

## Линейная теория взаимодействия двух ленточных электронных потоков в продольном магнитном поле

Г. М. Вдовина,<sup>\*</sup> А. В. Титов<sup>†</sup>

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, факультет нелинейных процессов, кафедра электроники, колебаний и волн  
Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, д. 83*

(Статья поступила 24.07.2017; Подписана в печать 16.10.2017)

Построена линейная теория взаимодействия двух бесконечно тонких ленточных электронных потоков в гидродинамическом приближении. Предполагается, что электронные потоки движутся в пространстве между двумя проводящими поверхностями. При анализе учитывается влияние пространственного заряда, а также влияние продольного фокусирующего магнитного поля конечной величины. Рассматриваемая модель позволяет описать неустойчивость к высокочастотным (ВЧ) возмущениям исследуемой системы. Для данной модели выведено дисперсионное уравнение восьмой степени. Так как не предоставляется возможным записать его решение в аналитическом виде, получено решение дисперсионного уравнения графически. С точки зрения теории связанных волн каждому из пучков можно поставить в соответствие по четыре волны — быструю и медленную волны пространственного заряда, а также быструю и медленную циклотронные волны с учетом поправки вносимой пространственным зарядом. На основе решения дисперсионного уравнения проведен анализ влияния конечного магнитного поля на процесс развития неустойчивости в системе двух взаимодействующих электронных потоков. Из анализа дисперсионных характеристик можно сделать вывод, что наличие постоянного продольного магнитного поля приводит к появлению новых областей неустойчивости, что обусловлено взаимодействием не только волн пространственного заряда, но и циклотронных волн пучков.

PACS: 84.40.Fe; 84.30.Le

УДК: 621.385.632.3, 621.385.6

Ключевые слова: ленточный электронный поток, взаимодействие электронных потоков, неустойчивость, магнитное поле, поле пространственного заряда.

### ВВЕДЕНИЕ

Явление двухпотоковой неустойчивости, известное с давних времен, является классическим примером неустойчивости в распределенных системах. Оно представляло большой интерес для исследователей в области СВЧ-электроники достаточно долгое время [1, 2]. К началу 1990-х интерес к подобного рода системам заметно снизился. Однако последние тенденции в развитии электроники СВЧ свидетельствуют о возникновении новых горизонтов применения двухпотоковой неустойчивости и систем с двумя электронными пучками. В частности, речь идет о возможности использования подобных систем в субмиллиметровом диапазоне длин волн.

В данной работе произведена попытка построить линейную теорию взаимодействия двух бесконечно тонких ленточных электронных потоков в магнитном поле конечной амплитуды. Анализ проводится в гидродинамическом приближении. Для построения использована двумерная модель возмущенного ленточного бесконечно тонкого потока в продольном магнитном поле в пространстве дрейфа (рис.1). За счет влияния пространственного заряда и конечного фокусирующего магнитного поля рассматриваемая модель позволяет описать

неустойчивость к высокочастотным (ВЧ) возмущениям исследуемой системы. В известных работах [3–5] приведены результаты экспериментальных наблюдений за поведением трубчатых и ленточных электронных потоков, а также качественно описано явление неустойчивости, когда поток распадается на несколько отдельных структур. При анализе использован метод дисперсионного уравнения.

### 1. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ. ПОЛЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

Исследуемая модель представляет собой пространство дрейфа, ограниченное сверху и снизу проводящим плоскостями, между которыми движутся параллельно друг другу два бесконечно тонких ленточных электронных пучка. Пучки предполагаются предварительно промодулированными внешним сигналом. Вдоль направления движения пучков действует постоянное магнитное поле конечной величины  $B$ . На основе уравнений движения записана система из шести дифференциальных уравнений для высокочастотных компонент смещения электронов в каждом пучке (индекс «1» соответствует системе для первого электронного пучка,

