

Наследие Фурье и проблемы модернизации курса математического анализа для физиков

Д. Д. Соколов*

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2*

(Статья поступила 25.05.2018; Подписана в печать 29.05.2018)

Фурье жил и работал в эпоху, когда в исследованиях по математическому анализу заканчивался первый, героический период и начинался длительный период упорядочения, усовершенствования и строгого изложения первоначальных идей. В этот период были сформулированы и новые замечательные идеи, но дух эпохи определил форму и стиль изложения тех классических учебников по математическому анализу, по которым мы сейчас учим студентов. В современную эпоху классическая математика все больше и больше взаимодействует с математикой компьютерного века. Это заставляет нас вносить новые элементы в, казалось бы, устоявшиеся разделы математического анализа.

PACS: 02.30.-f

УДК: 53.01

Ключевые слова: фурье-анализ, математический анализ, преподавание математики.

1. ЖИЗНЕННЫЙ ПУТЬ ФУРЬЕ В КОНТЕКСТЕ ИСТОРИИ ФРАНЦИИ

Обращение к вопросам истории, методологии и, тем более, философии науки встречают скептическое отношение физиков. Эта точка зрения ярко выражена в саркастических замечаниях, разбросанных по тексту Фейнмановских лекций по физике [1], которые во многом сформировали взгляд на науку нашего поколения. Однако эта точка зрения, видимо, нуждается в некоторой коррекции. В этом убеждает, например, посещение зала заседаний регионального парламента Сицилии в Палермо, который носит имя Архимеда. Зал украшен статуей Архимеда, на которой приведен чертеж, с помощью которого Архимед впервые вычислил три определенных интеграла и нашел отношение объемов конуса, цилиндра и шара. Возможно, если бы зал заседаний Московской думы носил имя, хотя бы, А. Н. Колмогорова и его оформление напоминало о работах Колмогорова по применению математики в генетике, теории стихосложения, лингвистике, то это плодотворно сказалось бы на деятельности этого почтенного учреждения.

Знакомство с жизненным путем Жана Батиста Фурье (1768–1830) тоже позволяет много понять в истории Франции, да и в нашей истории — на чужом примере многие общие тенденции становятся виднее. Выходец из социальных низов, Фурье был человеком своего времени. Он активно участвовал — естественно, на стороне революции — в том общественном кризисе, который известен нам как Великая французская революция. Революция подняла его в элиту французского общества. Знаменитые слова Наполеона во время тяжелой битвы в Египте «Ослы и ученые — в середи-

ну» были, в частности, проявлением заботы о Фурье, участвовавшем в походе.

Фурье совершал поступки, которые нам сейчас кажутся плохо совместимыми с наукой: участвовал в якобинском терроре, временами занимал ненаучные административные посты. Стал бароном. Пришедшая реставрация пыталась, но не смогла остановить его продвижения по лестнице научных регалий. Однако для нас сейчас не так уж важно, что в 1817 г. Фурье был избран в Академию наук. Умер Фурье в канун новой революции [2].

По этой краткой выжимке из богатой биографии Фурье видно, как работал мощный социальный лифт, обеспечивший поддержку революции. Наука во Франции в формах, сопоставимых с современными, существовала к тому времени уже более столетия. Парижская обсерватория была создана Людовиком XIV в 1667 г. и немедленно провела цикл наблюдений солнечной активности, совсем не потерявший своего значения до наших дней. Именно благодаря этим наблюдениям мы уверены в том, что с середины XVII до начала XVIII века солнечная активность заметно отличалась от современной — наступил т. н. минимум Маундера [3]. Современные астрономы спорят о деталях этого события, но споры опираются, прежде всего, на данные классической французской астрономической школы. Не вызывает сомнения, что сам король искренне интересовался физикой Солнца, однако в обществе наука расценивалась как ненужная блажь короля. Это хорошо видно, например, из замечательных мемуаров герцога де Сен-Симона [4]. Видимо, король был намного умнее и дальновиднее герцога.

