Асимптотика контрастной структуры типа ступеньки с многозонным внутренним слоем

Р. Е. Симаков*
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
(Статья поступила 16.01.2021; Подписана в печать 04.03.2021)

Рассматривается краевая задача для сингулярно возмущённой системы двух ОДУ второго порядка с разными степенями малого параметра при вторых производных. Особенность задачи состоит в том, что одно из двух уравнений вырожденной системы имеет три непересекающихся корня, причём два из них — двукратные, а третий — простой (однократный). Доказано, что для достаточно малых значений малого параметра задача имеет решение, обладающее быстрым переходом от одного двукратного корня вырожденного уравнения к другому двукратному корню в окрестности некоторой внутренней точки отрезка. Построено и обосновано полное асимптотическое разложение этого решения. Оно качественно отличается от известного разложения в случае, когда все корни вырожденного уравнения — простые. В частности, разложение ведётся не по целым, а по дробным степеням малого параметра, погранслойные переменные имеют другой масштаб, а переходный слой оказывается восьмизонным.

PACS: 02.30.Hq, 02.30.Mv УДК: 517.928.4
Ключевые слова: сингулярно возмущённые краевые задачи, внутренний переходный слой, асимптотика по малому параметру, случай кратного корня вырожденного уравнения.

ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И СХЕМА ЕЁ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим краевую задачу для сингулярно возмущённой системы двух ОДУ второго порядка с разными степенями малого параметра при вторых производных.

$$\varepsilon^2 \frac{d^2u}{dx^2} = F(u,v,x,\varepsilon), \ \varepsilon \frac{d^2v}{dx^2} = f(u,v,x,\varepsilon), \ 0<x<1, \tag{1}$$

$$\frac{du}{dx}(0,\varepsilon) = \frac{du}{dx}(1,\varepsilon) = 0, \quad \frac{dv}{dx}(0,\varepsilon) = \frac{dv}{dx}(1,\varepsilon) = 0, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $u(x,\varepsilon)$ и $v(x,\varepsilon)$ — искомые скалярные функции.

Такая задача исследовалась в работе [1] при условии, что вырожденное уравнение

$$F(u,v,x,0) = 0 \tag{3}$$

имеет три простых корня $u = \varphi_i(v,x)$, $i = 1,2,3$. Было доказано существование решения с внутренним переходным слоем и построено его полное асимптотическое разложение с помощью классического метода А. Б. Васильевой [2, с. 38].

Сформулируем условия, при которых будет рассмотрена задача (1), (2). Пусть I_u и I_v — некоторые интервалы изменения переменных u и v.

<u>Условие A1.</u> Пусть функция $F(u,v,x,\varepsilon)$ имеет вид

$$F(u,v,x,\varepsilon) = -(u-\varphi_1(v,x))^2(u-\varphi_2(v,x))\times \\ \times (u-\varphi_3(v,x))^2 - \varepsilon F_1(u,v,x,\varepsilon),$$

где $\varphi_i(v,x) \in I_u$ при $(v,x) \in I_v \times [0;1]$, $i = 1,2,3$, причём

$$\varphi_1(v,x) < \varphi_2(v,x) < \varphi_3(v,x), \quad (v,x) \in I_v \times [0;1]. \tag{4}$$

Из условия A1 следует, что корни $u = \varphi_1(v,x)$ и $u = \varphi_3(v,x)$ уравнения (3) являются двукратными, а $u = \varphi_2(v,x)$ — простой корень этого уравнения. Отметим, что случай, когда двукратным является только корень $u = \varphi_1(v,x)$, рассматривался в работе [3].

<u>Условие A2.</u> Пусть уравнения $g_i(v,x) := f(\varphi_i(v,x),v,x,0) = 0$ при $i = 1,3$ имеют простые корни $v = v_i(x) \in I_v$, $x \in [0;1]$.

<u>Условие A3.</u> Пусть функции $\varphi_i(v,x)$, $i = 1,2,3$, $F_1(u,v,x,\varepsilon)$, $f(u,v,x,\varepsilon)$, $v_1(x)$ и $v_3(x)$ являются достаточно гладкими при $(u,v,x,\varepsilon) \in I_u \times I_v \times [0;1] \times [0;\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$.

Требуемый порядок гладкости зависит от порядка асимптотики, которую мы хотим построить. Так как далее речь пойдёт об асимптотике произвольного порядка, будем считать их бесконечно дифференцируемыми.

<u>Условие A4.</u> Пусть система уравнений

$$I(v_0,x_0) := \int\limits_{\varphi_1(v_0,x_0)}^{\varphi_3(v_0,x_0)} F(u,v_0,x_0,0)\,du = 0, \tag{5}$$

$$J(v_0,x_0) := \int\limits_{v_1(x_0)}^{v_0} g_1(v,x_0)\,dv + \int\limits_{v_0}^{v_3(x_0)} g_3(v,x_0)\,dv = 0 \tag{6}$$

имеет решение $v_0 = \bar{v}_0$, $x_0 = \bar{x}_0$, такое что $0 < \bar{x}_0 < 1$,

$$v_1(\bar{x}_0) < \bar{v}_0 < v_3(\bar{x}_0), \tag{7}$$

и, кроме того, выполняется неравенство

*E-mail: simakov.re14@physics.msu.ru

$$\left.\frac{D(I,J)}{D(v_0,x_0)}\right|_{v_0=\bar{v}_0,\,x_0=\bar{x}_0}\neq 0. \tag{8}$$

Поставим вопрос о существовании и асимптотике по параметру ε решения задачи (1), (2) с внутренним переходным слоем в окрестности точки $\bar{x}_0$, удовлетворяющего предельным равенствам

$$\begin{gathered}\lim_{\varepsilon\to 0}u(x,\varepsilon)=\begin{cases}\varphi_1(v_1(x),x), & 0\le x<\bar{x}_0,\\ \varphi_3(v_3(x),x), & \bar{x}_0<x\le 1;\end{cases}\\ \lim_{\varepsilon\to 0}v(x,\varepsilon)=\begin{cases}v_1(x), & 0\le x<\bar{x}_0,\\ v_3(x), & \bar{x}_0<x\le 1.\end{cases}\end{gathered} \tag{9}$$

Решения такого типа называются *контрастными структурами типа ступеньки*.

Определим точку x_* как точку, в которой u-компонента решения пересекается с корнем φ_2: $u(x_*,\varepsilon)=\varphi_2(v_*,x_*)$, где v_* — значение v-компоненты решения в этой точке: $v(x_*,\varepsilon)=v_*$. Забегая вперёд, отметим, что x_* и v_* будут иметь представления $x_*=\bar{x}_0+O(\varepsilon^{1/4})$ и $v_*=\bar{v}_0+O(\varepsilon^{1/4})$ и, значит, будут сколь угодно близки к $\bar{x}_0$ и $\bar{v}_0$ для достаточно малых ε. Точку x_* назовём *точкой перехода* и будем строить асимптотику искомого решения раздельно слева и справа от точки перехода, для чего поставим две вспомогательные краевые задачи на отрезках $[0;x_*]$ и $[x_*;1]$.

