

Демонстрация сложного вращательного движения твердого тела

С. С. Кротов,^{*} С. А. Шутеев,[†] В. Г. Еленский[‡]

¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра общей физики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
(Статья поступила 10.11.2018; Подписана в печать 10.12.2018)

Используя простейшее устройство для демонстрации особенностей движения твердого тела, известного как «вращающаяся трубка», предлагаются несколько его усовершенствованных вариантов, позволяющих визуализировать такое понятие кинематики твердого тела, как ось мгновенного вращения. Существенное отличие предложенных в работе устройств от других нелинейных систем состоит в том, что достижение всеми изучаемыми в статье конструкциями стационарных фаз происходит во времени не экспоненциально, а за конечное время — благодаря свойствам сухого трения.

PACS: 01.30.L; 01.50.Му; 01.50.Wg

УДК: 53.072

Ключевые слова: физические демонстрации, движение твердого тела, ось мгновенного вращения.

ВВЕДЕНИЕ

В 1993 г. на физических конференциях [1, 2] была впервые показана так называемая «вращающаяся трубка» — удивительно простое нелинейное демонстрационное устройство, представляющее собой однородный тонкостенный цилиндр из полихлорвинила, вращающийся на шероховатой горизонтальной поверхности. На противоположных концах трубки нанесены два разноцветных креста — например, красный и зеленый (рис. 1) (существует и другой вариант, когда на одном её конце — крест, а на другом — круг). Трубку, находящуюся на горизонтальной поверхности, приводили в движение, резко нажимая пальцем на один из её концов (допустим, с красным крестом) перпендикулярно оси. Через небольшой интервал времени на пришедшей во вращение трубке можно было отчетливо различить практически неподвижные и расположившиеся в вершинах правильного многоугольника только красные кресты [3]. При надавливании на противоположный конец трубки можно было при ее вращении наблюдать практически неподвижные зеленые кресты, также являющиеся вершинами правильного многоугольника.

Karl C. Mamlola, автор одной из первых работ о «вращающейся трубке» [4], дал простое и наглядное объяснение ее необычного движения. Он, указав на существенную роль сил сухого трения и, как следствие, на принципиально нелинейное поведение трубки, показал, что в установившемся режиме движение трубки представляет собой согласованную суперпозицию двух вращений: одного — относительно горизонтальной оси трубки, второго — относительно вертикальной оси, проходящей через ее центр. В работе [4] было



Рис. 1: Вариант демонстрационного устройства «вращающаяся трубка»

также акцентировано внимание на отличной от прочих уникальности этой простой динамической системы. Действительно, существует не так много незамысловатых и простых в изготовлении механических систем, способных, с одной стороны, изящно продемонстрировать сложное вращательное движение, а с другой — допускающих краткое и доступное для понимания теоретическое описание. И впоследствии это было подтверждено ее необычайной привлекательностью и широким распространением. Поэтому неудивительно, что варианты этого устройства с разным кратным отношением длины трубки к ее диаметру стали использоваться в преподавании [3, 5, 6], предлагаться в качестве интересной научной забавы, а также довольно быстро дополнили коллекции механических экспонатов музеев науки [7–9]. «Вращающиеся трубки» вызывают неослабевающий интерес и сегодня. Они, как и раньше, являются предметом постоянного обсуждения [10–12], активно используются в качестве про-

^{*}E-mail: sskrotov@mail.ru

[†]E-mail: shuteev@phys.msu.ru

[‡]E-mail: nesu@phys.msu.ru

стейшей иллюстрации основных закономерностей в поведении неголономных динамических систем в учебном процессе [13].

Известные авторам данной работы наглядные демонстрации, предлагаемые при изучении вращательного движения твердых тел, визуализируют только **единичные неподвижные точки** движущегося твердого тела. В настоящей же работе путем оригинального выбора формы вращающегося тела и с использованием стробоскопического эффекта предлагается визуализация **целого отрезка оси** мгновенного вращения этого тела.

