн и $k_t = \frac{\omega}{c_t}$ — для поперечных волн. Встречную бегущую ПАВ получаем из выражений (2) и (3) заменой $k \to -k$. Стоячая ПАВ формируется суммой этих двух волн.

Для расчета параметров акустической волны необходимо учесть граничные условия. В исследуемой задаче их должно быть 6: равенство нормальных и касательных смещений и напряжений на границе «жидкий слой-упругое полупространство» и равенство нулю нормальных и касательных напряжений на свободной поверхности жидкости [6]. Подстановка потенциалов (2) и (3) в эти граничные условия приводит к дисперсионному уравнению $\det\Delta(k) = 0$, матрица $\Delta(k)$ которого имеет вид [5]:

$$\begin{pmatrix} (2\eta k^2 - i\omega\rho_0)e^{irh} & (2\eta k^2 - i\omega\rho_0)e^{-irh} & 2\eta\kappa k e^{i\kappa h} & -2\eta\kappa k e^{i\kappa h} & 0 & 0 \\ 2\eta k r e^{irh} & -2\eta k r e^{irh} & \eta(\kappa^2 - k^2)e^{i\kappa h} & \eta(\kappa^2 - k^2)e^{-i\kappa h} & 0 & 0 \\ \frac{r}{\omega} & -\frac{r}{\omega} & -\frac{k}{\omega} & -\frac{k}{\omega} & q & -ik \\ \frac{k}{\omega} & \frac{k}{\omega} & \frac{\kappa}{\omega} & -\frac{\kappa}{\omega} & -ik & s \\ 2\eta k^2 i\omega\rho_0 & 2\eta k^2 i\omega\rho_0 & 2\eta\kappa k & -2\eta\kappa k & -\lambda(q^2 - k^2) - 2\mu q^2 & 2i\mu k s \\ 2\eta k r & -2\eta k r & \eta(\kappa^2 - k^2) & \eta(\kappa^2 - k^2) & 2i\mu k q & \mu(k^2 + s^2) \end{pmatrix}$$

Таким образом, акустическое поле состоит из двух потенциальных и двух сдвиговых компонент в вязком жидком слое и двух компонент в упругом полупространстве. Поскольку решается однородная задача без источника, одну из амплитуд можно задать произвольно. Поэтому будем нормировать все амплитуды на амплитуду сдвиговой компоненты в упругом полупространстве. Так как определитель равен нулю, то уравнения линейно зависимы и, следовательно, одно из них можно вычеркнуть. Выберем пятое в силу наибольшей громоздкости. Затем переносим последний столбец в правую часть. Применяя формулы Крамера, находим амплитуды скалярного и векторного потенциалов.

Привести аналитически выражения для амплитуд с учетом вязкости затруднительно, в силу громоздкости, но для понимания структуры поля необходимо привести формулы для стоячей волны в случае отсутствия вязкости [2]:

$$\begin{gathered} u_x = \frac{k}{r} U_0 \sin r(z+h) \sin kx \sin\omega t, \\ u_z = -U_0 \cos r(z+h) \cos kx \sin\omega t, \\ p' = -\frac{\rho_0\omega}{r} U_0 \sin r(z+h) \cos kx \cos\omega t, \\ U_0 = \frac{2\omega q}{\cos rh} \frac{k_t^2}{(k^2+s^2)} V_0, \end{gathered}$$

где V_0 — произвольный амплитудный множитель, с точностью до которого решается задача о распространении поверхностной волны. В случае решения задачи излучения такой волны этот множитель связан с амплитудой источника.

Скорость ПАВ в рассматриваемой системе была рассчитана в работе [6]. Было показано, что вязкость не приводит к значимым изменениям скорости. Поэтому для дальнейших расчетов использовалась скорость, полученная из случая в отсутствии вязкости.