Первая вспомогательная задача:

$$\begin{gathered}\varepsilon^2\frac{d^2u^{(-)}}{dx^2}=F(u^{(-)},v^{(-)},x,\varepsilon),\\ \varepsilon\frac{d^2v^{(-)}}{dx^2}=f(u^{(-)},v^{(-)},x,\varepsilon),\quad 0<x<x_*,\end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered}\frac{du^{(-)}}{dx}(0,\varepsilon)=0,\quad \frac{dv^{(-)}}{dx}(0,\varepsilon)=0,\\ u^{(-)}(x_*,\varepsilon)=\varphi_2(v_*,x_*),\quad v^{(-)}(x_*,\varepsilon)=v_*.\end{gathered} \tag{11}$$

Вторая вспомогательная задача:

$$\begin{gathered}\varepsilon^2\frac{d^2u^{(+)}}{dx^2}=F(u^{(+)},v^{(+)},x,\varepsilon),\\ \varepsilon\frac{d^2v^{(+)}}{dx^2}=f(u^{(+)},v^{(+)},x,\varepsilon),\quad x_*<x<1,\end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered}u^{(+)}(x_*,\varepsilon)=\varphi_2(v_*,x_*),\quad v^{(+)}(x_*,\varepsilon)=v_*,\\ \frac{du^{(+)}}{dx}(1,\varepsilon)=0,\quad \frac{dv^{(+)}}{dx}(1,\varepsilon)=0.\end{gathered} \tag{13}$$

При решении этих задач будем считать, что v_* и x_* — некоторые фиксированные точки из достаточно малых окрестностей точек $\bar{v}_0$ и $\bar{x}_0$ соответственно. Тогда для них будут выполнены неравенства $0<x_*<1$, $v_1(x_*)<v_*<v_3(x_*)$, а условия A5–A14, которые будут сформулированы ниже, сохранятся при замене $\bar{v}_0$ и $\bar{x}_0$ на v_* и x_*.

1. ПЕРВАЯ ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Начнём построение асимптотики с первой вспомогательной задачи, которая относится к числу исследованных ранее задач, так как в соответствии с (9) u-компонента её решения близка к двукратному корню $u=\varphi_1(v,x)$ вырожденного уравнения (3). Этот случай уже был изучен ранее, например в [3]. В связи с этим ограничимся кратким описанием построения асимптотики решения.

Асимптотика решения строится в виде

$$\begin{gathered}U^{(-)}(x,\varepsilon)=\bar{u}^{(-)}(x,\varepsilon)+\Pi^{(-)}u(\xi,\varepsilon)+\\ +P^{(-)}u(\zeta,\varepsilon)+Q^{(-)}u(\tau,\varepsilon)+R^{(-)}u(\sigma,\varepsilon),\end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered}V^{(-)}(x,\varepsilon)=\bar{v}^{(-)}(x,\varepsilon)+\Pi^{(-)}v(\xi,\varepsilon)+\\ +P^{(-)}v(\zeta,\varepsilon)+Q^{(-)}v(\tau,\varepsilon)+R^{(-)}v(\sigma,\varepsilon),\end{gathered} \tag{15}$$

где $\bar{u}^{(-)}(x,\varepsilon)$, $\bar{v}^{(-)}(x,\varepsilon)$ — регулярные части асимптотики; $\Pi^{(-)}u(\xi,\varepsilon)$, $\Pi^{(-)}v(\xi,\varepsilon)$ и $P^{(-)}u(\zeta,\varepsilon)$, $P^{(-)}v(\zeta,\varepsilon)$ — погранслойные части асимптотики в окрестности точки $x=0$; $Q^{(-)}u(\tau,\varepsilon)$, $Q^{(-)}v(\tau,\varepsilon)$ и $R^{(-)}u(\sigma,\varepsilon)$, $R^{(-)}v(\sigma,\varepsilon)$ — внутрислойные части асимптотики, описывающие быстрое изменение решения в левой полуокрестности точки перехода x_*. Используются растянутые переменные $\xi=x/\sqrt{\varepsilon}$, $\zeta=x/\varepsilon^{3/4}$, $\tau=(x-x_*)/\sqrt{\varepsilon}$, $\sigma=(x-x_*)/\varepsilon$.

1.1. Регулярная часть асимптотики

Регулярная часть асимптотики строится в виде рядов по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$\begin{gathered}\bar{u}^{(-)}(x,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\bar{u}_i^{(-)}(x),\\ \bar{v}^{(-)}(x,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\bar{v}_i^{(-)}(x).\end{gathered}$$

Их главные члены $\bar{u}_0^{(-)}(x)=\varphi_1(v_1(x),x)$, $\bar{v}_0^{(-)}(x)=v_1(x)$.

Следующие два условия обеспечивают разрешимость систем уравнений, из которых определяются регулярные функции более высоких порядков.

Условие A5. Пусть $F_1(\varphi_1(v_1(x),x),v_1(x),x,0)>0$, $x\in[0;\bar{x}_0]$.

Условие A6. Пусть $\dfrac{\partial g_1}{\partial v}(v_1(x),x)>0$, $x\in[0;\bar{x}_0]$ и $\dfrac{\partial g_1}{\partial v}(v,\bar{x}_0)>0$, $v\in[v_1(\bar{x}_0);\bar{v}_0]$.

1.2. Погранслойная часть асимптотики

Погранслойная часть асимптотики строится в виде рядов по целым степеням $\sqrt[4]{\varepsilon}$:

$$\Pi^{(-)}u(\xi,\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\Pi_i^{(-)}u(\xi),$$

$$\Pi^{(-)}v(\xi,\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\Pi_i^{(-)}v(\xi),\quad \xi=\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\geq 0,$$

$$P^{(-)}u(\zeta,\varepsilon)=\varepsilon^{3/4}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}P_i^{(-)}u(\zeta),$$

$$P^{(-)}v(\zeta,\varepsilon)=\varepsilon^{5/4}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}P_i^{(-)}v(\zeta),\quad \zeta=\frac{x}{\varepsilon^{3/4}}\geq 0.$$

Все $\Pi^{(-)}$- и $P^{(-)}$-функции убывают экспоненциально при $\xi\to+\infty$ и $\zeta\to+\infty$.

1.3. Внутрислойная часть асимптотики

Внутрислойная часть асимптотики строится в виде рядов по целым степеням $\sqrt[4]{\varepsilon}$:

$$Q^{(-)}u(\tau,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}Q_i^{(-)}u(\tau),$$

$$Q^{(-)}v(\tau,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}Q_i^{(-)}v(\tau),$$

$$R^{(-)}u(\sigma,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}R_i^{(-)}u(\sigma),$$

$$R^{(-)}v(\sigma,\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}R_i^{(-)}v(\sigma).$$

Задача для $Q_0^{(-)}v(\tau)$ сводится к уравнению первого порядка

$$\frac{dQ_0^{(-)}v}{d\tau}=\left(2\int\limits_0^{Q_0^{(-)}v}g_1\left(\bar v_0^{(-)}(x_*)+s,x_*\right)ds\right)^{1/2},\tau\leq 0 \tag{16}$$

с начальным условием

$$Q_0^{(-)}v(0)=v_*-\bar v_0^{(-)}(x_*). \tag{17}$$

Уравнение (16) интегрируется в квадратурах, его решение с начальным условием (17) является возрастающей функцией (от нуля при $\tau=-\infty$ до $\left(v_*-\bar v_0^{(-)}(x_*)\right)$ при $\tau=0$) и имеет экспоненциальную оценку

$$\left|Q_0^{(-)}v(\tau)\right|\leq c\exp(\kappa\tau),\quad \tau\leq 0, \tag{18}$$

где c и κ — подходящие положительные числа, не зависящие от ε. Для всех остальных функций $Q_i^{(-)}u(\tau)$, $Q_i^{(-)}v(\tau)$, $i=0,1,2,\ldots$ справедливы оценки такого же вида с различными, вообще говоря, числами c и κ для различных i.

Чтобы обеспечить разрешимость системы уравнений, из которой определяются функции $Q_2^{(-)}u(\tau)$, $Q_2^{(-)}v(\tau)$, вводится следующее требование.

Условие A7. Пусть $G_1(v,\bar x_0)+F_1(\varphi_1(v,\bar x_0),v,\bar x_0,0)>0$, $v\in[v_1(\bar x_0);\bar v_0]$, где

$$G_1(v,x):=\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(v,x)g_1(v,x)+ \\ +2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial v^2}(v,x)\int\limits_{v_1(x)}^{v}g_1(s,x)\,ds.$$

В отличие от рядов $Q^{(-)}u$, $Q^{(-)}v$ ряды $R^{(-)}u$, $R^{(-)}v$ строятся не стандартным способом, а с помощью алгоритма, разработанного для сингулярно возмущённых задач с кратным корнем вырожденного уравнения [4–7], в которых стандартный алгоритм не применим.