ОСНОВНЫЕ ИДЕИ И ВАРИАНТЫ РЕАЛИЗАЦИИ

Еще раз отметим, что обсуждаемые в статье варианты конструкции представляют собой простой вариант неголономных систем, характеризующихся нелинейным поведением. Рассмотрим общепринятое объяснение необычного поведения «вращающейся трубки» [3, 4, 13]. Под действием сил (и, соответственно, пар сил) трения в точках начального проскальзывания трубки по поверхности ее центр занимает практически неизменное положение, а её движение достаточно быстро «подстраивается» к вращению без проскальзывания. Установившееся движение трубки, независимо от интенсивности запуска, представляет собой суперпозицию двух согласованных вращений: одного, совершаемого относительно вертикальной оси, проходящей через центр трубки, и второго — вокруг собственной оси трубки. В этом случае векторы угловых скоростей ω_1 первого и ω_2 второго вращений направлены, очевидно, вдоль соответствующих осей (рис. 2), отношение их величин равно отношению длины трубки L к ее диаметру D :

$$|\omega_1|/|\omega_2| = L/D.$$

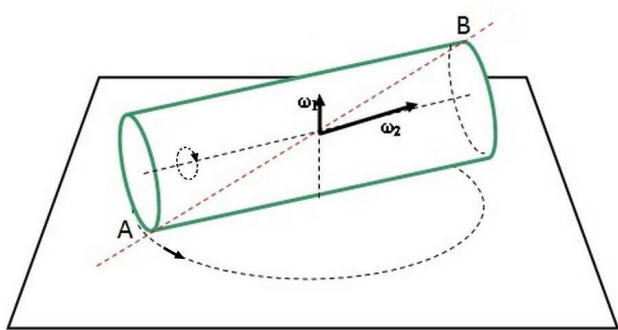


Рис. 2: Схематическое представление вращения трубки

Как следует, в частности, из работ [4, 12], в фазе установившегося движения трубки в каждый мо-

мент времени, помимо касающейся поверхности и не скользящей по ней точки трубки А, мгновенная скорость которой равна нулю (рис. 2), существует еще одна точка трубки В, центрально симметричная первой, мгновенная скорость которой при суперпозиции двух вращательных движений также должна быть нулевой. При этом ось трубки незначительно приподнята над поверхностью. Поскольку форма трубки при движении остается неизменной, то, очевидно, существует и жестко связанная с ней неподвижная прямая, проходящая через эту пару точек, — так называемая ось мгновенного вращения трубки. Таким образом, в каждый момент времени точки трубки, попадающие на жестко связанный с ней отрезок АВ, будут также неподвижны в момент касания точкой А горизонтальной плоскости.

Для реализации нашей идеи будем отталкиваться от приведенного выше известного случая движения трубки. Первое соображение, которое сразу приходит в голову, состоит в том, что нужно каким-то способом «материализовать» соответствующий отрезок, сделав его видимым. Для этого внутри исходной трубки, сделанной непременно из прозрачного материала, необходимо вдоль ее внутренней диагонали, проходящей через центр, закрепить тонкую видимую спицу. Правда, если в исходном варианте трубки ее главные оси инерции, ответственные за вращательную динамику, совпадали с элементами симметрии, то в данном случае добавленная спица приведет к тому, что главные оси инерции трубки (в том числе и ось инерции, проходящая вдоль геометрической оси трубки), слегка «уйдут» от своих исходных положений. Как следствие, нарушатся условия согласования двух вращений и характер вращения трубки изменится. (Лишь очень легкая спица не внесет существенных изменений в движение системы). Чтобы обойти указанные осложнения, можно использовать несколько таких спиц так, чтобы порядок оси симметрии трубки стал равен трем или больше. Это требование связано с тем, что минимальное число повернутых (вокруг оси трубки) друг относительно друга спиц, которые могут восстановить динамически осевую симметрию, должно быть равно трем. Действительно, тензору инерции твердого тела, являющемуся, как известно, симметричным тензором второго ранга, отвечает, в общем случае, характеристическая поверхность в виде эллипсоида общего вида. Для твердого тела, обладающего осевой симметрией не ниже третьего порядка, эллипсоид инерции становится одноосным, при этом две главных поперечных оси симметрии момента инерции будут равными. Тогда, с точки зрения вращательной динамики, инерциальные свойства тела совпадут с таковыми для обычной трубки.

Выберем вариант с четырьмя (при $L/D = 4$) тонкими спицами, проходящими через центр трубки и повернутыми относительно оси трубки под углом 90° . Если теперь три из четырех спиц сделать «невидимыми» (белыми), а четвертую покрасить в черный цвет, то в моменты нахождения черной спицы в вертикальной плоскости она будет неподвижна. С учетом общего