3. РАДИАЦИОННЫЕ СИЛЫ

На взвешенные в жидкости частицы действует радиационная сила со стороны акустического поля. Обычно радиационную силу в этом случае связывают с разностью импульсов, действующих на частицу с разных сторон [7, 8]. Когда волна падает на частицу, то она рассеивается, и импульсы с передней и задней сторон различаются. В результате усреднения получается ненулевая сила, направленная в сторону уменьшения импульса. При этом нелинейный параметр жидкости в выражения для радиационного давления не входит и, следовательно, нелинейность уравнений гидродинамики никак не влияет на этот механизм. Но эта сила для частицы с радиусом R и плотностью ρ пропорциональна $(kR)^4$ и для наночастиц несущественна. Действительно, в работе [2] получены оценки характерных значений параметров, определяющих поведение наночастицы в акустическом поле, в частности, времени затухания движения частиц относительно жидкости:

$$t_0 = \frac{2\rho_0 R^2}{9\eta(1+R\sqrt{\rho\omega/2\eta})} + \\ + R\sqrt{\frac{\rho_0}{2\eta\omega}}\frac{(1+(2R/9)\sqrt{\rho\omega/2\eta})}{(1+R\sqrt{\rho\omega/2\eta})}.$$

В первом слагаемом величина $\frac{2\rho_0 R^2}{9\eta}$ для частиц диоксида кремния размером порядка 200 нм [1] оказывается равной $\sim 10^{-8}$ – 10^{-9} с, поправка, связанная с частотой, незначительна (~ 0.1, вплоть до ~ 1) и не влияет на порядок величины. Второе слагаемое имеет приблизительно такой же порядок $\sim 10^{-8}$ с. Такие времена соответствуют частотам порядка сотен мегагерц. Соответственно, для частоты порядка десятков мегагерц параметр $\omega_0 t_0$ является малой величиной. Это означает, что при воздействии акустических полей с частотами порядка десятков мегагерц и ниже можно пренебречь собственным движением частиц малого размера и считать, что частицы полностью увлекаются жидкостью.

Поэтому при расчете радиационного давления на взвешенные наночастицы на первый план выступает другой механизм [2], связанный с нелинейностью уравнений гидродинамики и действующий именно на элемент объема жидкости. Наличие нелинейных слагаемых приводит при усреднении по периоду акустической волны к появлению ненулевой силы — радиационного давления. При отсутствии нелинейных членов усреднение, очевидно, давало бы ноль для периодических процессов. Соответственно, радиационное давление в этом механизме определяется не параметрами частиц, а нелинейностью исходных уравнений акустического поля в жидкости. Силы радиационного давления, в свою очередь, вызывают акустические течения, увлекающие частицы.

Для расчета радиационного давления на элемент объема жидкости и акустических течений предложены различные модели и посвящено множество работ. Для определенности будем исходить из результатов работы [9]. В ней на основе гидродинамического подхода и процедуры разделения быстрых и медленных движений из полной системы уравнений механики сплошной среды с учетом нелинейных слагаемых получено выражение для тензора радиационных напряжений в случае вязкой жидкости [9]:

$$\Pi_{ik}^{RAD} = \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^2}\left\langle p'^2\right\rangle \delta_{ik} + \rho_0\left\langle u_i u_k\right\rangle + \\ + \frac{\eta}{\rho_0 c_0^2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left\langle p' u_i\right\rangle + \frac{\xi+\eta/3}{\rho_0 c_0^2}\delta_{ik}\frac{\partial}{\partial x_l}\left\langle p' u_l\right\rangle.$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по периоду акустической волны, ε — параметр нелинейности жидкости. Сила радиационного давления F_i, действующая на элемент объема жидкости, выражается через тензор Π_{ik}:

$$F_i = -\frac{\partial}{\partial x_k}\Pi_{ik}.$$

Влияние вязкости жидкости проявляется в нескольких факторах. Во-первых, появляется затухание потенциальной компоненты акустического поля, во-вторых, появляются сдвиговые компоненты поля, в-третьих, в тензоре радиационных напряжений появляется дополнительное слагаемое. Ясно, что относительная роль первого и третьего факторов пропорциональна коэффициентам вязкости, и для слабовязких жидкостей они не должны приводить к радикальному изменению радиационных сил. Амплитуда же сдвиговых компонент — второй фактор — вблизи границы раздела сред должна быть одного порядка по сравнению с амплитудами других компонент. Именно роль сдвиговых компонент может быть недооценена. Поэтому далее проведем сравнение пространственных распределений силы радиационного давления, создаваемой стоячей поверхностной волной, для трех случаев: *а* — для идеальной жидкости без вязкости, *б* — для приближенной модели жидкости с учетом вязкости для продольной компоненты и без учета сдвиговых компонент (формально положено $C_1 = C_2 = 0$) — рис. 2, *в* — для точной модели с учетом сдвиговых компонент — рис. 3.