Задача для $R_0^{(-)}u(\sigma)$ сводится к уравнению первого порядка

$$\frac{dR_0^{(-)}u}{d\sigma}= \\ =\left(2\int\limits_0^{R_0^{(-)}u}h^{(-)}(\varphi_1(v_*,x_*)+s,v_*,x_*)(s^2+2\sqrt{\varepsilon}bs)\,ds\right)^{1/2}, \\ \sigma\leq 0, \tag{19}$$

где $h^{(-)}(u,v,x):=-(u-\varphi_2(v,x))(u-\varphi_3(v,x))^2$,

$$b:=\sqrt{\frac{G_1(v_*,x_*)+F_1(\varphi_1(v_*,x_*),v_*,x_*,0)}{h^{(-)}(\varphi_1(v_*,x_*),v_*,x_*)}}>0, \tag{20}$$

с начальным условием

$$R_0^{(-)}u(0)=\varphi_2(v_*,x_*)-\varphi_1(v_*,x_*). \tag{21}$$

Уравнение (19) интегрируется в квадратурах, его решение с начальным условием (21) является возрастающей функцией (от нуля при $\sigma=-\infty$ до $(\varphi_2(v_*,x_*)-\varphi_1(v_*,x_*))$ при $\sigma=0$) и имеет двустороннюю оценку (см. [6]):

$$c_1R_{\kappa_1}(\sigma,\varepsilon)\leq R_0^{(-)}u(\sigma)\leq c_2R_{\kappa_2}(\sigma,\varepsilon),\quad \sigma\leq 0, \tag{22}$$

где c_1, c_2, κ_1, κ_2 — не зависящие от ε числа, $c_2\geq c_1>0$, $\kappa_1\geq\kappa_2>0$,

$$R_\kappa(\sigma,\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}\exp\left(\varepsilon^{1/4}\kappa\sigma\right)\left[1+\varepsilon^{1/4}-\exp\left(\varepsilon^{1/4}\kappa\sigma\right)\right]^{-2}, \\ \kappa>0,\quad \sigma\leq 0 \tag{23}$$

— функция, которая является эталонной (оценочной) функцией для всех функций $R_i^{(-)}u(\sigma)$, $R_i^{(-)}v(\sigma)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, т. е. каждая из этих функций имеет оценку вида

$$\left|R_i^{(-)}u(\sigma)\right| \le cR_\kappa(\sigma,\varepsilon), \quad \sigma \le 0 \tag{24}$$

с различными, вообще говоря, числами c и κ для различных i. Для $R_0^{(-)}u(\sigma)$ эта оценка следует из (22).

Несложный анализ выражения (23) показывает, что $R_\kappa(\sigma,\varepsilon)$ монотонно стремится к нулю при $\sigma \to -\infty$, причём убывание носит различный характер на трёх промежутках (в трёх зонах) полупрямой $\sigma \le 0$.

Первая зона — отрезок $[-\varepsilon^{-\gamma} \le \sigma \le 0]$, где в качестве γ можно взять любое число из интервала $(0; 1/4)$, сколь угодно близкое к $1/4$. В этой зоне $R_\kappa(\sigma,\varepsilon)$ убывает с уменьшением σ (т. е. с ростом $|\sigma|$) степенным образом: $R_\kappa(\sigma,\varepsilon) = O(1/(1+\sigma^2))$ при фиксированном ε.

Вторая (переходная) зона — отрезок $[-\varepsilon^{-1/4} \le \sigma \le -\varepsilon^{-\gamma}]$. Здесь происходит постепенное изменение масштаба внутрислойной переменной и характера убывания функции $R_\kappa(\sigma,\varepsilon)$ от степенного убывания по отношению к σ до экспоненциального по отношению к новой внутрислойной переменной $\eta = (x - x_*)/\varepsilon^{3/4}$.

Третья зона — полупрямая $\sigma \le -\varepsilon^{-1/4}$. Здесь функция $R_\kappa(\sigma,\varepsilon)$ убывает экспоненциально по отношению к внутрислойной переменной η: $R_\kappa(\sigma,\varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon}\exp(\kappa\eta))$, $\eta \le -1$.

Из оценок (18) и (24) следует, что внутренний слой в левой полуокрестности точки x_* является четырёхзонным. Первые две зоны определены при описании поведения эталонной функции $R_\kappa(\sigma,\varepsilon)$ — это отрезки $[-\varepsilon^{-\gamma} \le \sigma \le 0]$ и $[-\varepsilon^{-1/4} \le \sigma \le -\varepsilon^{-\gamma}]$, т. е. $[x_* - \varepsilon^{1-\gamma} \le x \le x_*]$ и $[x_* - \varepsilon^{3/4} \le x \le x_* - \varepsilon^{1-\gamma}]$, где $0 < \gamma < 1/4$. В качестве третьей зоны можно взять отрезок $[x_* - \varepsilon^{5/8} \le x \le x_* - \varepsilon^{3/4}]$. На этом отрезке происходит экспоненциальное убывание $R^{(-)}$-функций по отношению к внутрислойной переменной η, изменяющейся от (-1) до $(-\varepsilon^{-1/8})$, а $Q^{(-)}$-функции почти не изменяются, так как на этом отрезке $\tau \in [-\varepsilon^{1/8}; -\varepsilon^{1/4}]$.

И, наконец, в четвёртой зоне: $[x_* - \delta \le x \le x_* - \varepsilon^{5/8}]$ $R^{(-)}$-функции являются величинами порядка $o(\varepsilon^N)$ для любого $N > 0$, а $Q^{(-)}$-функции экспоненциально убывают.

Запишем ещё одну оценку, которая понадобится в п. 3:

$$\frac{dR_0^{(-)}v}{d\sigma}(0) = O(\sqrt{\varepsilon}). \tag{25}$$

1.4. Обоснование асимптотики

Для обоснования построенной асимптотики нам понадобятся ещё два условия, связанные с производными функций φ, F и f.

Условие А8. Пусть $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v}(v_1(x),x) > 0$, $x \in [0;\bar{x}_0]$ и $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v}(v,\bar{x}_0) > 0$, $v \in [v_1(\bar{x}_0);\bar{v}_0]$.

Чтобы сформулировать условие А9, определим три кривые в пространстве переменных (u,v,x):

$$l_1 = \{(u,v,x)\colon \varphi_1(\bar{v}_0,\bar{x}_0) \le u \le \varphi_2(\bar{v}_0,\bar{x}_0), \quad v = \bar{v}_0, \quad x = \bar{x}_0\},$$

$$l_2 = \{(u,v,x)\colon u = \varphi_1(v,\bar{x}_0), v_1(\bar{x}_0) \le v \le \bar{v}_0, x = \bar{x}_0\},$$

$$l_3 = \{(u,v,x)\colon u = \varphi_1(v_1(x),x), v = v_1(x), 0 \le x \le \bar{x}_0\}.$$

Условие А9. Пусть $\dfrac{\partial F}{\partial v}(u,\bar{v}_0,\bar{x}_0,0) < 0$ при $\varphi_1(\bar{v}_0,\bar{x}_0) < u \le \varphi_2(\bar{v}_0,\bar{x}_0)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v,x,0) < 0$ при $(u,v,x) \in l^{(-)} = l_1 \cup l_2 \cup l_3$.

Отметим, что для v_* и x_*, достаточно близких к $\bar{v}_0$ и $\bar{x}_0$, неравенства из условий А8 и А9 останутся верными, если в этих условиях заменить $\bar{v}_0$ и $\bar{x}_0$ на v_* и x_*.