В поколении Фурье к мнению ученых уже прислушивались лидеры государства. Сам Фурье принимал участие в формировании тех черт французской интеллектуальной элиты, которые во многом определяют жизнь современной Франции, но плохо видны из нашей перспективы. Каждый раз, когда по телевизору говорят о выдающейся роли Сорбонны во Франции,

*E-mail: sokoloff.dd@gmail.com

вспоминаешь, что в реальной жизни дело обстоит иначе. Про выпускника Сорбонны говорят — «Он даже не нормальер!», т. е. не выпускник Нормальных школ, т. е. тесно связанных с армией училищ, выпускники которых ценятся гораздо больше выпускников университетов. Не могу забыть, как упорно приходилось убеждать моего дипломника из Эколь политехник, работавшего со мной в той же Парижской обсерватории, что передо мной не нужно становиться по стойке смирно. Внедрение системы нормальных школ связывается с именем Наполеона, но, конечно, их организовывали французские ученые того времени, причем Фурье много сделал для этого.

Мне кажется, что жизненный путь Фурье во многом перекликается и позволяет лучше понять жизненный путь многих великих ученых первого советского поколения, хотя бы О. Ю. Шмидта. А опыт плодотворного взаимодействия министерства обороны Франции и научного сообщества просто вызывает нехорошее чувство зависти.

2. РЯДЫ И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ФИЗИКОВ

В разнообразном наследии Фурье глаз лектора уверенно выделяет проблему освоения рядов и интеграла Фурье студентами-физиками, изучающими математический анализ. Эта глава, завершающая курс математического анализа, явно оказывается очень трудной для студентов. Это хорошо видно, например, по посещаемости лекций — лектор теряет в этот момент чуть ли не половину слушателей — их интеллектуальный уровень не позволяет понять смысла принадлежащей Фурье математической конструкции. Пугает перспектива того, что юный физик, покупая новый гаджет, на вопрос продавца о требуемых технических характеристиках устройства, достанет из кармана график, на котором изображена зависимость ожидаемого электрического поля в точке приема от времени. Скорее всего, такого покупателя поместят в психиатрическую лечебницу, откуда он не сможет выйти до конца жизни или, по крайней мере до того момента, когда он узнает, что такое частота, длина волны и другие характеристики радиосигнала, выражающиеся на языке преобразования Фурье. Впрочем, детальный ответ на вопрос о том, что значит, что некоторая радиостанция передает на данной частоте, требует аппарата вейвлет-анализа [5], который был развит лишь в конце XX века и далеко выходит за пределы стандартного курса математического анализа.

Конечно, в реальности все не так катастрофично — студенты встретятся с понятиями фурье-анализа еще во многих курсах, от методов математической физики до радиофизики и дальше, и постепенно — хочется надеяться — освоят этот аппарат, необходимый каждому физiku. Однако проблема очевидна и в ней хочется разобраться.

Сама необходимость модернизации образования вообще и лекционных курсов в частности принадлежит к вечным проблемам человечества. Знатоки говорят, что жалобы на ухудшившееся качество учащихся и их нежелание работать представлены уже в текстах пирамид. Решение этой проблемы не может замыкаться только в рамках научного сообщества. Например, знакомство с гимназическими учебниками конца XIX века приводит к мысли, что отказ от идеи общедоступности образования и переход к усиленному обучению небольшой части молодежи позволил бы, по крайней мере на какое-то время, резко поднять качество выпускников в любой заданной области науки. Однако подобные простые решения представляются социально неприемлемыми и, видимо, ведут к катастрофическим последствиям. Тем не менее, даже в рамках существующих социальных ограничений можно, видимо, сделать многое для того, чтобы сделать курс математического анализа более доступным для слушателей.