При расчетах задавались следующие параметры: плотность жидкости — 1000 кг/м^3, плотность подложки — 2210 кг/м^3, скорость звука в жидкости $c_0 = 1500$ м/с, в твердом теле: $c_l = 5570$ м/с, $c_t = 3515$ м/с, $\eta = 0.00011$ Па с, $\xi = 0.003$ Па с, $b = 0.00315$ Па с, $\varepsilon = 3.5$, $k'' = 0.5$ м$^{-1}$ (k'' — мнимая часть волнового числа, ответственная за затухание волны; при построении увеличена относительно расчетного значения при заданных η и ξ, чтобы показать роль затухания вдоль

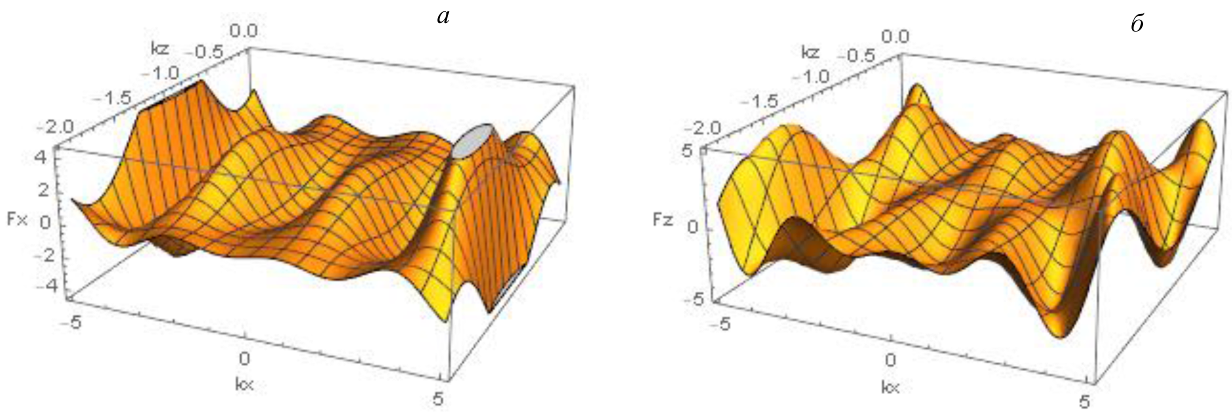

Рис. 2. Пространственное распределение радиационной силы с учетом вязкости для потенциальной компоненты и без учета сдвиговых компонент для частоты 1 кГц при $k'' = 0.5\,\text{м}^{-1}$: *а* — x-компонента, *б* — z-компонента

оси x). Частота волн принята равной 1 кГц, толщина слоя 0.1 м. В этом случае получаем скорость ПАВ $c = (3128.\ 99 - 3 \cdot 10^{-8} i)$ м/с.

На рис. 2 представлены горизонтальная и вертикальная компоненты радиационной силы без учета сдвиговых компонент (формально амплитуды векторного потенциала положены равными нулю). Видно, что вдоль оси x образуется квазипериодическое распределение. Если вязкостью пренебречь полностью, то формируется периодическая синусоидальная структура. В данном случае за счет затухания акустических волн радиационная сила увеличивается при удалении от центра структуры, т.е. появляется дополнительная сила, направленная к середине при $x = 0$ (точки симметрии встречных поверхностных волн). Это может способствовать более эффективному сбору взвешенных частиц вблизи этой области.

Пространственная структура радиационных сил с учетом сдвиговых компонент проиллюстрирована на рис. 3. Из графиков видно, что на расстояниях, меньших длины волны, у x-компоненты происходит экспоненциальное затухание поля. Видно, что учет сдвиговых компонент приводит к появлению значительных сил, сосредоточенных вблизи границы раздела сред. Это связано с быстрым затуханием и, соответственно, большим градиентом поля. Хотя область локализации сдвиговых компонент весьма мала, достигаемые значительные значения силы могут привести в среднем к существенному воздействию на характер движения жидкости, причем именно в области вблизи границы. Они могут определять формирующуюся на подложке структуру при испарении жидкого слоя со взвешенными частицами. При этом у z-компоненты эти эффекты гораздо слабее и практически не наблюдаются. Важно подчеркнуть, что условие прилипания вязкой жидкости к упругому полупространству здесь автоматически выполняется в силу учета соответствующего граничного условия. Движение среды и соответствующие радиационные силы связаны с тем, что сама граница движется относительно лабораторной системы отсчета при распространении поверхностной волны (или колебаниях в стоячей волне). Они играют определяющую роль в формировании упорядоченных ансамблей взвешенных частиц на последнем этапе процесса самоорганизации.

4. АКУСТИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ

Наличие ненулевой усредненной радиационной силы приводит к формированию в жидком слое акустических течений. Их структура при малых гидродинамических числах Рейнольдса рассчитывается на основе системы уравнений [10]:

$$-\eta \Delta \mathbf{U}_T = -\nabla P + \mathbf{F},$$

где $\mathbf{U}_T$ — скорость акустического течения, P — давление потока. Применяя к этому уравнению операцию rot, получим бигармоническое уравнение для функции тока ψ:

$$\triangle(\eta \triangle \psi + V) = 0,\ U_{Tx} = \frac{\partial \psi}{\partial z},\ U_{Tz} = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Здесь V — единственная отличная от нуля компонента векторного потенциала $\mathbf{V}$ радиационной силы ($\mathbf{F} = \mathrm{rot}\mathbf{V} + \nabla S$). Уравнение решалось путем его разбиения на систему уравнений Пуассона с соответствующими граничными условиями:

$$\begin{cases} \eta \triangle \psi = -V + \widetilde{\psi}, \\ \triangle \widetilde{\psi} = 0, \\ \triangle \mathbf{V} = -\mathrm{rot}\ \mathbf{F}. \end{cases}$$

При этом скалярный потенциал силы был взят из случая в отсутствие вязкости, поэтому получившаяся картина характеризует качественное поведение акустических течений. Для более точного анализа необходимо в явном виде разделить поле радиационной силы