Обозначим через $U_n^{(-)}(x,\varepsilon)$ и $V_n^{(-)}(x,\varepsilon)$ следующие частичные суммы построенных рядов (14) и (15):

$$U_n^{(-)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i/2}\bar{u}_i^{(-)}(x) + \sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{2n}\varepsilon^{i/4}\Pi_i^{(-)}u\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \varepsilon^{3/4}\sum_{i=0}^{2n}\varepsilon^{i/4}P_i^{(-)}u\left(\frac{x}{\varepsilon^{3/4}}\right) + \\ + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/4}Q_i^{(-)}u\left(\frac{x-x_*}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/4}R_i^{(-)}u\left(\frac{x-x_*}{\varepsilon}\right), \tag{26}$$

$$V_n^{(-)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i/2}\bar{v}_i^{(-)}(x) + \sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{2n}\varepsilon^{i/4}\Pi_i^{(-)}v\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \varepsilon^{5/4}\sum_{i=0}^{2n-2}\varepsilon^{i/4}P_i^{(-)}v\left(\frac{x}{\varepsilon^{3/4}}\right) + \\ + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/4}Q_i^{(-)}v\left(\frac{x-x_*}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/4}R_i^{(-)}v\left(\frac{x-x_*}{\varepsilon}\right). \tag{27}$$

Теорема 1 *Пусть выполнены условия A1–A9. Тогда для любых v_* и x_*, достаточно близких к $\bar{v}_0$ и $\bar{x}_0$, и для любого натурального числа n при достаточно малых ε существует решение $u^{(-)}(x,\varepsilon)$, $v^{(-)}(x,\varepsilon)$ задачи (10), (11), для которого при каждом $m = 0,1,\ldots,n$ имеет место представление*

$$u^{(-)}(x,\varepsilon) = U_m^{(-)}(x,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{(m+1)/2}\right),$$
$$v^{(-)}(x,\varepsilon) = V_m^{(-)}(x,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{(m+1)/2}\right), \quad x \in [0; x_*]. \tag{28}$$

Следствие 1.1 *Предельным положением при $\varepsilon \to 0$ кривой $l_\varepsilon^{(-)} = \{(u,v,x)\colon u = u^{(-)}(x,\varepsilon), v = v^{(-)}(x,\varepsilon), 0 \le x \le x_*\}$ (т. е. графика решения задачи (10), (11)) является кривая $l_*^{(-)}$, которая определяется так же, как кривая $l^{(-)}$ в условии A9, с заменой $\bar{v}_0$ и $\bar{x}_0$ на v_* и x_*.*

Следствие 1.2 *Стандартным способом получаются асимптотические представления для производных решения:*

$$\frac{du^{(-)}}{dx}(x,\varepsilon) = \frac{dU_n^{(-)}}{dx}(x,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{(n-1)/2}\right),$$
$$\frac{dv^{(-)}}{dx}(x,\varepsilon) = \frac{dV_n^{(-)}}{dx}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n/2}), \quad x \in [0; x_*]. \tag{29}$$

2. ВТОРАЯ ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Покажем теперь, как свести вторую вспомогательную задачу к первой. С этой целью сделаем замену переменных

$$u^{(+)}(x,\varepsilon) = -y(1-x,\varepsilon), \quad v^{(+)}(x,\varepsilon) = -w(1-x,\varepsilon),$$
$$x = 1-t. \tag{30}$$

Задача (12), (13) примет вид

$$\varepsilon^2 \frac{d^2y}{dt^2} = \check{F}(y,w,t,\varepsilon), \quad \varepsilon\frac{d^2w}{dt^2} = \check{f}(y,w,t,\varepsilon),$$
$$0 < t < t_*, \tag{31}$$

$$\frac{dy}{dt}(0,\varepsilon) = 0, \quad \frac{dw}{dt}(0,\varepsilon) = 0,$$
$$y(t_*,\varepsilon) = \check{\varphi}_2(w_*,t_*), \quad w(t_*,\varepsilon) = w_*, \tag{32}$$

где

$$\check{F}(y,w,t,\varepsilon) = -F(-y,-w,1-t,\varepsilon), \tag{33}$$

функция $\check{f}$ выражается через f таким же образом, $t_* = 1 - x_*$, $w_* = -v_*$. Для задачи (31), (32), которая имеет такой же вид, как и первая вспомогательная задача, можно будет воспользоваться результатами из п. 1, если её входные данные удовлетворяют условиям A1–A9.

Обозначим $\check{\varphi}_i(w,t) := -\varphi_{4-i}(-w,1-t)$, $i = 1,2,3$. Тогда для $\check{\varphi}_i(w,t)$ будут выполнены неравенства, аналогичные (4), а функция $\check{F}(y,w,t,\varepsilon)$ примет вид

$$\check{F}(y,w,t,\varepsilon) = $$
$$= -(y-\check{\varphi}_1(w,t))^2(y-\check{\varphi}_2(w,t))(y-\check{\varphi}_3(w,t))^2 -$$
$$- \varepsilon\check{F}_1(y,w,t,\varepsilon),$$

где $\check{F}_1$ и F_1 связаны соотношением вида (33). Следовательно, функция $\check{F}(y,w,t,\varepsilon)$ удовлетворяет условию A1.

Так как

$$\check{g}_i(w,t) := \check{f}(\check{\varphi}_i(w,t),w,t,0) = -g_{4-i}(-w,1-t),$$

уравнения $\check{g}_i(w,t) = 0$ при $i = 1,3$ имеют простые корни $w = w_i(t) = -v_{4-i}(1-t)$, $t \in [0;1]$, то есть в задаче (31), (32) выполнено условие A2.

Выполнение условия A3 в этой задаче очевидно.

Заметим теперь, что

$$\check{I}(w_0,t_0) := \int\limits_{\check{\varphi}_1(w_0,t_0)}^{\check{\varphi}_3(w_0,t_0)} \check{F}(y,w_0,t_0,0)\,dy = -I(-w_0,1-t_0),$$

$$\check{J}(w_0,t_0) := \int\limits_{w_1(t_0)}^{w_0} \check{g}_1(w,t_0)\,dw + \int\limits_{w_0}^{w_3(t_0)} \check{g}_3(w,t_0)\,dw =$$
$$= -J(-w_0,1-t_0).$$

Отсюда в силу условия A4 для исходной задачи (1), (2) следует, что система уравнений $\check{I}(w_0,t_0) = 0$, $\check{J}(w_0,t_0) = 0$ имеет решение $w_0 = \bar{w}_0 = -\bar{v}_0$, $t_0 = \bar{t}_0 = 1 - \bar{x}_0$, $0 < \bar{t}_0 < 1$, для которого выполняются аналоги неравенств (7) и (8). Это означает, что условие A4 выполнено и для задачи (31), (32).

Сформулируем теперь условия A10–A14 для исходной задачи, которые после замены (30) перейдут в условия A5–A9 для задачи (31), (32).

Условие A10. Пусть $F_1(\varphi_3(v_3(x),x),v_3(x),x,0) < 0$, $x \in [\bar{x}_0;1]$.

Условие A11. Пусть $\dfrac{\partial g_3}{\partial v}(v_3(x),x) > 0$, $x \in [\bar{x}_0;1]$ и $\dfrac{\partial g_3}{\partial v}(v,\bar{x}_0) > 0$, $v \in [\bar{v}_0; v_3(\bar{x}_0)]$.

