

О массопереносе, вызванном распространением волнового пакета по границе раздела жидких сред

А. А. Очиров*

Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова,
физический факультет, кафедра инфокоммуникаций и радиофизики
Россия, 150003, Ярославль, ул. Советская, д. 14/2

(Статья поступила 22.06.2018; Подписана в печать 19.08.2018)

В аналитическом асимптотическом анализе исследованы закономерности относительного массопереноса в системе двух идеальных несмешивающихся перемещающихся относительно друг друга жидкостей, по горизонтальной поверхности раздела которых распространяется волновой пакет Стокса.

PACS: 47.20.Ft, 47.35.-i

УДК: 532.59.

Ключевые слова: волновой пакет Стокса, дрейф Стокса, тангенциальный разрыв скоростей.

ВВЕДЕНИЕ

В 1847 г. Дж. Г. Стокс [1] впервые показал, что при распространении нелинейной периодической волны с длиной λ , круговой частотой ω и волновым числом $k = 2\pi/\lambda$ по горизонтальной поверхности глубокой жидкости частицы жидкой среды вовлекаются в медленное горизонтальное дрейфовое движение вдоль направления распространения волны. Скорость этого дрейфа пропорциональна квадрату амплитуды волны ζ и экспоненциально убывает с глубиной d :

$$U_{drift} = \zeta^2 k \omega e^{-2kd}.$$

Явление получило название «дрейф Стокса». Этот феномен до сих пор активно исследуется, заявляя о себе, порой, в самых неожиданных ипостасях: от вопросов, относящихся к принципу действия гидромагнитного динамо [2], до недавних исследований годовых перемещений популяции лангустов вида *Panulirus Cygnus* [3] и дрейфа нефтяной пленки по поверхности океана [4]. Дрейф Стокса отвечает за существование выделенного направления дрейфа икры и личинок морских животных [5], осуществляет перенос частичек мезо и микропластика [6], которые потом обнаруживаются в консервированной рыбе [7]. Наблюдения за волнами в океане, порожденными ураганным ветром (ураганом Исаак) в Мексиканском заливе [8] показали, что дрейф Стокса составляет значительную часть от общего переноса вещества в верхних слоях океана, особенно в присутствии сильных ветров. В работе [9] скорость стоковского массопереноса исследована в зависимости от величины поверхностного электрического заряда, а в [10] аналогичная задача рассмотрена по отношению к возмущению поверхности жидкости в конфигурации волнового пакета. В совсем недавней работе [11] исследованы закономерности движения индивидуальных жидких частиц в двух движущихся друг относительно

друга несмешивающихся жидких средах, по поверхности раздела которых распространяется простейшая периодическая капиллярно-гравитационная волна. Настоящая работа является естественным продолжением исследования [11]. Также, как и в [11] главной целью является аналитический асимптотический расчет горизонтального массопереноса, инициируемого волновым возмущением горизонтальной границы раздела двух несмешивающихся, движущихся относительно друг друга жидкостей, испытывающих влияние поля тяжести и лапласовское давление на возмущенной поверхности. В отличие от [11], возмущение границы раздела будет рассмотрено в более сложном по своей структуре виде — в форме волнового пакета Стокса.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются две идеальные несмешивающиеся несжимаемые жидкости, заполняющие верхнее $z > 0$ и нижнее $z < 0$ полупространства декартовой системы координат $Oxyz$ с осью Oz ориентированной вертикально вверх против направления действия поля силы тяжести $\mathbf{g}$. Полагается, что верхняя жидкость обладает плотностью ρ' и с постоянной горизонтальной скоростью U_0 поступательно перемещается вдоль оси Ox (при этом скорость U_0 полагается существенно дозвуковой, чтобы обе жидкости можно было считать несжимаемыми [12]). Нижняя более тяжелая жидкость плотности $\rho > \rho'$ считается покоящейся. Пусть по границе раздела рассматриваемых сред в направлении оси Ox распространяется волновое возмущение $z = \xi(x, t)$, представляющее собой волновой пакет Стокса, образованный суперпозицией двух капиллярно-гравитационных волн со слабо отличающимися волновыми числами $k^+ = k + \Delta k$, $k^- = k - \Delta k$ ($2\Delta k \ll k$) и одинаковыми амплитудами ζ . Капиллярные силы, действующие на границе раздела, характеризуются коэффициентом поверхностного натяжения γ . Движение для простоты считается независимым от горизонтальной координаты y . Ставится задача расчета горизонтального среднего дрейфового течения в обеих