<sup>\*</sup>E-mail: vdovinagm@gmail.com

<sup>†</sup>E-mail: titovav88@gmail.com

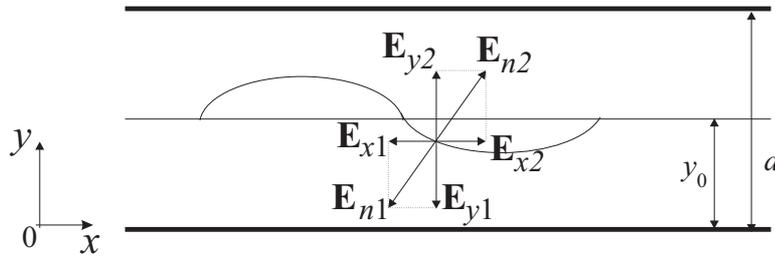


Рис. 1: Двумерная модель возмущенного ленточного бесконечно тонкого электронного потока. Нормальные компоненты напряженности поля пространственного заряда  $E_{n1}, E_{n2}$  ниже (индекс «1») и выше (индекс «2») электронного пучка

индекс «2» - системе для второго электронного пучка):

$$\begin{cases} \frac{d^2 \tilde{x}_{1,2}}{dt^2} = \eta E_{xSC} \\ \frac{d^2 \tilde{y}_{1,2}}{dt^2} = \omega_c \frac{d\tilde{z}_{1,2}}{dt} + \eta E_{ySC}, \\ \frac{d^2 \tilde{z}_{1,2}}{dt^2} = -\omega_c \frac{d\tilde{y}_{1,2}}{dt} \end{cases} \quad (1)$$

где  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$  – ВЧ смещения электронов,  $\eta = e/m$ ,  $e$  и  $m$  – заряд и нерелятивистская масса электрона,  $E_{xSC} = E_{xSC1} + E_{xSC2}$ ,  $E_{ySC} = E_{ySC1} + E_{ySC2}$  – компоненты суммарного поля пространственного заряда,  $\omega_c = \eta B$  – циклотронная частота.

Путем некоторых преобразований исходная система (1) была упрощена до системы из четырех дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \tilde{x}_1}{dt^2} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{01} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \tilde{x}_1 = \eta E_{xSC} \\ \frac{d^2 \tilde{y}_1}{dt^2} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{01} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \tilde{y}_1 = -\omega_c^2 \tilde{y}_1 + \eta E_{ySC} \\ \frac{d^2 \tilde{x}_2}{dt^2} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{02} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \tilde{x}_2 = \eta E_{xSC} \\ \frac{d^2 \tilde{y}_2}{dt^2} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{02} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \tilde{y}_2 = -\omega_c^2 \tilde{y}_2 + \eta E_{ySC} \end{cases} \quad (2)$$

где  $v_{01,02}$  – скорости электронных пучков.

Пучки взаимодействуют посредством полей пространственного заряда. Подробный вывод выражений для компонент поля пространственного заряда приведен в монографии [6] для случая бесконечно тонкого электронного пучка. Направление статического магнитного поля сказывается лишь при записи уравнений движения и не оказывает влияния в рамках данной модели на идею вывода выражений для полей пространственного заряда. Тогда, как для случая, когда электронный пучок движется в скрещенных полях, так и для случая, когда он движется в продольном магнитном поле, выражения для полей пространственного заряда будут иметь один и тот же вид.

Пусть бесконечно тонкий электронный поток, первоначально промодулированный ВЧ сигналом, движется в области, где внешние ВЧ-поля отсутству-

ют. Для определенности модулирующую входную секцию можно представить в виде отрезка плоской замедляющей системы. Тогда на входе в область, где ВЧ-полей нет, пучок имеет в общем случае продольное  $\tilde{x}$  и поперечное  $\tilde{y}$  ВЧ-смещения. И при дальнейшем движении пучок остается криволинейным и форма его изменяется лишь под действием ВЧ-полей пространственного заряда.