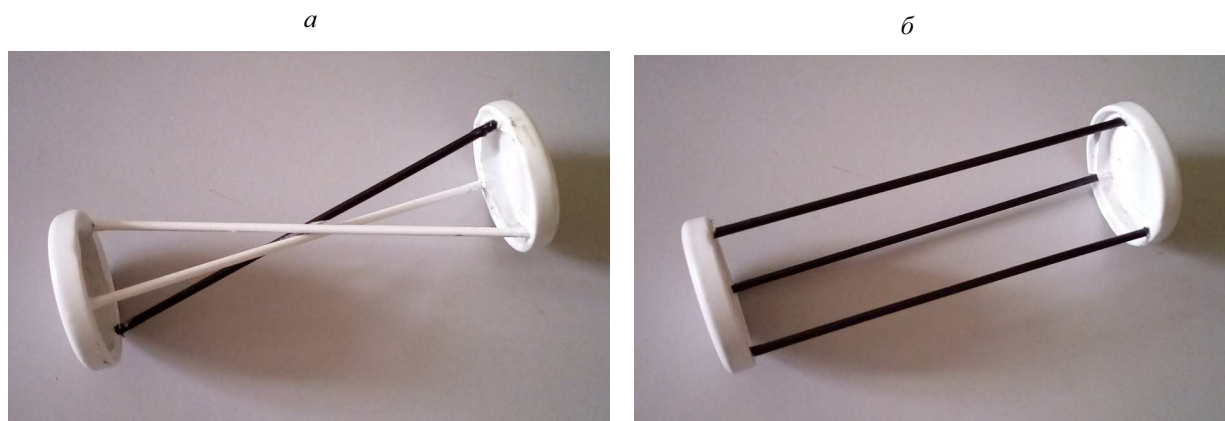


Рис. 3: «Скелетные» конструкции с отношением $L/D = 3$. *а* — спицы проходят через центр «трубки», *б* — вариант с параллельными спицами



Рис. 4: Коническая конструкция «вращающейся трубки»

характера движения трубки, помимо концов этой спицы (как в случае с обычной трубкой), станет видна вся спица. В качестве упрощенного варианта этой системы можно предложить соответствующий ее «скелет». В такой «скелетной» конструкции мы, сохранив четыре спицы, вообще «избавились» от боковой поверхности, но, чтобы обеспечить устойчивое вращение системы, добавили два легких основания в виде дисков или колец (соединенных спицами).

Очевидно, что все выше приведенные рассуждения будут справедливы и для варианта отношения $L/D = 3$. Реализация «скелетной» конструкции для него показана на рис. 3, *а*. На рис. 3, *б* приведен вариант конструкции с тремя параллельными спицами.

Перейдем теперь к основной предлагаемой нами возможности визуализации оси мгновенного вращения

твердого тела. С этой целью изменим внешнюю поверхность трубки таким образом, чтобы главные оси инерции нового тела по-прежнему совпадали с его геометрическими элементами симметрии, а ось собственной геометрической симметрии стала бесконечного порядка. Для этого вместо цилиндрической трубки воспользуемся дважды конической конструкцией, т.е. состоящей из двух одинаковых тонкостенных конусов, соприкасающихся вершинами, с общей осью вращения (рис. 4). Как нетрудно понять, этот случай является предельным в ряду «скелетных» конструкций, если число спиц «устремит к бесконечности», а основания из-за ненужности убрать.

На каждом из конусов окрасим одну из боковых образующих в два разных цвета. Если отношение полной высоты конической трубки к диаметру оснований сделать равным, например, трем, то при наблюдении за движением трубки сверху получим из-за стробоскопического эффекта устойчивую картину из трех окрашенных отрезков-радиусов, образующих друг с другом углы 120° . В зависимости от направления закручивания трубки радиусы будут одного или другого цвета.

Завершая рассмотрение, укажем на еще одну интересную демонстрацию, иллюстрирующую особенности движения разных точек «вращающейся трубки». Возьмем обычную тонкостенную трубку (при том же отношении длины к диаметру) белого цвета и на ее боковой поверхности окрасим одну из образующих. Тогда при движении трубки из-за усиливающейся размытости изображений точек этой образующей по мере их приближения к середине трубки получим «правильный» криволинейный треугольник, стороны которого оказываются, очевидно, вогнутыми внутрь и все сильнее размывающимися по мере приближения к середине каждой стороны, а при большой скорости вращения даже почти исчезающими. При нанесении на боковую поверхность трубки трех равноотстоящих и параллельных оси трубки окрашенных образующих картина, получающаяся при вращении трубки, представит собой три повернутых друг относительно

но друга «правильных» криволинейных треугольника, которая не оставит равнодушным даже искушенного в физике наблюдателя.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложен набор различных механических систем, представляющих собой несложные в изготовлении вращающиеся по шероховатой горизонтальной поверхности трубки. Их сложное вращательное движение определяется силами трения. Такие системы относятся к неголономным. В своем движении предлагаемые в работе различные вращающиеся конструкции обнаруживают две стадии. После запуска их движение достаточно быстро подстраивается к представляющему собой суперпозицию двух вращений стационарному состоянию, которое в рамках динамического описания представляет собой глобальный аттрактор. Движение каждой из рассматриваемых систем, не будучи чувствительным к начальным условиям, хотя и является в начале диссипативным (из-за проскальзывания по шероховатой поверхности), в последующем представляет устойчивую «траекторию» в переменных

угол–угол, которая расположена на бездиссипативном инвариантном торе.