Условие A12. Пусть

$$G_3(v,\bar{x}_0) + F_1(\varphi_3(v,\bar{x}_0),v,\bar{x}_0,0) < 0, \; v \in [\bar{v}_0; v_3(\bar{x}_0)],$$

где

$$G_3(v,x) := \frac{\partial\varphi_3}{\partial v}(v,x)g_3(v,x) +$$
$$+ 2\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial v^2}(v,x)\int\limits_{v_3(x)}^{v} g_3(s,x)\,ds.$$

Условие A13. Пусть $\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial v}(v_3(x),x) > 0$, $x \in [\bar{x}_0;1]$ и $\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial v}(v,\bar{x}_0) > 0$, $v \in [\bar{v}_0; v_3(\bar{x}_0)]$.

Условие A14. Пусть $\dfrac{\partial F}{\partial v}(u,\bar{v}_0,\bar{x}_0,0) < 0$ при $\varphi_2(\bar{v}_0,\bar{x}_0) \le u < \varphi_3(\bar{v}_0,\bar{x}_0)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v,x,0) < 0$ при $(u,v,x) \in l^{(+)} = l_4 \cup l_5 \cup l_6$, где l_4, l_5, l_6 — кривые в пространстве переменных (u,v,x), аналогичные кривым l_1, l_2, l_3 из условия A9:

$$l_4 = \{(u,v,x)\colon \varphi_2(\bar{v}_0,\bar{x}_0) \le u \le \varphi_3(\bar{v}_0,\bar{x}_0),\\ v=\bar{v}_0, x=\bar{x}_0\},$$

$$l_5 = \{(u,v,x)\colon u=\varphi_3(v,\bar{x}_0), \bar{v}_0 \le v \le v_3(\bar{x}_0), x=\bar{x}_0\},$$

$$l_6 = \{(u,v,x)\colon u=\varphi_3(v_3(x),x), v=v_3(x), \bar{x}_0 \le x \le 1\}.$$

Нетрудно видеть, что если выполнены условия A1–A4 и A10–A14, то входные данные задачи (31), (32) удовлетворяют условиям A1–A9. Следовательно, по теореме 1 эта задача имеет решение $y(t,\varepsilon)$, $w(t,\varepsilon)$, асимптотика которого имеет вид, аналогичный (14), (15). Но тогда функции $u^{(+)}(x,\varepsilon)$, $v^{(+)}(x,\varepsilon)$, определённые формулами (30), будут решением второй вспомогательной задачи с асимптотикой

$$U^{(+)}(x,\varepsilon) = \bar{u}^{(+)}(x,\varepsilon) + \Pi^{(+)}u\left(\tilde{\xi},\varepsilon\right) + \\ + P^{(+)}u\left(\tilde{\zeta},\varepsilon\right) + Q^{(+)}u(\tau,\varepsilon) + R^{(+)}u(\sigma,\varepsilon), \quad (34)$$

$$V^{(+)}(x,\varepsilon) = \bar{v}^{(+)}(x,\varepsilon) + \Pi^{(+)}v\left(\tilde{\xi},\varepsilon\right) + \\ + P^{(+)}v\left(\tilde{\zeta},\varepsilon\right) + Q^{(+)}v(\tau,\varepsilon) + R^{(+)}v(\sigma,\varepsilon), \quad (35)$$

где $\bar{u}^{(+)}(x,\varepsilon)$, $\bar{v}^{(+)}(x,\varepsilon)$ — регулярные части асимптотики; $\Pi^{(+)}u\left(\tilde{\xi},\varepsilon\right)$, $\Pi^{(+)}v\left(\tilde{\xi},\varepsilon\right)$ и $P^{(+)}u\left(\tilde{\zeta},\varepsilon\right)$, $P^{(+)}v\left(\tilde{\zeta},\varepsilon\right)$ — погранслойные части асимптотики в окрестности точки $x=1$; $Q^{(+)}u(\tau,\varepsilon)$, $Q^{(+)}v(\tau,\varepsilon)$ и $R^{(+)}u(\sigma,\varepsilon)$, $R^{(+)}v(\sigma,\varepsilon)$ — внутрислойные части асимптотики, описывающие быстрое изменение решения в правой полуокрестности точки перехода x_*; $\tilde{\xi} = (1-x)/\sqrt{\varepsilon}$, $\tilde{\zeta} = (1-x)/\varepsilon^{3/4}$, $\tau = (x-x_*)/\sqrt{\varepsilon}$, $\sigma = (x-x_*)/\varepsilon$. При этом $\bar{u}_0^{(+)}(x) = \varphi_3(v_3(x),x)$, $\bar{v}_0^{(+)}(x) = v_3(x)$, что согласуется с (9).

Чтобы сформулировать теорему 2, обозначим через $U_n^{(+)}(x,\varepsilon)$ и $V_n^{(+)}(x,\varepsilon)$ следующие частичные суммы рядов (34) и (35):

$$U_n^{(+)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i/2}\bar{u}_i^{(+)}(x) + \sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{2n}\varepsilon^{i/4}\Pi_i^{(+)}u\left(\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \varepsilon^{3/4}\sum_{i=0}^{2n}\varepsilon^{i/4}P_i^{(+)}u\left(\frac{1-x}{\varepsilon^{3/4}}\right) + \\ + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/4}Q_i^{(+)}u\left(\frac{x-x_*}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/4}R_i^{(+)}u\left(\frac{x-x_*}{\varepsilon}\right), \quad (36)$$

$$V_n^{(+)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i/2}\bar{v}_i^{(+)}(x) + \sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{2n}\varepsilon^{i/4}\Pi_i^{(+)}v\left(\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \varepsilon^{5/4}\sum_{i=0}^{2n-2}\varepsilon^{i/4}P_i^{(+)}v\left(\frac{1-x}{\varepsilon^{3/4}}\right) + \\ + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/4}Q_i^{(+)}v\left(\frac{x-x_*}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/4}R_i^{(+)}v\left(\frac{x-x_*}{\varepsilon}\right). \quad (37)$$

Теорема 2 *Пусть выполнены условия A1–A4 и A10–A14. Тогда для любых v_* и x_*, достаточно близких к $\bar{v}_0$ и $\bar{x}_0$, и для любого натурального числа n при достаточно малых ε существует решение $u^{(+)}(x,\varepsilon)$, $v^{(+)}(x,\varepsilon)$ задачи (12), (13), для которого при каждом $m = 0,1,\ldots,n$ имеет место представление*

$$u^{(+)}(x,\varepsilon) = U_m^{(+)}(x,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{(m+1)/2}\right), \\ v^{(+)}(x,\varepsilon) = V_m^{(+)}(x,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{(m+1)/2}\right), \ x \in [x_*;1]. \quad (38)$$

Следствие 2.1 *Предельным положением при $\varepsilon \to 0$ кривой $l_\varepsilon^{(+)} = \{(u,v,x)\colon u = u^{(+)}(x,\varepsilon), v = v^{(+)}(x,\varepsilon), x_* \le x \le 1\}$ (т. е. графика решения задачи (12), (13)) является кривая $l_*^{(+)}$, которая определяется так же, как кривая $l^{(+)}$ в условии A14, с заменой $\bar{v}_0$ и $\bar{x}_0$ на v_* и x_*.*

Следствие 2.2 *Стандартным способом получаются асимптотические представления для производных решения:*

$$\frac{du^{(+)}}{dx}(x,\varepsilon) = \frac{dU_n^{(+)}}{dx}(x,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{(n-1)/2}\right),$$
$$\frac{dv^{(+)}}{dx}(x,\varepsilon) = \frac{dV_n^{(+)}}{dx}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n/2}),\ x\in[x_*;1]. \tag{39}$$

Выпишем выражения для производных внутрислойных функций, которые понадобятся в п. 3:

$$\frac{dQ_0^{(+)}v}{d\tau} = \left(2\int\limits_0^{Q_0^{(+)}v} g_3\left(\bar{v}_0^{(+)}(x_*)+s, x_*\right)ds\right)^{1/2}, \ \tau\geq 0, \tag{40}$$

$$\frac{dR_0^{(+)}u}{d\sigma} = \Big(2\int\limits_0^{R_0^{(+)}u} h^{(+)}(\varphi_3(v_*,x_*)+s, v_*, x_*)\times$$
$$\times (s^2 - 2\sqrt{\varepsilon}\check{b}s)\,ds\Big)^{1/2},\ \sigma\geq 0, \tag{41}$$