Поясним это на конкретном примере того, как хорошие университетские учебники излагают, скажем, преобразование Фурье. В учебнике [6], который в целом хорошо уловил тенденции развития математической физики (есть даже раздел о работе электронных вычислительных машин, который сейчас читается как раздел из фантастического романа), основная идея преобразования Фурье излагается так. При некоторых (не самых простых) условиях для функции $f(x)$ справедливо тождество

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^l d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda(\xi - x) d\xi = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}. \quad (1)$$

У думающего студента немедленно возникают два вопроса (у плохого студента, конечно, никаких вопросов не возникает). Во-первых, почему бы не ограничиться для начала только непрерывными $f(x)$ и не писать в правой части тождества (1) просто $f(x)$. Во-вторых, зачем вообще нужно представлять и так известную функцию $f(x)$ через достаточно сложный повторный интеграл, сопровождаемый операцией предельного перехода.

Непосредственно следующее доказательство сформулированной теоремы не облегчает понимание. Смысл его состоит в том, что при $l \rightarrow \infty$ ядро интегрального преобразования в левой части равенства стремится к δ -функции, что и выражает соотношение (1), однако в тексте понятие δ -функции не возникает.

Конечно, в жизни никто не собирается пользоваться преобразованием Фурье в виде соотношения (1), в огромном большинстве случаев преобразование Фурье записывают в комплексной форме. Оно нужно во все не для того, чтобы сложным образом выражать функцию через саму себя. Наконец, соотношение (1) выражает, конечно, мысль о том, что последовательное применение прямого и обратного преобразований Фу-

рье восстанавливает исходную функцию. Это, конечно, полезное свойство, но нельзя сказать, что без него использование идеи Фурье было бы невозможным. Например, суперпозиция прямого и обратного вейвлет-преобразования восстанавливает исходную функцию только с точностью до прибавления константы, но это не особенно препятствует применению этого полезного обобщения преобразования Фурье.

Замечательно, что большинство из этих мыслей в той или иной форме высказаны и разъяснены в тексте учебника (нет только вейвлетов, которые тогда еще не открыли). Другое дело, что для того, чтобы получить ответы на свои вопросы, читатель должен внимательно прочитать весь учебник и сделать не сформулированные явно выводы из его текста. Такой формат текста был труден и для того поколения, которое начинало учиться по этому учебнику, но уж совершенно неприемлем для современных студентов, воспитанных на Википедии и обладающих клиповым сознанием.

Конечно, авторы не могли написать о вейвлетах, которые широко вошли в науку лишь примерно 20 лет спустя, но сама необходимость дальнейшего развития метода Фурье стояла давно. Современный автор написал бы хоть что-то и на эту тему, обозначил проблему.

Подчеркнем, что мы взяли пример из одного из наиболее ориентированных на физиков учебника математического анализа.

Приведенный пример ни в коем случае не является примером неудачного построения изложения данного вопроса. Он выражает то понимание математики, которое было свойственно лучшим умам того времени. Для того, чтобы убедиться в этом, рассмотрим другой пример.

Понятие фрактала широко используется в самых разнообразных областях современной физики — от описания форм облаков до понимания того, как устроены легкие человека. Основные математические идеи фрактальной геометрии были сформулированы в замечательной статье Феликса Хаусдорфа 1918 г. [7]. Написанная на хорошем немецком языке красивым математическим стилем, эта эпохальная статья опиралась на целую серию работ предшественников, начинавшихся работой Вейерштрасса о построении примера непрерывной и нигде не дифференцируемой функции. Между прочим, широко использовался и аппарат рядов Фурье. Про все эти работы много написано в учебнике [8], а обзор [9] во многом представляет собой пересказ этого материала языком, ориентированным на физиков, а не на математиков. В принципе, в 1918 г. уже была написана работа Эйнштейна по броуновскому движению [10], траектория которого прекрасно иллюстрирует идеи Хаусдорфа, включая идею дробных производных Гельдера. Хорошо известно, что идея фракталов была введена в оборот физических исследований Мандельбротом примерно через полвека после работ Хаусдорфа. В огромной степени эта задержка объясняется тем,

что оригинальное изложение Хаусдорфа совершенно не ориентировано на физиков.

Почему же авторы классических учебников выражали свои мысли в такой недружественной для физиков форме и как преодолеть этот разрыв между математической формой и физическим содержанием?