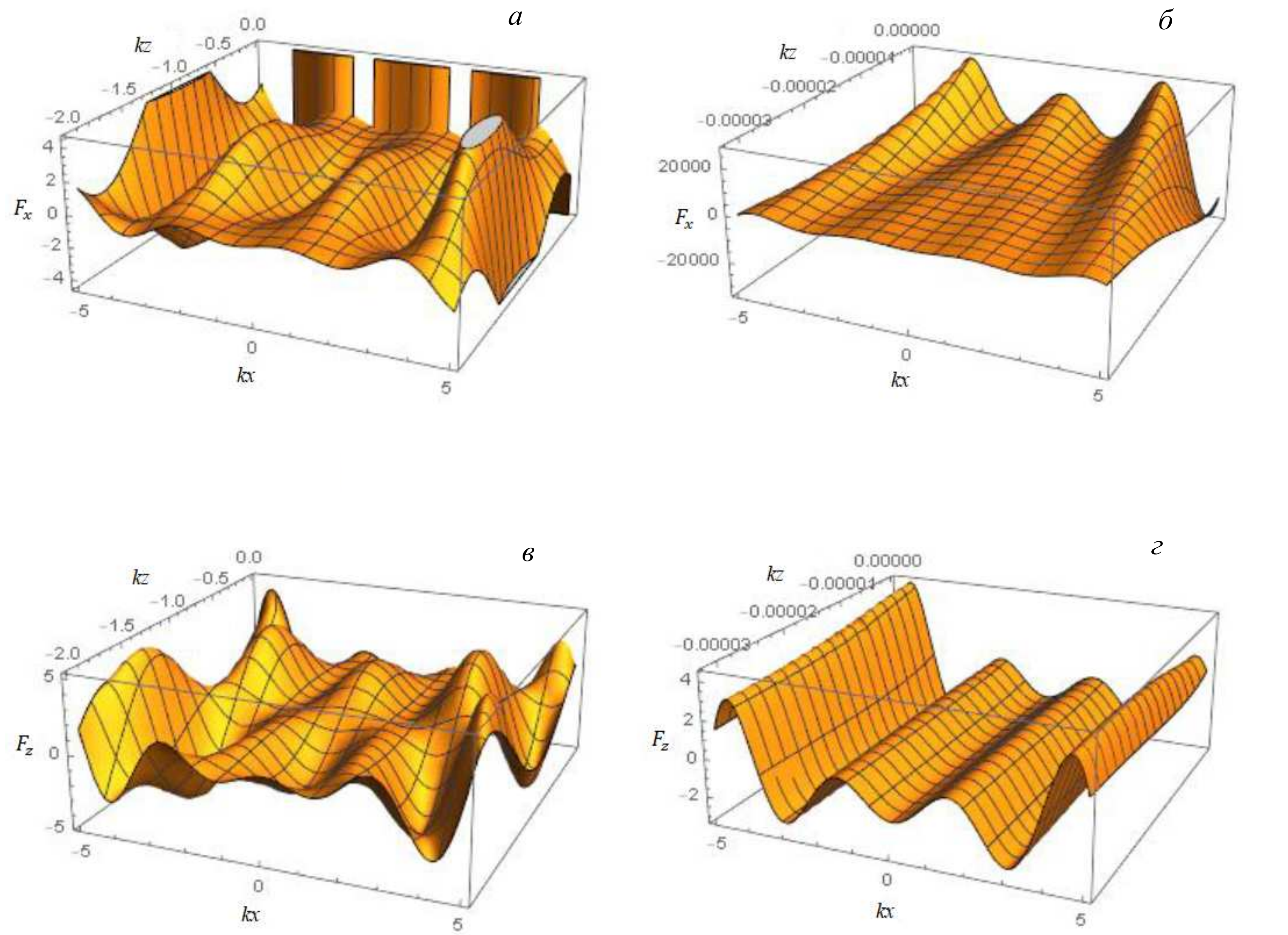

Рис. 3. Пространственное распределение радиационной силы с учетом сдвиговых компонент для частоты 1 кГц: *а* — x-компонента, $0 \le kz \le 0.5$, *б* — x-компонента, $0 \le kz \le 0.000032$, *в* — z-компонента, $0 \le kz \le 0.5$, *г* — z-компонента, $0 \le kz \le 0.000032$

на скалярную и векторную часть, что сопряжено со значительными техническими трудностями.

Рис. 4 показывает, что линии тока гуще расположены в окрестностях линий $kx = \pi n$. При этом из-за наличия затухания при приближении к точке $x = 0$ площадь контуров уменьшается. При этом из-за изменения волнового числа, пространственный период создаваемой структуры также изменяется.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассчитаны с учетом сдвиговых компонент дисперсионные и амплитудные характеристики поверхностной волны в слое вязкой жидкости, а также радиационные силы, действующие на элемент объема жидкости и создаваемые ими акустические течения. Показано, что вязкость приводит к значимым изменениям пространственной структуры радиационных сил и может привести к улучшению условий образования упорядоченных ансамблей наночастиц. Дополнительная радиационная сила, обусловленная сдвиговыми компонентами акустического поля в жидкости, сосредоточена в узком слое вблизи границы раздела сред. Однако формирование упорядоченных ансамблей происходит именно в этой области. Поэтому достигаемые радиационной силой в этой области значительные величины могут являться одним из основных факторов, определяющих движение жидкости и параметры структуры. Учет вязкости приводит к изменению поведения акустических течений, хотя вблизи границы никаких явных отличий на данный момент не наблюдается. В дальнейшем планируется более точно рассчитать вызванные радиационным давлением акустические те-