*E-mail: otchirov@mail.ru

средах, вызванного распространением волнового возмущения по границе раздела.

Как и в работе [11], чтобы правильно соблюсти граничные условия (в частности, учесть возможность взаимного «проскальзывания» сред) на возмущенной границе раздела идеальных жидкостей $z = \xi$, решение задачи целесообразно разбить на два этапа: сначала

рассчитать поле скоростей в эйлеровых переменных, а затем перейти к лагранжевому описанию движения индивидуальных жидких частиц.

Математическая формулировка задачи расчета гидродинамических потенциалов в верхней φ' и нижней φ средах имеет вид:

$$z > \xi: \quad \Delta\varphi' = 0; \quad P' = p_0 - \rho'gz - \rho'\partial_t\varphi' - (\rho'/2) \left[(\partial_x\varphi' + U_0)^2 + (\partial_z\varphi')^2 \right]; \quad (1)$$

$$z = \xi: \quad \partial_t\xi + \partial_x\xi\partial_x\varphi = \partial_z\varphi; \quad \partial_t\xi + (\partial_x\varphi' + U_0)\partial_x\xi = \partial_z\varphi'; \quad P - P' = -\gamma\partial_{xx}\xi \left(1 + (\partial_x\xi)^2 \right)^{-3/2}; \quad (2)$$

$$z < \xi: \quad \Delta\varphi = 0; \quad P = p_0 - \rho gz - \rho\partial_t\varphi - (\rho/2) \left[(\partial_x\varphi)^2 + (\partial_z\varphi)^2 \right]; \quad (3)$$

$$z \rightarrow \infty: \quad \nabla\varphi' \rightarrow 0; \quad z \rightarrow -\infty: \quad \nabla\varphi \rightarrow 0. \quad (4)$$

Здесь P и P' — гидродинамические давления в нижней и верхней жидкостях соответственно, p_0 — постоянная составляющая внешнего давления.

Задача решалась методом разложения по малому параметру $\varepsilon = \zeta k$, пропорциональному отношению амплитуды волн, составляющих пакет, к длине несущей волны $\lambda = 2\pi/k$. Поскольку скорость дрейфа Стокса имеет второй порядок малости по амплитуде волны, то и разложение неизвестных функций имеет смысл выполнять с точностью до величин второго порядка малости:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \varphi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \varphi'_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^3). \quad (5)$$

Наряду с разложением (5), применялась известная процедура снесения граничных условий (2) на невозмущенную поверхность $z = 0$, обоснование которой представлено в [13], а примеры использования можно посмотреть в [11, 14–16]. Так, для значений горизонтальной скорости течения $\partial_z\varphi$ со стороны нижней области снесение с поверхности $z = \xi$ на уровень $z = 0$ осуществляется посредством следующих выкладок:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)_{z=\xi} &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)_{z=0} + \xi \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \right)_{z=0} + \frac{1}{2}\xi^2 \left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^3} \right)_{z=0} + \dots = \\ &= \left(\frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial z} \right)_{z=0} + (\xi_1 + \xi_2) \left(\frac{\partial^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial z^2} \right)_{z=0} + \dots = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \right)_{z=0} + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \right)_{z=0} + \xi_1 \left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2} \right)_{z=0} + \dots \end{aligned}$$

Видно, что значение, которое величина принимает на искривленной поверхности $z = \xi(x, t)$, оказалось с необходимой степенью точности выраженным через значение этой же величины и значения ее производных на уровне $z = 0$. С помощью (5) и процедуры

снесения граничных условий на невозмущенный уровень, несложно перейти от (1)–(4) к задачам первого и второго порядков малости.