3. МАТЕМАТИКА ВРЕМЕН ФУРЬЕ, ВЕЙЕРШТРАССА И СОВРЕМЕННОСТЬ

Представляется, дело в том, что математики времен Фурье, времен Вейерштрасса и современности совсем по-разному декларировали предмет своей науки. Для Фурье, а, тем более, для Эйлера не было актуально противопоставление физики и математики. Поэтому не просто сказать, кем был Фурье по преимуществу — физиком, изучавшим проблемы теплопроводности, или математиком, занимавшимся разложением функций в ряды и интегралы, получившие его имя. Видимо и Эйлера не увлекала задача последовательного изложения содержания математического анализа. Как известно, Эйлер написал первый курс этой науки [11]. Он переведен на русский язык и при чтении производит сильное впечатление — в книге с трудом опознаются даже разделы, которые в современном курсе связаны с именем Эйлера.

Подобный метод работы привел в начале XIX века к системному кризису в математическом анализе. Выяснилось, что, действуя в духе Эйлера, можно, при желании, обосновать самые нелепые и нефизические утверждения. Была осознана необходимость построения математического анализа как последовательной науки. Эта задача была, как известно, выполнена несколькими поколениями математиков (от Коши до Римана и Вейерштрасса и далее), которые явно противопоставили математическое исследование физическому. В наиболее яркой форме этот этап развития математики виден на примере теоремы Римана об условно сходящихся рядах — выбирая подходящий порядок суммирования, можно сделать сумму такого ряда равным любому наперед заданному числу. Между прочим, очень заметная часть рядов и интегралов Фурье, включая ключевые для волновой оптики интегралы Френеля, являются условно сходящимися. К ним в полной мере относится наблюдение Римана. Более того, нет сомнения, что если бы не запросы физики, то в рамках абстрактной математики после работ Римана рассматривались бы лишь абсолютно сходящиеся ряды и интегралы. Этот пример заодно поясняет, почему нельзя систематически рассматривать курс математики для физиков как раздел физики, а необходимо представлять студенту математику как самостоятельную науку. В противном случае начинающему исследователю предстояло бы пережить этот кризис математического анализа на своей собственной шкуре и самостоятельно проделать тот непростой путь, которые за нас проделали математики XIX века.

Переработка математического анализа, предпринятая великими математиками середины и конца XIX века потребовала своих стандартов математического изложения, концентрации внимания на доказательствах теорем. Потребовалось очень значительное время для того, чтобы довести этот процесс ревизии до уровня университетских учебников. Все это и вылилось в классические университетские учебники, некоторые примеры из которых мы разбирали выше.

Конечно, описанная математическая традиция не была абсолютной — и в XIX, и в XX веках были великие математики, которые могли и хотели работать и как физики. Достаточно назвать работы А. Н. Колмогорова по теории турбулентности, которые с полным правом можно рассматривать как эпохальные работы по физике.

Постепенно стали выявляться слабые места той математической традиции, которая сформировалась в работах классиков математического анализа XIX века. Появились теоремы, которые удачно сочетали поучительность, строгость и красоту математического исполнения и практическую бесполезность. Пожалуй, первым отметил эту настораживающую тенденцию Ярослав Гашек — видимо, в пивных Праги и Вены говорили и о новейших работах математиков Австро-Венгрии. Герой его знаменитого романа в сумасшедшем доме встречает профессора математики, который уверяет, что внутри земного шара есть шар, намного больший первого по диаметру. Это кажущееся нелепым утверждение подозрительно перекликается с одной из знаменитых теорем того же Хаусдорфа [12], утверждающей, если не вдаваться в детали, что трехмерный шар равносоставлен двум своим копиям. Разумеется, парадокс разрешается именно при обсуждении этих деталей. Заметим, что классическая статья Хаусдорфа датирована тем же 1914 г., что и эпизод из жизни героя романа. Конечно, появление этих тонких математических результатов, не претендующих на немедленное практическое использование, совсем не облегчало восприятие более физических результатов Хаусдорфа.