Существенное отличие предложенных в работе устройств от других нелинейных систем состоит в том, что определяющими при достижении всеми изучаемыми в статье системами стационарных состояний движения являются силы сухого трения. Поэтому во времени они устанавливаются за конечный промежуток, а не экспоненциально, как у большинства нелинейных динамических систем. В качестве поясняющей аналогии такого отличия можно сослаться на известное различие движения груза на пружине под действием сил сухого трения по сравнению с силами жидкого трения. Уже сам по себе этот факт является интересным и полезным для изучения. С точки зрения наглядности и легкости восприятия данная работа построена по принципу от простого к сложному. При этом реализация основной идеи, предлагаемой для изучения работы, осуществляется постепенным конструкционным усложнением исследуемых систем. Как результат, учащимся предоставляется уникальная возможность глубоко и надежно усвоить такое непростое понятие механики твердого тела, как ось мгновенного вращения.

-
- [1] *Easter G. and Reitz B.* The AAPT annual summer meeting. Boise, Idaho, August 1993.
 - [2] *Edge R.* The American Physical Society annual meeting. Southeastern Section, November, 1993.
 - [3] *Ucke C., Schlichting H.-J.* // *Physik in unserer Zeit.* 2009. **40**, N 1. P. 52.
 - [4] *Mamola K. C.* // *The Physics Teacher.* 1994. **32**, N 4. P. 216.
 - [5] *Sikkema A. E., Steewik S. D., Zwart J. W.* // *Am. J. Phys.* 2010. **78**, N 5. P. 467.
 - [6] https://www.ligo.caltech.edu/LA/system/media_files/binaries/259/original/Spirotating_Cylinder_V2.pdf?1447168810
 - [7] [http://blog.teachersource.com/2011/02/09/phenomenon-](http://blog.teachersource.com/2011/02/09/phenomenon-of-the-disappearing-dot-is-it-physics-or-math-or-perception/)

- [of-the-disappearing-dot-is-it-physics-or-math-or-perception/](http://blog.teachersource.com/2011/02/09/phenomenon-of-the-disappearing-dot-is-it-physics-or-math-or-perception/)
- [8] <https://www.youtube.com/watch?v=wQTVcaA3PQw> –spinning tube trick
- [9] *Rathjen D., Doherty P.* Square Wheels: And Other Easy-to-build, Hands-on Science Activities (An Exploratorium Science Snackbook Series. Exploratorium Store, 2008.
- [10] <https://www.exploratorium.edu/snacks/spinning-cylinder>
- [11] <https://www.youtube.com/watch?v=JuuYFt8bahE>
- [12] https://www.youtube.com/watch?v=5dJsOF7_GfY
- [13] *Tokieda T.* // *The American Mathematical Monthly.* 2013. **120**, N 3. P. 265.

Demonstration of complex rotational motion of a rigid body

S. S. Krotov^a, S. A. Shuteev^b, V. G. Yelenskii^c

¹*Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Moscow 119991, Russia*
E-mail: ^asskrotov@mail.ru, ^bshuteev@phys.msu.ru, ^cnesu@phys.msu.ru

Taking a «rotating tube» as a starting point to demonstrate a rigid body motion peculiarities, several advanced options of such things are offered to visualize the corresponding concepts in kinematics, with the instantaneous axis of rotation having a special priority. The significant difference in behavior of the devices under consideration from other nonlinear systems concerns the time needed for the achievement of stationary phases. The corresponding time intervals are found to be finite, as opposed to exponential ones widely spread in nonlinear processes — due to dry friction.

PACS: 01.30.L; 01.50.My; 01.50.Wg.

Keywords: physical demonstrations, the motion of a rigid body, the instantaneous axis of rotation.

Received 10 November 2018.

Сведения об авторах

1. Кротов Сергей Сергеевич — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-17-97, e-mail: sskrotov@mail.ru.
 2. Шутеев Сергей Александрович — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-17-97, e-mail: shuteev@phys.msu.ru.
 3. Еленский Владимир Григорьевич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-17-97, e-mail: nesu@phys.msu.ru.
-