Нормальная составляющая напряженности поля пространственного заряда  $E_n$  терпит разрыв на поверхности пучка на величину  $\sigma/\epsilon_0$  ( $\sigma = \sigma_0 + \tilde{\sigma}$  – поверхностная плотность заряда,  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная), то есть продольная составляющая терпит разрыв на величину  $(\sigma/\epsilon_0) \sin \alpha$  (рис. 1), а поперечная – на  $(\sigma/\epsilon_0) \cos \alpha$ , где  $\alpha$  – угол наклона электронного пучка к оси  $x$ , причём в линейном приближении  $\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \partial \tilde{y} / \partial x$ ,  $\cos \alpha \approx 1$ . Тогда условия разрыва нормальной составляющей напряженности поля пространственного заряда в плоскости пучка запишутся в следующем виде ( $\tilde{\sigma} = -\sigma_0 \partial \tilde{x} / \partial x$ ):

$$E_{y2} - E_{y1} = -\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}, \quad (3)$$

$$E_{x2} - E_{x1} = -\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}. \quad (4)$$

В последних двух соотношениях (3) и (4) величины  $E_{x1}, E_{y1}$  и  $E_{x2}, E_{y2}$  соответствуют значениям компонент напряженности поля пространственного заряда ниже и выше пучка, соответственно.

Поскольку в рамках линейной теории траектории электронов не пересекаются, то можно считать, что над электронами, которые первоначально находились на оси пучка, заряд всегда остается таким же, как и под осью, и что электроны, первоначально близкие к границам пучка, отклоняются от оси незначительно. Тогда естественно считать поле пространственного заряда средним арифметическим полем над и под пучком. Следует отметить, что в целом подобное предположение является отходом от исходной модели бесконечно тонкого пучка. В данном случае приходится рассматривать пучок конечной толщины  $\Delta$ , а точнее, те электроны, которые находятся в статическом состоянии на его оси.

Используя изложенные выше соображения, находим компоненты суммарного поля пространственного заря-

да для двухпотоковой системы:

$$E_{xSC} = -\omega_{p1}^2 \frac{\Delta_1}{2\eta} \frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial x} g_1 - 2j\omega_{p1}^2 \frac{\Delta_1}{2\eta} \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x} g_{1x} - \omega_{p2}^2 \frac{\Delta_2}{2\eta} \frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial x} g_2 - 2j\omega_{p2}^2 \frac{\Delta_2}{2\eta} \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial x} g_{2x}, \quad (5)$$

$$E_{ySC} = \omega_{p1}^2 \frac{\Delta_1}{2\eta} \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x} g_1 + 2j\omega_{p1}^2 \frac{\Delta_1}{2\eta} \frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial x} g_{1y} + \omega_{p2}^2 \frac{\Delta_2}{2\eta} \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial x} g_2 + 2j\omega_{p2}^2 \frac{\Delta_2}{2\eta} \frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial x} g_{2y}, \quad (6)$$

$$g_{1,2} = \frac{\text{th} [\beta_0 (d - y_{01,02})] - \text{th} (\beta_0 y_{01,02})}{\text{th} [\beta_0 (d - y_{01,02})] + \text{th} (\beta_0 y_{01,02})}, \quad (7)$$

$$g_{1x,2x} = \frac{\text{th} [\beta_0 (d - y_{01,02})] \text{th} (\beta_0 y_{01,02})}{\text{th} [\beta_0 (d - y_{01,02})] + \text{th} (\beta_0 y_{01,02})}, \quad (8)$$

$$g_{1y,2y} = \frac{1}{\text{th} [\beta_0 (d - y_{01,02})] + \text{th} (\beta_0 y_{01,02})}, \quad (9)$$

где  $\beta_0$  — постоянная распространения волны, которой вначале были промодулированы электронные пучки,  $d$  — расстояние между проводящими плоскостями,  $y_{01}, y_{02}$  — координаты положений ввода пучков,  $\Delta_{1,2}$  — толщина пучка,  $\omega_{p1,2}^2 = \frac{\eta\sigma_0}{\varepsilon_0\Delta_{1,2}}$  — квадрат плазменной частоты,  $\sigma_0$  — поверхностная плотность заряда,  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная.