Математическая формулировка задачи первого по ε порядка малости имеет вид:

$$z > 0: \quad \Delta\varphi'_1 = 0; \quad z < 0: \quad \Delta\varphi_1 = 0; \quad (6)$$

$$z = 0: \quad \partial_t\xi_1 - \partial_z\varphi_1 = 0; \quad \partial_t\xi_1 + U_0\partial_x\xi_1 - \partial_z\varphi'_1 = 0; \quad (7)$$

$$g\xi_1(\rho' - \rho) - \rho\partial_t\varphi_1 + \rho'\partial_t\varphi'_1 + \rho'U_0\partial_x\varphi'_1 + \gamma\partial_{xx}\xi_1 = 0; \quad (8)$$

$$z \rightarrow \infty: \quad \nabla\varphi'_1 \rightarrow 0; \quad z \rightarrow -\infty: \quad \nabla\varphi_1 \rightarrow 0. \quad (9)$$

Задача второго по ε порядка малости описывается соотношениям:

$$z > 0 : \quad \Delta\varphi'_2 = 0; \quad z < 0 : \quad \Delta\varphi_2 = 0; \quad (10)$$

$$z = 0 : \quad \begin{aligned} \partial_t \xi_2 - \partial_z \varphi_2 &= \xi_1 \partial_{zz} \varphi_1 - \partial_x \varphi_1 \xi_1; \\ \partial_t \xi_2 + U_0 \partial_x \xi_2 - \partial_z \varphi'_2 &= \xi_1 \partial_{zz} \varphi'_1 - \partial_{xx} \varphi'_1 \partial_{xx} \xi_1; \\ g \xi_2 (\rho' - \rho) - \rho \partial_t \varphi_2 + \rho' \partial_t \varphi'_2 + \rho' U_0 \partial_x \varphi'_2 + \gamma \partial_{xx} \xi_2 &= \rho \xi_1 \partial_{zt} \varphi_1 + \end{aligned} \quad (11)$$

$$+ (\rho/2) \left((\partial_x \varphi_1)^2 + (\partial_z \varphi_1)^2 \right) - \rho' \xi_1 \partial_{zt} \varphi'_1 - (\rho'/2) \left((\partial_x \varphi'_1)^2 + (\partial_z \varphi'_1)^2 + 2U_0 \xi_1 \partial_{xx} \varphi'_1 \right);$$

$$z \rightarrow \infty : \quad \nabla \varphi'_2 \rightarrow 0; \quad z \rightarrow -\infty : \quad \nabla \varphi_2 \rightarrow 0. \quad (12)$$

Последовательное решение сначала (6)–(9), затем (10)–(12) приводит к аналитическим выражениям, позволяющим описать эйлерово поле скоростей во втором приближении по ε .

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Решение задачи первого порядка малости (6)–(9) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \zeta \cos(\omega^+ t - k^+ x) + \zeta \cos(\omega^- t - k^- x) \\ \varphi_1 &= -\zeta \exp(k^+ z) \frac{\omega^+}{k^+} \sin(\omega^+ t - k^+ x) - \zeta \exp(k^- z) \frac{\omega^-}{k^-} \sin(\omega^- t - k^- x) \\ \varphi'_1 &= -\zeta \exp(-k^+ z) \frac{k^+ U_0 - \omega^+}{k^+} \sin(\omega^+ t - k^+ x) - \zeta \exp(-k^- z) \frac{k^- U_0 - \omega^-}{k^-} \sin(\omega^- t - k^- x). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $\omega^\pm = \omega \pm \Delta\omega = \omega \pm V_g \Delta k$ ($V_g = \partial\omega/\partial k$ — групповая скорость), а частота ω определяется дисперсионным уравнением:

$$\omega = \frac{kU_0\rho' + \sqrt{k(-kU^2\rho\rho' + k^2\gamma(\rho + \rho') + g(\rho^2 - \rho'^2))}}{(\rho + \rho')} \quad (14)$$