где $h^{(+)}(u,v,x) := -(u-\varphi_1(v,x))^2(u-\varphi_2(v,x))$, $\check{b}$ — положительное число, которое выражается через входные данные задачи (31), (32) таким же образом, как b — через входные данные исходной задачи (см. (20)). Также нам понадобится оценка

$$\frac{dR_0^{(+)}v}{d\sigma}(0) = O(\sqrt{\varepsilon}). \tag{42}$$

3. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Решения $u^{(-)}$, $v^{(-)}$ и $u^{(+)}$, $v^{(+)}$ первой и второй вспомогательных задач зависят от v_* и x_* как от параметров. Введём обозначения, отражающие эту зависимость: $u^{(-)}(x,\varepsilon,v_*,x_*)$, $v^{(-)}(x,\varepsilon,v_*,x_*)$ и $u^{(+)}(x,\varepsilon,v_*,x_*)$, $v^{(+)}(x,\varepsilon,v_*,x_*)$.

Для любых v_* и x_*, достаточно близких к $\bar{v}_0$ и $\bar{x}_0$, решения $u^{(-)}$, $v^{(-)}$ и $u^{(+)}$, $v^{(+)}$ непрерывно сшиваются в точке x_*, так как (см. (11) и (13))

$$u^{(-)}(x_*,\varepsilon,v_*,x_*) = u^{(+)}(x_*,\varepsilon,v_*,x_*) = \varphi_2(v_*,x_*),$$

$$v^{(-)}(x_*,\varepsilon,v_*,x_*) = v^{(+)}(x_*,\varepsilon,v_*,x_*) = v_*.$$

Поэтому функции

$$u(x,\varepsilon) = \begin{cases} u^{(-)}(x,\varepsilon,v_*,x_*), & 0\leq x\leq x_*,\\ u^{(+)}(x,\varepsilon,v_*,x_*), & x_*\leq x\leq 1;\end{cases}$$

$$v(x,\varepsilon) = \begin{cases} v^{(-)}(x,\varepsilon,v_*,x_*), & 0\leq x\leq x_*,\\ v^{(+)}(x,\varepsilon,v_*,x_*), & x_*\leq x\leq 1\end{cases}$$

будут решением исходной задачи (1), (2) с внутренним переходным слоем в окрестности точки x_*, если в этой точке непрерывно сшиваются также и производные $\frac{du^{(-)}}{dx}$ и $\frac{du^{(+)}}{dx}$, $\frac{dv^{(-)}}{dx}$ и $\frac{dv^{(+)}}{dx}$, т. е. если

$$\frac{du^{(-)}}{dx}(x_*,\varepsilon,v_*,x_*) - \frac{du^{(+)}}{dx}(x_*,\varepsilon,v_*,x_*) = 0,$$
$$\frac{dv^{(-)}}{dx}(x_*,\varepsilon,v_*,x_*) - \frac{dv^{(+)}}{dx}(x_*,\varepsilon,v_*,x_*) = 0. \tag{43}$$

Докажем, что существует решение системы уравнений (43) относительно v_*, x_*, сколь угодно близкое к $\bar{v}_0$, $\bar{x}_0$ при достаточно малых ε. С этой целью построим сначала формальные асимптотические ряды для v_* и x_* следующим образом. Подставим в равенства (43) вместо $u^{(-)}$ и $v^{(-)}$ ряды (14) и (15), а вместо $u^{(+)}$ и $v^{(+)}$ — ряды (34) и (35), с учётом того, что производные $\Pi^{(\pm)}$-функций и $P^{(\pm)}$-функций равны нулю в точке x_* (это является результатом стандартной процедуры умножения погранслойных функций на бесконечно дифференцируемые срезающие функции, см. [2, с. 82]). После умножения первого равенства на ε и второго — на $\sqrt{\varepsilon}$ получим равенства

$$\varepsilon\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\frac{d\bar{u}_i^{(-)}}{dx}(x_*) + \sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\frac{dQ_i^{(-)}u}{d\tau}(0,v_*,x_*) + \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\frac{dR_i^{(-)}u}{d\sigma}(0,v_*,x_*) -$$
$$-\varepsilon\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\frac{d\bar{u}_i^{(+)}}{dx}(x_*) - \sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\frac{dQ_i^{(+)}u}{d\tau}(0,v_*,x_*) - \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\frac{dR_i^{(+)}u}{d\sigma}(0,v_*,x_*) = 0, \tag{44}$$

$$\sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\frac{d\bar{v}_i^{(-)}}{dx}(x_*) + \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\frac{dQ_i^{(-)}v}{d\tau}(0,v_*,x_*) + \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\frac{dR_i^{(-)}v}{d\sigma}(0,v_*,x_*) -$$
$$-\sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\frac{d\bar{v}_i^{(+)}}{dx}(x_*) - \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\frac{dQ_i^{(+)}v}{d\tau}(0,v_*,x_*) - \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\frac{dR_i^{(+)}v}{d\sigma}(0,v_*,x_*) = 0, \tag{45}$$

в записи которых отражён тот факт, что внутрислойные $Q^{(\pm)}$- и $R^{(\pm)}$-функции зависят от v_* и x_*, как от параметров.

Асимптотические ряды для v_* и x_* будем строить в виде

$$v_* = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} v_i, \quad x_* = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} x_i. \tag{46}$$

Подставим (46) в (44), (45) и разложим левые части равенств в ряды по целым степеням $\sqrt[4]{\varepsilon}$, после чего будем приравнивать нулю коэффициенты разложений.

Учитывая (25) и (42), в нулевом порядке получим уравнения относительно v_0, x_0:

$$\frac{dR_0^{(-)}u}{d\sigma}(0, v_0, x_0) = \frac{dR_0^{(+)}u}{d\sigma}(0, v_0, x_0),$$
$$\frac{dQ_0^{(-)}v}{d\tau}(0, v_0, x_0) = \frac{dQ_0^{(+)}v}{d\tau}(0, v_0, x_0).$$

Подставляя в них выражения (16), (19), (40), (41) для производных, приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{I}(v_0, x_0) &:= \sqrt{2\int_{\varphi_1(v_0,x_0)}^{\varphi_2(v_0,x_0)} F(u, v_0, x_0, 0)\, du} - \sqrt{2\int_{\varphi_3(v_0,x_0)}^{\varphi_2(v_0,x_0)} F(u, v_0, x_0, 0)\, du} = 0, \\ \tilde{J}(v_0, x_0) &:= \sqrt{2\int_{v_1(x_0)}^{v_0} g_1(v, x_0)\, dv} - \sqrt{2\int_{v_3(x_0)}^{v_0} g_3(v, x_0)\, dv} = 0. \end{aligned} \tag{47}$$

Эта система эквивалентна системе (5), (6), которая в силу условия A4 имеет решение $v_0 = \bar{v}_0$, $x_0 = \bar{x}_0$. В следующих порядках при $i \geq 1$ будут получаться СЛАУ вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{I}}{\partial v_0}(\bar{v}_0, \bar{x}_0) v_i + \frac{\partial \tilde{I}}{\partial x_0}(\bar{v}_0, \bar{x}_0) x_i = a_i, \\ \frac{\partial \tilde{J}}{\partial v_0}(\bar{v}_0, \bar{x}_0) v_i + \frac{\partial \tilde{J}}{\partial x_0}(\bar{v}_0, \bar{x}_0) x_i = b_i, \end{aligned} \tag{48}$$

где числа a_i и b_i рекуррентно выражаются через v_j и x_j с номерами $j < i$, которые на i-м шаге уже известны. Определителем этой системы является якобиан $\left.\dfrac{D(\tilde{I}, \tilde{J})}{D(v_0, x_0)}\right|_{v_0=\bar{v}_0,\, x_0=\bar{x}_0}$, равный произведению положительного множителя на якобиан $\left.\dfrac{D(I, J)}{D(v_0, x_0)}\right|_{v_0=\bar{v}_0,\, x_0=\bar{x}_0}$, который отличен от нуля (см. (8)). Поэтому для каждого $i \geq 1$ СЛАУ имеет единственное решение $v_i = \bar{v}_i$, $x_i = \bar{x}_i$. Таким образом, построены ряды (46), в которых $v_i = \bar{v}_i$, $x_i = \bar{x}_i$, и эти ряды удовлетворяют формально уравнениям (44), (45).