## 2. ДИСПЕРСИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Предполагаем, что все переменные величины пропорциональны  $\exp(-j\beta x)$ , тогда  $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$ . Из условия совместности исследуемой системы (2) с учетом выражений (5)–(9) записан определитель:

$$\begin{vmatrix} -\left[(\beta - \beta_{e1})^2 - \beta\beta_{p1}^2\Delta_1 g_{1x}\right] & -j\beta\beta_{p1}^2\frac{\Delta_1}{2}g_1 & \beta S^2\beta_{p2}^2\Delta_2 g_{2x} & -j\beta S^2\beta_{p2}^2\frac{\Delta_2}{2}g_2 \\ j\beta\beta_{p1}^2\frac{\Delta_1}{2}g_1 & -\left[(\beta - \beta_{e1})^2 + \beta\beta_{p1}^2\Delta_1 g_{1y} - \beta_{c1}^2\right] & j\beta S^2\beta_{p2}^2\Delta_2 g_2 & -\beta S^2\beta_{p2}^2\Delta_2 g_{2y} \\ \beta\beta_{p1}^2\frac{\Delta_1}{S^2}g_{1x} & -j\beta\beta_{p1}^2\frac{\Delta_1}{2S^2}g_1 & -\left[(\beta - \beta_{e2})^2 - \beta\beta_{p2}^2\Delta_2 g_{2x}\right] & j\beta\beta_{p2}^2\frac{\Delta_2}{2}g_2 \\ j\beta\beta_{p1}^2\frac{\Delta_1}{2S^2}g_1 & -\beta\beta_{p1}^2\frac{\Delta_1}{S^2}g_{1y} & j\beta\beta_{p2}^2\frac{\Delta_2}{2}g_2 & -\left[(\beta - \beta_{e2})^2 + \beta\beta_{p2}^2\Delta_2 g_{2y} - \beta_{c2}^2\right] \end{vmatrix} = 0, \quad (10)$$

где введены обозначения  $\beta_{e1} = \frac{\omega}{v_{01}}$ ,  $\beta_{e2} = \frac{\omega}{v_{02}}$ ,  $\beta_{p1} = \frac{\omega_{p1}}{v_{01}}$ ,  $\beta_{p2} = \frac{\omega_{p2}}{v_{02}}$ ,  $\beta_{c1} = \frac{\omega_{c1}}{v_{01}}$ ,  $\beta_{c2} = \frac{\omega_{c2}}{v_{02}}$ ,  $S = \frac{v_{02}}{v_{01}}$ .

В силу громоздкости полученное дисперсионное соотношение здесь не приводится. Как видно, оно представляет собой уравнение восьмого порядка. В общем виде аналитическое решение здесь провести не представляется возможным.

Решение данного уравнения иллюстрирует наличие в системе восьми волн (рис. 2). С точки зрения теории связанных волн каждому из пучков можно поставить в соответствие по четыре волны — быструю и медлен-

ную волны пространственного заряда, а также быструю и медленную циклотронные волны.

На рис. 2–5 приведены зависимости для корней дисперсионного уравнения, полученного на основании определителя (10), от волнового числа. Построение вспомогательных дисперсионных характеристик для случая невзаимодействующих пучков позволяет сделать вывод о том, что в исследуемой системе возможно взаимодействие различных типов волн, возбуждаемых в электронных потоках. К аналогичным выводам пришел автор работы [7]. В ней рассматривалась подобная задача, но для случая цилиндрических пучков [1, 7].