Выражение для отклонения границы раздела ξ_1 от равновесного положения при помощи тригонометрических преобразований легко сводится к соотношению [17]:

$$\xi_1 = 2\zeta \cos(\omega t - kx) \cos(\Delta\omega t - \Delta kx), \quad (15)$$

Согласно (15) в задаче естественным образом выделяются разные масштабы времени: период несущей волны $T = 2\pi/\omega$ характеризует быстрые изменения амплитуды, а период огибающей волнового пакета $\tau = 2\pi/\Delta\omega \gg T$ — медленные.

Подставив (13) в правые части (11) получим граничные условия для задачи второго порядка малости при $z = 0$:

$$\begin{aligned} \partial_t \xi_2 - \partial_z \varphi_2 &= -2\zeta^2 \Delta k \omega \sin(2\Delta\omega t - 2\Delta kx) + \zeta^2 \Pi(t); \\ \partial_t \xi_2 + U_0 \partial_x \xi_2 - \partial_z \varphi'_2 &= 2\zeta^2 (U_0^2 \Delta k^2 \rho' - 2U_0 \Delta k \Delta\omega \rho' + \Delta\omega^2 \rho' - \Delta\omega^2 \rho) \cos(2\Delta\omega t - 2\Delta kx) + \zeta^2 \Pi(t); \end{aligned} \quad (16)$$

$$g \xi_2 (\rho' - \rho) - \rho \partial_t \varphi_2 + \rho' \partial_t \varphi'_2 + \rho' U_0 \partial_x \varphi'_2 + \gamma \partial_{xx} \xi_2 = 2\zeta^2 (kU \Delta k - \Delta k \omega) \sin(2\Delta\omega t - 2\Delta kx) + \zeta^2 \Pi(t).$$

Здесь $\Pi(t)$ — быстро меняющиеся со временем циклические выражения (период их изменения равен T). Такого же рода слагаемые возникали и в задаче с простейшей периодической волной в качестве возмущения

границы раздела [11]. Согласно [11] они не влияют на скорость среднего горизонтального дрейфа, поэтому в (16) в явном виде выписаны только медленно меняющиеся слагаемые, которых в модели [11] не было.

Для дальнейшего анализа достаточно решить «усеченную» задачу второго порядка малости без учета слагаемых, обозначенных $\Pi(t)$. Соответствующее решение

для компонент поля скоростей в нижней u_d и верхней u'_d жидкостях имеют вид:

$$u_d = 2\zeta^2 \Delta k e^{2z\Delta k} \cos(2\Delta\omega t - 2\Delta k x) \times \\ \times \frac{2kU_0(V_g - U_0)V_g\Delta k\rho' - (g(\rho + \rho') + 2V_g\Delta k(-U_0\rho' + V_g\rho' - V_g\rho))\omega}{g(\rho + \rho')} \quad (17)$$

$$u'_d = 2\zeta^2 \Delta k e^{-2z\Delta k} \cos(2\Delta\omega t - 2\Delta k x) \times \\ \times \frac{g(\rho + \rho')(kU_0 - \omega) - 2(U_0 - V_g)\Delta k(kU_0\rho'(U_0 - V_g) - (U_0\rho' - V_g\rho' + V_g\rho)\omega)}{g(\rho + \rho')} \quad (18)$$

Соотношения (13), (17), (18) представляют части эйлеровой компоненты скорости течения, через которые, как будет показано в следующем пункте, вычисляется дрейфовая составляющая лагранжевой скорости, с которой перемещается индивидуальная жидкая частица, начавшая движение при $t = 0$ из точки с координатами (x, z) .