Положим теперь

$$\begin{aligned} v_* = Y_m(\delta) &:= \sum_{i=0}^{2m+3} \varepsilon^{i/4} \bar{v}_i + \varepsilon^{m/2+3/4}\delta, \\ x_* = X_m(\rho) &:= \sum_{i=0}^{2m+3} \varepsilon^{i/4} \bar{x}_i + \varepsilon^{m/2+3/4}\rho, \end{aligned} \tag{49}$$

где δ и ρ — произвольные числа, которые могут зависеть от ε, но остаются ограниченными при $\varepsilon \to 0$, и рассмотрим решения $u^{(-)}(x, \varepsilon, Y_m(\delta), X_m(\rho))$, $v^{(-)}(x, \varepsilon, Y_m(\delta), X_m(\rho))$ и $u^{(+)}(x, \varepsilon, Y_m(\delta), X_m(\rho))$, $v^{(+)}(x, \varepsilon, Y_m(\delta), X_m(\rho))$ первой и второй вспомогательных задач. Для их производных по x справедливы представления (29) и (39). Возьмём эти представления при $n = m + 1$, положим $x = X_m(\rho)$ и, учитывая, что в точке $x = X_m(\rho)$ производные всех $\Pi^{(\pm)}$-функций и $P^{(\pm)}$-функций равны нулю, подставим полученные выражения для производных в уравнения (43) и разложим левые части уравнений по целым степеням $\sqrt[4]{\varepsilon}$. Так как $(\bar{v}_0, \bar{x}_0)$ и $(\bar{v}_i, \bar{x}_i)$ удовлетворяют уравнениям (47) и (48), то левые части уравнений (43) примут вид

$$\begin{aligned} &\varepsilon \left(\frac{du^{(-)}}{dx}(X_m(\rho), \varepsilon, Y_m(\delta), X_m(\rho)) - \frac{du^{(+)}}{dx}(X_m(\rho), \varepsilon, Y_m(\delta), X_m(\rho)) \right) = \\ &= \tilde{I}(\bar{v}_0, \bar{x}_0) + \sum_{i=1}^{2m+3} \varepsilon^{i/4} \left(\frac{\partial \tilde{I}}{\partial v_0}(\bar{v}_0, \bar{x}_0)\bar{v}_i + \frac{\partial \tilde{I}}{\partial x_0}(\bar{v}_0, \bar{x}_0)\bar{x}_i - a_i \right) + \varepsilon^{m/2+3/4} \left(\frac{\partial \tilde{I}}{\partial v_0}(\bar{v}_0, \bar{x}_0)\delta + \frac{\partial \tilde{I}}{\partial x_0}(\bar{v}_0, \bar{x}_0)\rho \right) + O(\varepsilon^{m/2+1}) = \\ &= \varepsilon^{m/2+3/4} \left(\frac{\partial \tilde{I}}{\partial v_0}(\bar{v}_0, \bar{x}_0)\delta + \frac{\partial \tilde{I}}{\partial x_0}(\bar{v}_0, \bar{x}_0)\rho + O(\varepsilon^{1/4}) \right), \end{aligned} \tag{50}$$

$$\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{dv^{(-)}}{dx}(X_m(\rho),\varepsilon,Y_m(\delta),X_m(\rho))-\frac{dv^{(+)}}{dx}(X_m(\rho),\varepsilon,Y_m(\delta),X_m(\rho))\right)=$$
$$=\tilde{J}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)+\sum_{i=1}^{2m+3}\varepsilon^{i/4}\left(\frac{\partial\tilde{J}}{\partial v_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)\bar{v}_i+\frac{\partial\tilde{J}}{\partial x_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)\bar{x}_i-b_i\right)+\varepsilon^{m/2+3/4}\left(\frac{\partial\tilde{J}}{\partial v_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)\delta+\frac{\partial\tilde{J}}{\partial x_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)\rho\right)+O(\varepsilon^{m/2+1})=$$
$$=\varepsilon^{m/2+3/4}\left(\frac{\partial\tilde{J}}{\partial v_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)\delta+\frac{\partial\tilde{J}}{\partial x_0}(\bar{v}_0,\bar{x}_0)\rho+O(\varepsilon^{1/4})\right). \quad (51)$$

Слагаемые $O(\varepsilon^{1/4})$ в правых частях равенств (50) и (51) зависят от δ и ρ, но являются величинами указанного порядка малости при $\varepsilon\to 0$ равномерно относительно δ и ρ из фиксированной окрестности точки $(\delta=0,\rho=0)$, а так как $\left.\dfrac{D(\tilde{I},\tilde{J})}{D(v_0,x_0)}\right|_{v_0=\bar{v}_0,\,x_0=\bar{x}_0}\neq 0$, то при достаточно малых ε существуют такие $\delta=\bar{\delta}=O(\varepsilon^{1/4})$ и $\rho=\bar{\rho}=O(\varepsilon^{1/4})$, для которых правые части в (50) и (51) равны нулю. Следовательно, $v_*=Y_m(\bar{\delta})$ и $x_*=X_m(\bar{\rho})$ являются решением системы уравнений (43), а пара функций

$$u(x,\varepsilon)=\begin{cases}u^{(-)}(x,\varepsilon,Y_m(\bar{\delta}),X_m(\bar{\rho})), & 0\le x\le X_m(\bar{\rho}),\\ u^{(+)}(x,\varepsilon,Y_m(\bar{\delta}),X_m(\bar{\rho})), & X_m(\bar{\rho})\le x\le 1;\end{cases}$$

$$v(x,\varepsilon)=\begin{cases}v^{(-)}(x,\varepsilon,Y_m(\bar{\delta}),X_m(\bar{\rho})), & 0\le x\le X_m(\bar{\rho}),\\ v^{(+)}(x,\varepsilon,Y_m(\bar{\delta}),X_m(\bar{\rho})), & X_m(\bar{\rho})\le x\le 1\end{cases}$$

является решением задачи (1), (2) с внутренним переходным слоем в окрестности точки $X_m(\bar{\rho})$. Заметим, что $Y_m(\bar{\delta})$ и $X_m(\bar{\rho})$ сколь угодно близки к $\bar{v}_0$ и $\bar{x}_0$ для достаточно малых ε, что и требовалось при разбиении исходной задачи на две вспомогательные.