Явным признаком того, что в математике есть что-то кроме аксиом, определений, теорем и их доказательств, стало появление компьютеров в середине XX века. Классическая математика отреагировала на это не совсем предусмотрительно — утверждением об очень ограниченной роли компьютеров в собственно математическом исследовании. Как известно, это — не лучший способ ответа на вызовы времени. Однако он продержался примерно 30 лет, до того момента, когда в науку и жизнь широко вошли персональные компьютеры.

В компьютерном мире невозможно читать лекции по математическому анализу, делая вид, что ты не знаешь, чем компьютерная математика отличается от классической математики теорем и доказательств. Приведем пример такого отличия.

Далеко не все интегралы удастся вычислять точно, пользуясь рецептами математического анализа. Многие приходится вычислять приближенно на компьютере. Это, пожалуй, одна из самых простых и полезных задач компьютерной математики, которая входит как составная часть в массу разнообразных более сложных задач. На компьютере интеграл вычисляется путем подсчета интегральных сумм при достаточно мелком разбиении промежутка интегрирования. Возникает вопрос — насколько мелким нужно брать это разбиение для достижения заданной точности. На эту тему в курсе математического анализа есть три теоремы, объясняющие, как нужно выбирать число точек разбиения для методов прямоугольников, трапеций и метода Симпсона. (Кстати, последний метод вырос из очень практической задачи подсчета объема пивных бочек.) Все эти теоремы строго доказаны и поучительны. Из них мы узнаем, например, что вопреки первому впечатлению, метод трапеций не принципиально лучше метода прямоугольников, а вот метод Симпсона, обкатанный пивоварами, заметно лучше первых. У этих теорем есть только один недостаток — они совершенно неприменимы в мире компьютеров. Дело в том, что оценка числа точек разбиения требует нахождения максимума модуля высоких производных (какой именно — зависит от метода). Эту оценку можно получить, если подсчет ведется на бумаге, но для компьютера производная — гораздо более сложный объект, чем интеграл (нужно делить два малых числа). Если ты не умеешь считать интегралы, то производные точно не сосчитаешь. Поэтому плодотворная идея для нахождения числа точек разбиения — это т. н. оценка Рунге. Рунге предлагает постепенно увеличивать число точек разбиения от n до $2n$ и смотреть, насколько при этом меняется интегральная сумма. Если изменение интегральных сумм не превосходит нужную нам точность, то нужно остановиться и считать, что мы нашли интересующий нас интеграл с этой точностью.

Идея Рунге проста в реализации и широко востребована в разных областях компьютерной математики. У нее есть только один недостаток — это не теорема. Не представляет труда построить контрпример — быстро меняющуюся функцию, для которой прямолинейное применение идеи Рунге невозможно. Более того, в области классической математики формул о таких вещах и говорить-то неприлично. Учебники и не говорят — их авторы приличные, уважаемые люди. Рунге тоже, между прочим, совсем не деятель эпохи постмодернизма. Он — почтенный немецкий профессор, ученик, между прочим, Вейерштрасса.

Это — модель соотношения компьютерной, вычислительной математики современности с классической математикой, без которой тоже невозможно представить себе современную физику. По глубокому замечанию великого Гёте, между двумя противоположными мнениями лежит не истина, между ними лежит проблема. Именно решением данной проблемы в той или иной форме занимаются сейчас люди, работаю-

щие в той области математики, которая близка к физике. Нет особого сомнения, что в историческом будущем эта работа выльется в новый синтез, соединяющий достижения предыдущих этапов. Однако сейчас положение меняется так быстро, что его трудно втиснуть в рамки стандартных учебников. Например, внедрение больших пакетов программ, скажем, пакета Wolfram Mathematica, существенно меняет акценты в этом вопросе. Этот переход можно сравнить с тем, который произошел в экспериментальной физике в момент, когда физик перестал делать свои приборы сам, а стал покупать сложные приборы у специализированных фирм. Вообще неожиданно оказалось, что некоторые области математики приобрели черты экспериментальной физики, а многие диссертации по математике трудно защищать потому, что в них нет и не нужно никаких теорем.

ЧТО ЖЕ ДЕЛАТЬ ЛЕКТОРУ?