Во втором приближении по амплитуде волны скорости в описании Лагранжа $\mathbf{V}_L(\mathbf{r}, t) = u_L(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_x + v_L(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_z$ и в описании Эйлера $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_x + v(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_z$ связаны известным соотношением [18–20]:

$$\mathbf{V}_L(\mathbf{r}, t) = \mathbf{V}_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{V}_2(\mathbf{r}, t) + \\ + \left(\left(\int_0^t \mathbf{V}_1(\mathbf{r}, \tau) d\tau \right) \cdot \nabla \right) \mathbf{V}_1(\mathbf{r}, t). \quad (19)$$

Здесь $V_1(\mathbf{r}, t)$ — эйлерова скорость течения в первом приближении по амплитуде волнового возмущения, являющаяся решением линеаризованной задачи (в нашем случае — задачи (6)–(9)), а $V_2(\mathbf{r}, t)$ — поправка второго по амплитуде волны порядка малости (в данной ситуации определяемая решением задачи (10)–(12)).

Формула (19) является приближенной и справедлива только для возмущенного волновым течением дви-

жения, не имеющего постоянной составляющей эйлеровой скорости [11]. В выбранной системе координат $Oxyz$ это условие соблюдается для нижней жидкости и не выполняется для верхней. Для расчета скорости индивидуальных жидких частиц, прежде, чем использовать соотношение (19), необходимо трансформировать формулы, описывающие эйлерово поле скоростей в верхней среде, в движущуюся со скоростью U_0 систему отсчета (не забыв учесть эффект Доплера), и только после этого посредством (19) переходить к лагранжевым переменным. Возвращение в неподвижную систему координат $Oxyz$ не представляет никакого труда. Описанная процедура имеет некоторые расчетные нюансы, подробно описанные в работе [11]. Методика, предложенная в [11] позволяет перейти от эйлеровых компонент скоростей, определяемых соотношениями (13), (17), (18) к их Лагранжевому представлению. Выделяя медленно меняющиеся со временем слагаемые, аналогично тому, как это делалось при решении задачи второго порядка малости получим выражения для скорости дрейфа в верхней U'_{drift} и нижней U_{drift} средах:

$$U'_{drift} = \zeta^2 e^{-2k^+z} (k\Omega + \Delta k\Omega + k\Delta\omega) + \zeta^2 e^{-2k^-z} (k\Omega - \Delta k\Omega - k\Delta\omega) + \\ + 2\zeta^2 k\Omega e^{-2kz} \cos(2\Delta\omega t - 2\Delta k x) + u'_d + U_0; \quad (20)$$

$$U_{drift} = \zeta^2 e^{2k^+z} (k\omega + \Delta k\omega + k\Delta\omega) + \zeta^2 e^{2k^-z} (k\omega - \Delta k\omega - k\Delta\omega) + 2\zeta^2 k\omega e^{2kz} \cos(2\Delta\omega t - 2\Delta k x) + u_d. \quad (21)$$

Здесь $\Omega = \omega - kU_0$ — частота циклического движения частиц верхней жидкости.

3. АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ

Из дисперсионного уравнения (14) следует, что для заданного волнового числа k круговая частота ω принимает действительные значения, только если выполняется неравенство:

$$U_0 \leq U_{cr} = \sqrt{\frac{k^2 \gamma (\rho + \rho') + g (\rho^2 - \rho'^2)}{k \rho \rho'}}, \quad (22)$$

определяющее условие устойчивости малых волновых возмущений границы раздела по отношению к дестабилизирующему действию тангенциального скачка горизонтальной скорости, которое инициирует развитие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца [18]. В дальнейшем изложении сосредоточимся исключительно на свойствах устойчивого в смысле (22) течения, а конкретно — на закономерностях горизонтального массопереноса, вызванного распространением по границе раздела периодического возмущения в виде волнового пакета Стокса.