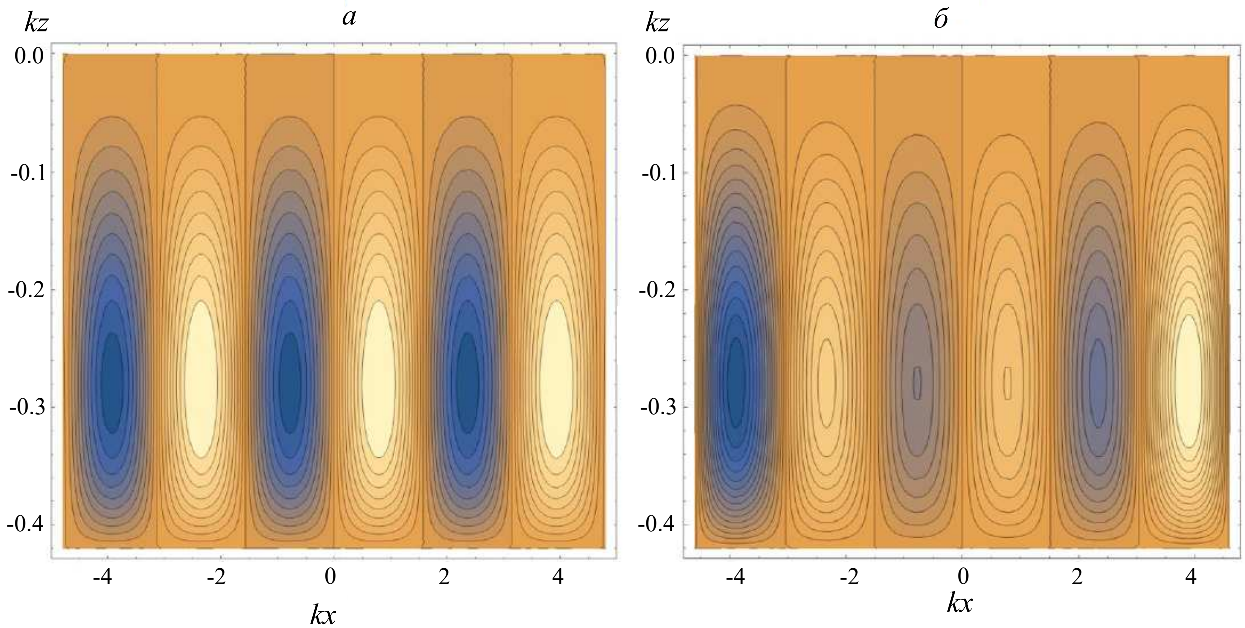

Рис. 4. Линии тока акустического течения для частоты 1 кГц при $k'' = 0.5\,\text{м}^{-1}$: *а* — без учета вязкости, *б* — с учетом вязкости

чения и движение взвешенных наночастиц в этих течениях.

Статья подготовлена по результатам доклада на школе-семинаре «Волновые явления: физика и применения» («Волны 2021»).

Работа поддержана грантом РФФИ № 20-02-00493.

[1] *Rudenko O.V.* et al. // Acoustical Physics. 2010. **56**, N 6. P. 935.
[2] *Гусев В.А., Руденко О.В.* // Акуст. журн. 2019. **65**, № 2. С. 166.
[3] *Макалкин Д.И., Коршак Б.А., Брысев А.П.* // Акуст. журн. 2017. **63**. С. 553.
[4] *Викторов И.А.* // Звуковые поверхностные волны в твердых телах. 1981.
[5] *Гусев В.А., Жарков Д.А.* // Известия РАН. Сер. физ. 2021. **85**, № 6. С. 803.
[6] *Gusev V.A., Simonova P.A.* // Physics of Wave Phenomena. 2015. **23**. N 4. P. 268.
[7] *Гольдберг З.А.* // Мощные ультразвуковые поля. 1968.
[8] *Горьков Л.П.* // ДАН СССР. 1961. **140**, № 1. С. 88.
[9] *Руденко О.В.* // Нелинейные проблемы теории колебаний и теории управления. Вибрационная механика. 2009. С. 402.
[10] *Руденко О.В., Солуян С.И.* // Теоретические основы нелинейной акустики. 1975.

The structure of radiation forces in a viscous fluid layer on an elastic half-space and the acoustic flows generated by them

D. A. Zharkov[a], **V. A. Gusev**[b]

Department of Acoustics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia
E-mail: [a]*denis.Zharkov2014@yandex.ru,* [b]*vgusev@bk.ru*

The field of a surface acoustic wave in the system «viscous fluid layer - elastic substrate» is calculated taking into account the shear components in the fluid. The dispersion equation was solved and the amplitudes of the surface wave were calculated. The radiation pressure arising in a viscous fluid from the side of a standing surface wave and acting on an element of its volume due to the nonlinearity of the equations of motion, and the acoustic flows created by it are calculated. It is shown that taking viscosity into account changes the spatial distribution of radiation pressure. Attenuation of the wave causes an additional tendency for the assembly of suspended particles in the center of the system. Shear components lead to significant gradients of radiation pressure near the interface between the media. They play a decisive role in the formation of ordered ensembles of suspended particles at the last stage of the self-organization process.

PACS: 43.25.Qp.
Keywords: viscous fluid, surface wave, radiation pressure, acoustic flows.
Received 03 October 2021.

Сведения об авторах

1. Жарков Денис Александрович — студент; e-mail: denis.Zharkov2014@yandex.ru.
2. Гусев Владимир Андреевич - канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.; тел.: (495) 939-29-43, e-mail: vgusev@bk.ru.