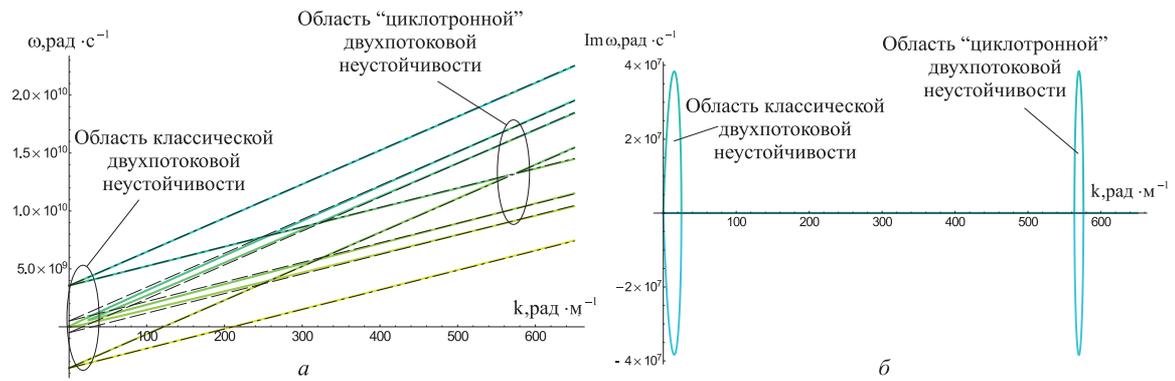


Рис. 2: Дисперсионная характеристика системы двух взаимодействующих ленточных электронных пучков, помещенных в магнитное поле конечной величины. Области неустойчивостей

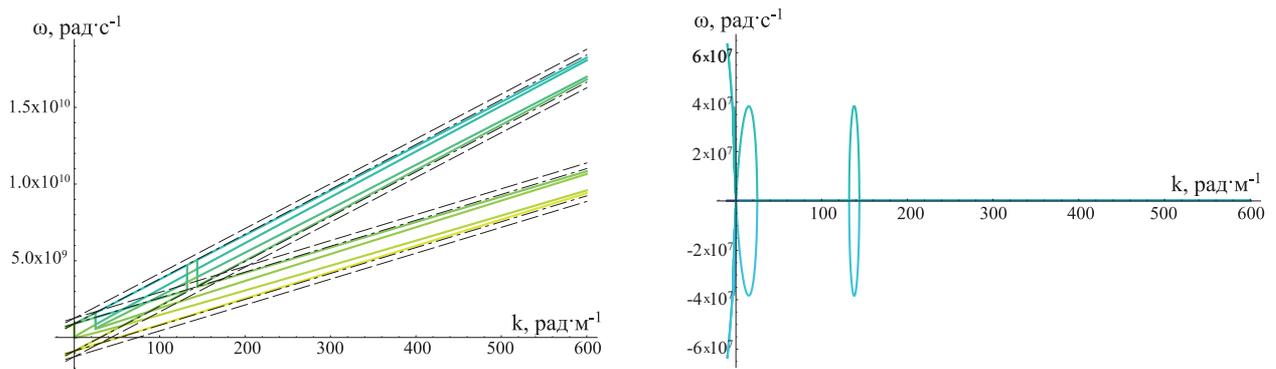


Рис. 3: Дисперсионная характеристика системы двух взаимодействующих ленточных электронных пучков ( $B = 0.005$  Тл)