Как показано в работе [11], если по границе раздела двух несмешивающихся идеальных жидкостей перемещающихся друг относительно друга распространяется простейшая периодическая бегущая волна $z = \zeta \cos(\omega t - kx)$, то скорости горизонтального дрейфового движения в нижней $\tilde{U}_{drift}$ и в верхней $\tilde{U}'_{drift}$ средах описываются соотношениями [11]:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{drift} &= \zeta^2 \omega k e^{2kz} \\ \tilde{U}'_{drift} &= U_0 + \zeta^2 (\omega - kU_0) k e^{-2kz}. \end{aligned} \quad (23)$$

В обеих жидкостях волновое возмущение вызывает средний горизонтальный дрейф, скорость которого максимальна на границе раздела и экспоненциально уменьшается с удалением во внутреннюю область течения. В нижней жидкости при любой скорости сноса верхней среды U_0 дрейф устремлен в на-

правлении распространения волны. В верхнем же полупространстве интересно обратить внимание на относительную дрейфовую добавку к скорости U_0 . При $U_0 = 0$ частицы верхней жидкости, прилегающие к границе раздела, дрейфуют в точности со скоростью нижней среды. Если же верхняя среда начинает двигаться, то, на скорость ее общего горизонтального перемещения U_0 накладывается дрейфовая добавка, порожденная волновым возмущением. По мере роста величины U_0 от нуля до значения фазовой скорости волны U_{ph} дрейфовая добавка постепенно уменьшается и при $U_0 = U_{ph} = \omega/k$ обращается в ноль. Все частицы верхней жидкости при $U_0 = U_{ph}$ сносят горизонтально со скоростью U_0 , не испытывая никаких дополнительных возмущений своего движения. При дальнейшем увеличении U_0 дрейфовая добавка становится отрицательной и уменьшает скорость общего переноса верхней жидкости тем сильнее, чем больше U_0 . Главная закономерность состоит в том, что с увеличением U_0 волновое возмущение и в верхней и в нижней области порождает горизонтальное дрейфовое движение (в верхней жидкости — добавочное к U_0), стремящееся уменьшить значение тангенциального разрыва горизонтальной скорости на границе раздела [11].

Полученные в настоящей работе соотношения (17), (18) (20), (21) позволяют обобщить результаты работы [11] на случай, когда причиной дрейфа является более сложное возмущение — простейший волновой пакет. Из построенных соотношений следует, что в этом случае скорость дрейфа в обеих жидкостях не постоянна, как в (23), а медленно варьирует со временем около своего среднего значения с периодом равным $\tau = 2\pi/\Delta\omega$. Усреднив (20) и (21) по этому «медленному» времени $\tau = 2\pi/\Delta\omega$ несложно получить выражения для средней скорости дрейфа $\langle U_{drift} \rangle$, $\langle U'_{drift} \rangle$ за достаточно длительный по сравнению с τ промежуток времени:

$$\begin{aligned} \langle U_{drift} \rangle &= \zeta^2 e^{2k^+ z} (k\omega + \Delta k\omega + k\Delta\omega) + \zeta^2 e^{2k^- z} (k\omega - \Delta k\omega - k\Delta\omega) \\ \langle U'_{drift} \rangle &= U_0 + \zeta^2 e^{-2k^+ z} (k\Omega + \Delta k\Omega + k\Delta\omega) + \zeta^2 e^{-2k^- z} (k\Omega - \Delta k\Omega - k\Delta\omega). \end{aligned} \quad (24)$$

Интересно сравнить случай, когда возмущение границы раздела представляет собой простейшую бегущую волну с волновым числом k и амплитудой 2ζ с ситуацией, когда возмущение — волновой пакет, образованный суперпозицией двух волн с волновыми числами $k \pm \Delta k$, каждая — с амплитудой ζ . Используя (23) (с удвоенной ζ) и соотношения (24) при $z = 0$, несложно обнаружить, что, независимо от значения U_0 , в обеих средах скорость горизонтального волнового массопереноса, инициируемого волновым пакетом, примерно