Обозначим через $U_n^{(\pm)}(x,\varepsilon,V,X)$ и $V_n^{(\pm)}(x,\varepsilon,V,X)$ функции, определённые формулами (26), (27) и (36), (37) при $v_*=V$, $x_*=X$. Тогда для решения $u(x,\varepsilon)$, $v(x,\varepsilon)$ исходной задачи (1), (2) в силу (28) и (38) при $m\ge 1$ справедливо асимптотическое представление

$$u(x,\varepsilon)=\begin{cases}U_{m-1}^{(-)}(x,\varepsilon,Y_m(\bar{\delta}),X_m(\bar{\rho}))+O(\varepsilon^{m/2}), & 0\le x\le X_m(\bar{\rho}),\\ U_{m-1}^{(+)}(x,\varepsilon,Y_m(\bar{\delta}),X_m(\bar{\rho}))+O(\varepsilon^{m/2}), & X_m(\bar{\rho})\le x\le 1;\end{cases}$$
$$v(x,\varepsilon)=\begin{cases}V_{m-1}^{(-)}(x,\varepsilon,Y_m(\bar{\delta}),X_m(\bar{\rho}))+O(\varepsilon^{m/2}), & 0\le x\le X_m(\bar{\rho}),\\ V_{m-1}^{(+)}(x,\varepsilon,Y_m(\bar{\delta}),X_m(\bar{\rho}))+O(\varepsilon^{m/2}), & X_m(\bar{\rho})\le x\le 1.\end{cases} \quad (52)$$

Формулы (52) имеют тот недостаток, что величины $\bar{\delta}$ и $\bar{\rho}$, от которых зависят $U_{m-1}^{(\pm)}$, $V_{m-1}^{(\pm)}$, точно не известны, известен только их порядок ($\bar{\delta}=O(\varepsilon^{1/4})$, $\bar{\rho}=O(\varepsilon^{1/4})$), и, следовательно, $Y_m(\bar{\delta})$, $X_m(\bar{\rho})$, $\tau=(x-X_m(\bar{\rho}))/\sqrt{\varepsilon}$ и $\sigma=(x-X_m(\bar{\rho}))/\varepsilon$ также не определены точно. Заменим в формулах (52) $Y_m(\bar{\delta})$ на $Y_m(0)$ и $X_m(\bar{\rho})$ на $X_m(0)$, т. е. в выражениях (49) для $Y_m(\bar{\delta})$ и $X_m(\bar{\rho})$ отбросим последние слагаемые $\varepsilon^{m/2+3/4}\bar{\delta}=O(\varepsilon^{m/2+1})$ и $\varepsilon^{m/2+3/4}\bar{\rho}=O(\varepsilon^{m/2+1})$. Тогда аргумент τ и $Q^{(\pm)}$-функции изменятся на величины порядка $O(\varepsilon^{m/2+1/2})$, а аргумент σ и $R^{(\pm)}$-функции — на величины порядка $O(\varepsilon^{m/2})$. Поэтому при замене $Y_m(\bar{\delta})$ на $Y_m(0)$ и $X_m(\bar{\rho})$ на $X_m(0)$ формулы (52) не изменятся.

Заменив в этих формулах m на $n+1$, сформулируем полученный основной результат.

Теорема 3 *Пусть выполнены условия A1–A14. Тогда для любого целого $n\ge 0$ при достаточно малых ε существует решение $u(x,\varepsilon)$, $v(x,\varepsilon)$ задачи (1), (2), для которого справедливы асимптотические равенства*

$$u(x,\varepsilon)=U_n(x,\varepsilon)+O\left(\varepsilon^{(n+1)/2}\right),\quad v(x,\varepsilon)=V_n(x,\varepsilon)+O\left(\varepsilon^{(n+1)/2}\right),\quad x\in[0;1], \quad (53)$$

где

$$U_n(x,\varepsilon)=\begin{cases}U_n^{(-)}(x,\varepsilon,Y_{n+1}(0),X_{n+1}(0)), & 0\le x\le X_{n+1}(0),\\ U_n^{(+)}(x,\varepsilon,Y_{n+1}(0),X_{n+1}(0)), & X_{n+1}(0)\le x\le 1;\end{cases}$$

$$V_n(x,\varepsilon) = \begin{cases} V_n^{(-)}(x,\varepsilon,Y_{n+1}(0),X_{n+1}(0)), & 0 \le x \le X_{n+1}(0), \\ V_n^{(+)}(x,\varepsilon,Y_{n+1}(0),X_{n+1}(0)), & X_{n+1}(0) \le x \le 1; \end{cases}$$

$Y_{n+1}(0) = \sum_{i=0}^{2n+5} \varepsilon^{i/4}\bar{v}_i$, $X_{n+1}(0) = \sum_{i=0}^{2n+5} \varepsilon^{i/4}\bar{x}_i$, *а функции* $U_n^{(-)}$, $V_n^{(-)}$ *и* $U_n^{(+)}$, $V_n^{(+)}$ *определены формулами* (26), (27) *и* (36), (37), *в которых* $x_* = X_{n+1}(0)$.

Следствие 3.1 *Из* (53) *следуют предельные равенства* (9).

Следствие 3.2 *Предельным положением при* $\varepsilon \to 0$ *кривой* $l_\varepsilon = \{(u,v,x)\colon u = u(x,\varepsilon), v = v(x,\varepsilon), 0 \le x \le 1\}$ *является кривая* $l = l^{(-)} \cup l^{(+)}$, *где* $l^{(-)}$ *и* $l^{(+)}$ *определены в условиях A9 и A14.*

Следствие 3.3 *Из* (53) *следует, что для каждого* $m = 0,1,\ldots,n-1$ *для решения* $u(x,\varepsilon)$, $v(x,\varepsilon)$ *справедливы равенства вида* (53), *в которых* n *заменено на* m.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Доказано, что для достаточно малых значений малого параметра предложенная задача имеет решение, обладающее быстрым переходом от одного двукратного корня вырожденного уравнения к другому двукратному корню в окрестности некоторой внутренней точки отрезка. Построено и обосновано полное асимптотическое разложение этого решения. Оно качественно отличается от известного разложения в случае, когда все корни вырожденного уравнения — простые. В частности, разложение ведётся не по целым, а по дробным степеням малого параметра, погранслойные переменные имеют другой масштаб, а переходный слой оказывается восьмизонным.

Материалы статьи докладывались на конференции «Ломоносов-2020».

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-01-00424).

[1] *Бутузов В.Ф., Левашова Н.Т., Мельникова А.А.* // Журнал вычисл. математики и матем. физики. 2012. **52**, № 11. С. 1983.
[2] *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.
[3] *Бутузов В.Ф., Симаков Р.Е.* Асимптотика решения сингулярно возмущённой системы уравнений с многозонным внутренним слоем // Дифференц. уравнения. 2021. **57**, № 4. С. 435
[4] *Бутузов В.Ф.* // Моделирование и анализ информационных систем. 2015. **22**, № 1. С. 5.
[5] *Бутузов В.Ф.* // Матем. заметки. 2013. **94**, № 1. С. 68.
[6] *Бутузов В.Ф.* // Дифференц. уравнения. 2015. **51**, № 12. С. 1593.
[7] *Бутузов В.Ф.* // Изв. РАН. Сер. матем. 2020. **84**, № 2. С. 60.

Asymptotics of a step-like contrast structure with a multizonal interior layer

R. E. Simakov[a]

Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia
E-mail: [a]*simakov.re14@physics.msu.ru*

A boundary value problem for a singularly perturbed system of two second order ODEs with different degrees of the small parameter at the second derivatives is considered. The peculiarity of the problem is that one of the two equations of the degenerate system has three disjoint roots, two of which are double, and the third is simple (single). It is proved that for sufficiently small values of a small parameter, the problem has a solution with a fast transition from one double root of the degenerate equation to another double root in a neighborhood of some interior point of the segment. A complete asymptotic expansion of this solution is constructed and substantiated. It differs qualitatively from the well-known expansion in the case when all the roots of the degenerate equation are simple. In particular, the expansion is carried out not in integer but in fractional powers of the small parameter, the boundary layer variables have a different scale, and the transition layer turns out to be eight-zone.

PACS: 02.30.Hq, 02.30.Mv.

Keywords: singularly perturbed boundary value problems, interior transition layer, asymptotics in a small parameter, the case of a multiple root of a degenerate equation.

Received 16 January 2021.

Сведения об авторах

Симаков Роман Евгеньевич — аспирант; e-mail: simakov.re14@physics.msu.ru.