Как же перестраивать и модернизировать в этой обстановке неопределенности курс математического анализа? По этому вопросу нет единого мнения. Один подход — представленный в первую очередь теми, кто не читает лекций по математическому анализу — предлагает отказаться от преподавания устаревших доктрин и сосредоточиться на чем-нибудь более современном, например, теории групп или дифференциальных форм.

Полезность этих математических дисциплин не вызывает сомнения, но при реализации идеи мы сталкиваемся с ограничениями антропологического и социального характера. Проще говоря, в заданное время в студента невозможно впихнуть неограниченно много совершенно новой информации, а отказаться для реализации идеи, скажем, от физического практикума (там тоже не все локализовано на переднем крае науки) представляется, мягко говоря, не совсем взвешенным.

Представляется, что лучше работать в рамках более взвешенного, хотя и менее эффективного подхода. Сохранив выдержавшие испытание временем части курса и уменьшив удельный вес ставших менее значимыми разделов (на этом пути удалось, между прочим, на четверть уменьшить число лекционных часов по сравнению с учебными планами времен создания классических учебников), сконцентрировать внимание на практических вопросах и задачах. Отказаться от представления о том, что курс должен содержать исключительно строго доказанные утверждения, и рисовать перед студентами перспективы развития наук, выросших из классического математического анализа (функционального анализа, топологии, дифференциальной геометрии).

Вспоминается история современника Фурье, аббата Сиейса, который на вопрос о том, что же он делал во время революции, ответил — «Как что? Жил».

-
- | | |
|---|--|
| <p>[1] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. М.: Мир, 1966. (<i>Feynman R.P., Leighton R.B., Sands M. The Feynman Lectures on Physics. AddisonWesley, Reading 1964</i>).</p> <p>[2] <i>Bracewell R.N. Sci. Am.</i> 1989. 260. P. 86.</p> <p>[3] <i>Usoskin I.G. et al. Astronomy & Astrophysics.</i> 2015. 581. id. A95.</p> <p>[4] Сен-Симон Мемуары. 1691–1701. М.: Наука, 2007. (<i>Saint-Simon Traités politiques et autres écrits. Paris, Gallimard, 1996</i>).</p> <p>[5] Фрик П.Г. Турбулентность: Модели и подходы. Регулярная и хаотическая динамика. М.–Ижевск, 2010.</p> <p>[6] Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды.</p> | <p>М.: Наука, 1967.</p> <p>[7] <i>Hausdorff F. Mathematische Annalen.</i> 1918. 79. P. 157.</p> <p>[8] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. М.: Наука, 1967.</p> <p>[9] Зельдович Я.Б., Соколов Д.Д. УФН. 1985. 146. С. 493. (<i>Zeldovich Ya.B., Sokoloff D.D. Sov. Phys. Usp.</i> 1985. 28. P. 606).</p> <p>[10] <i>Einstein A. Ann. Phys.</i> 1906. 19. P. 289.</p> <p>[11] Эйлер Л. Введение в анализ бесконечно малых. М.: Физматлит, 1967. (<i>Euleri L. Opera omnia. Genevae, 1945</i>).</p> <p>[12] <i>Hausdorff F. Mathematische Annalen.</i> 1914. 75. P. 428.</p> |
|---|--|
-

Heritage Fourier and problems of modernization of the course of mathematical analysis for physicists

D. D. Sokoloff

*Department of mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia
E-mail: sokoloff.dd@gmail.com*

Fourier lived and worked in an era when, in the studies on mathematical analysis, the first, heroic period and began a long period of ordering, improvement and strict presentation initial ideas. During this period, new and wonderful ideas were formulated, but the spirit of the era defined The form and style of the presentation of those classical textbooks on mathematical analysis,

according to which we now teach students. In the modern era, classical mathematics increasingly interacts with the mathematics of the computer age. This forces us to introduce new elements into seemingly well-established sections of mathematical analysis

PACS: 02.30.-f

Keywords: Fourier analysis, mathematical calculus, mathematical teaching.

Received 25 May 2018.

Сведения об авторе

Соколов Дмитрий Дмитриевич — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: sokoloff.dd@gmail.com.