вдвое меньше, чем в случае массопереноса, осуществляемого простейшей периодической бегущей волной. В этом и состоит главное отличие модели рассмотренной в настоящей работе от модели [11]. Остальные закономерности остаются прежними. В частности, если скорость верхней среды, близка к фазовой скорости несущей волны:

$$U_{ph} = \sqrt{\frac{k^2 \gamma + g (\rho - \rho')}{k \rho}},$$

то массоперенос в верхней области осуществляется просто поступательным горизонтальным движением среды, как единого целого.

Рассмотрим примеры расчета скорости дрейфа жидких частиц верхней и нижней сред, прилегающих к границе раздела. Расчеты проводились при значениях параметров, соответствующих границе раздела вода-воздух: $\rho = 1 \text{ г/см}^3$; $\rho' = 0.001 \text{ г/см}^3$; $\gamma = 72 \text{ дин/см}$. Волновое число принималось равным $k = k_* = \sqrt{g(\rho - \rho')/\gamma} \approx 3.69 \text{ см}^{-1}$. Это значение соответствует волне, наиболее чувствительной к дестабилизирующему воздействию тангенциального разрыва скоростей. Амплитуда волны полагалась $\zeta = 0.05 \text{ см}$, а $\Delta k = 0.01k$. Тогда фазовая скорость волнового движения оказывается равной $U_{ph} \approx 23 \text{ см/с}$, а критическая скорость, по превышении которой реализуются условия возникновения неустойчивости Кельвина-Гельмгольца:

$$U_{cr} = \sqrt{\frac{(\rho + \rho')(k^2\gamma - g\rho' + g\rho)}{k\rho\rho'}} \approx 729 \text{ см/с}.$$

Скорость среднего дрейфа, рассчитанная по формулам (24) при $z = 0$ и $U_0 = 0 \text{ см/с}$ принимает следующее значение:

$$\langle U_{drift} \rangle = \langle U'_{drift} \rangle \approx 1.57 \text{ см/с}.$$

При скорости $U_0 = 10 \text{ см/с}$:

$$\begin{aligned} \langle U_{drift} \rangle &\approx 1.57 \text{ см/с}; \\ \langle U'_{drift} \rangle &\approx 10.89 \text{ см/с}. \end{aligned}$$

При скорости $U_0 = 23 \text{ см/с}$:

$$\begin{aligned} \langle U_{drift} \rangle &\approx 1.57 \text{ см/с}; \\ \langle U'_{drift} \rangle &\approx 23.00 \text{ см/с}. \end{aligned}$$

При скорости $U_0 = 100 \text{ см/с}$:

$$\begin{aligned} \langle U_{drift} \rangle &\approx 1.56 \text{ см/с}; \\ \langle U'_{drift} \rangle &\approx 94.76 \text{ см/с}. \end{aligned}$$

При скорости $U_0 = 500 \text{ см/с}$:

$$\begin{aligned} \langle U_{drift} \rangle &\approx 1.17 \text{ см/с}; \\ \langle U'_{drift} \rangle &\approx 467.18 \text{ см/с}. \end{aligned}$$

При скорости $U_0 = 720 \text{ см/с}$:

$$\begin{aligned} \langle U_{drift} \rangle &\approx 0.29 \text{ см/с}; \\ \langle U'_{drift} \rangle &\approx 671.34 \text{ см/с}. \end{aligned}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Закономерности дрейфового движения, связанного с распространением простейшего волнового пакета капиллярно-гравитационных волн по границе раздела, движущихся друг относительно друга с постоянной скоростью жидкостей остаются такими же, как и для дрейфа, вызванного распространением простейшей бегущей волны. Но на временах, сравнимыми с периодом огибающей волнового пакета можно заметить, что дрейфовая добавка к скорости периодична по времени. Также важной особенностью является то, что эффекты, оказываются примерно в два раза меньшими из-за модуляции амплитуды колебаний границы раздела.

Благодарности

Автор выражает благодарность доктору физ.-мат. наук Д. Ф. Белоножке за настоятельный совет оформить настоящий результат в виде отдельной статьи.

[1] Stokes G. G. Transactions of the Cambridge Philosophical Society. 1847. **8**. P. 441.
[2] Herreman W., Lesaffre P. J. of Fluid Mechanics. 2011. **679**. P. 32.
[3] Feng M. et al. Canadian J. of Fisheries and Aquatic Sciences. 2010. **68**. N7. P. 1182.
[4] Christensen K. H., Terrile E. J. of Fluid Mechanics. 2009. **620**. P. 313.
[5] Röhrs J. et al. Limnology and Oceanography. 2014. **59**. N4. P. 1213.
[6] Isobe A. et al. Marine pollution bulletin. 2014. **89**, N 1-2. P. 324.

[7] Karami A. et al. Science of The Total Environment. 2018. **612**. P. 1380.
[8] Curcic M., Chen S. S., Özgökmen T. M. Geophys. Res. Lett. 2016. **43**, N6. P. 2773.
[9] Белоножка Д. Ф., Очилов А. А. Электронная обработка материалов. 2016. **52**, №1. С. 91. (Belonozhko D. F., Ochirov A. A. Surface Engineering and Applied Electrochemistry. 2016. **52**, N1. P. 92).
[10] Белоножка Д. Ф., Очилов А. А. Электронная обработка материалов. 2014. **50**, №4, С. 35. (Belonozhko D. F., Ochirov A. A. Surface Engineering and Applied Electrochemistry. 2014. **50**, N4. P. 317).

- [11] Белоножко Д. Ф., Очиров А. А. Журнал технической физики. 2018. **88**, № 5, С. 675. (*Belonozhko D. F., Ochirov A. A. Technical Physics*. 2018. **63**, N 5. P. 653).
- [12] Бэтчелор Дж. К. Введение в динамику жидкости. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. (*Batchelor G. K. An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 2000).
- [13] Joseph D. D. Archive for rational mechanics and analysis. 1973. **51**, N 4, P. 295.
- [14] Левиц В. Г. Физико–химическая гидродинамика. 2-е изд. М.: ГИФМЛ, 1959.
- [15] McGoldrick L. F. J. Fluid Mech. 1972. **52**, N 4, P. 723.
- [16] Nayfeh A. H. J. Fluid Mech. 1971. **48**, № 3, P. 463.
- [17] Островский Л. А., Потапов А. И. Введение в теорию модулированных волн. М.: Физматлит. 2003.
- [18] Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане Ч.1. М.: Мир, 1981. (*Le Blon P., Mysak L. Waves in Ocean*. Amsterdam: Elsevier, 1978).
- [19] Phillips O. M. The Dynamics of the Upper Ocean. Cambridge University Press, 1977.
- [20] Longuet-Higgins M. S. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 1953. **245**, N 903. P. 535.

On the mass transport in the propagation of a wavepacket along the interface of liquid media

A. A. Ochirov

*Department of Infocommunications and Radiophysics of the Faculty of Physics, P.G.Demidov Yaroslavl State University
Yaroslavl 150003, Russia
E-mail: otchirov@mail.ru*

The regularities of a mass-transfer caused by a Stokes's wave package propagating at a horizontal interface of two environments are investigated analytically asymptotically for a pair of inviscid immiscible fluids which are shifting relate to each other.

PACS: 47.3-i.

Keywords: Stokes wave packet, Stokes drift, tangential velocity discontinuity.

Received 22 June 2018.

Сведения об авторах

Очиров Артем Александрович — ассистент; тел.: (485) 279-77-70, e-mail: otchirov@mail.ru.