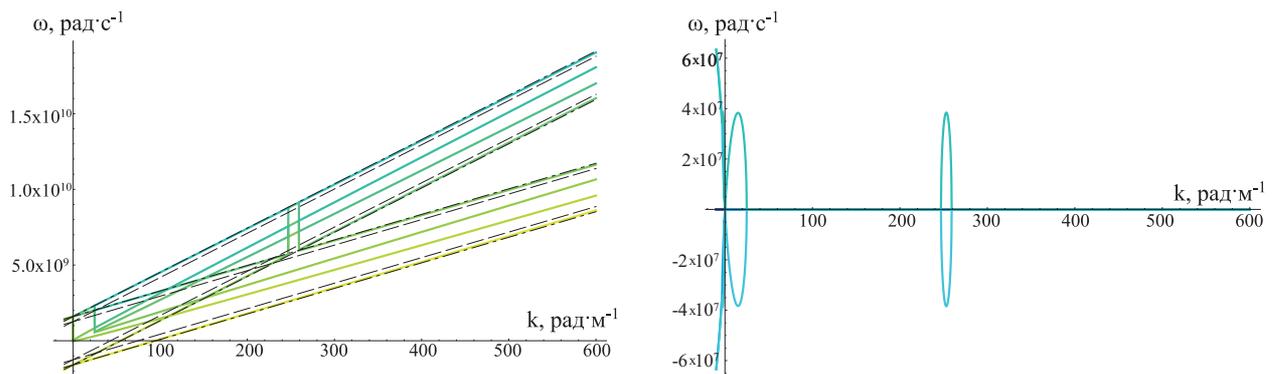


Рис. 4: Дисперсионная характеристика системы двух взаимодействующих ленточных электронных пучков ( $B = 0.01$  Тл)

Увеличение индукции магнитного поля приводит к тому, что область «циклотронной» двухпотоковой неустойчивости сдвигается вправо по оси абсцисс, что видно из графиков на рис. 3–5.

Изменение соотношения скоростей электронных потоков в данной системе также приводит к смещению областей неустойчивости. На рис. 6 приведены мнимые части решения дисперсионного уравнения для двух случаев. Индекс «1» соответствует напряжению первого пучка 800 В, второго — 2400 В. Индекс «2» — напря-

жению первого пучка 800 В, второго — 1800 В.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из анализа дисперсионных характеристик можно сделать вывод, что наличие постоянного продольного магнитного поля приводит к появлению новых областей неустойчивости, что обусловлено взаимодействием не только волн пространственного заряда, но и циклотронных волн пучков. Причем с увеличением ампли-

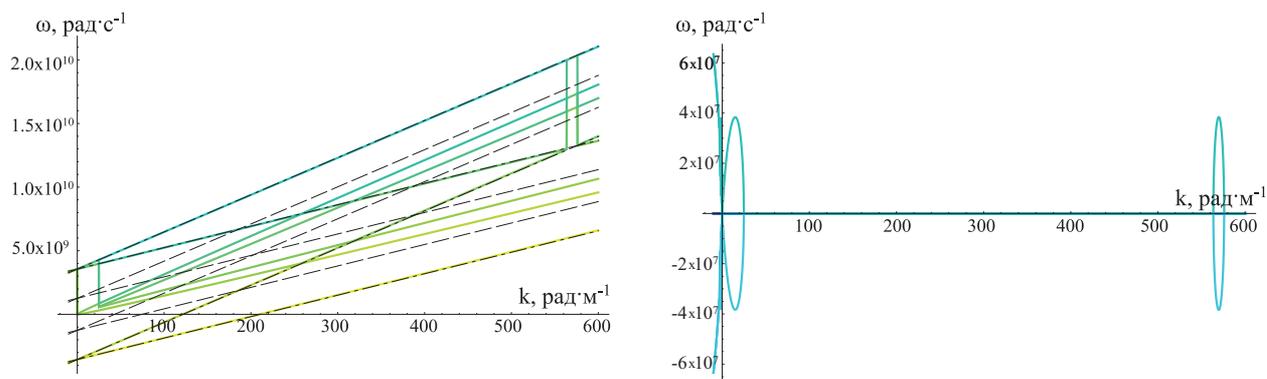


Рис. 5: Дисперсионная характеристика системы двух взаимодействующих ленточных электронных пучков (1 — напряжение на электронных пучках 800 В и 2400 В, 2 — 800 В и 1800 В)

туда магнитного поля области неустойчивости смещаются в сторону коротких длин волн. Следует отметить, что подобные результаты для случая ленточных пучков получены впервые.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 16-02-00238, 16-32-00468 мол\_а).

- [1] *Титов А. В.* Изв. вузов «Прикладная нелинейная динамика». 2016. **24**, № 1. С. 3.  
 [2] *Титов А. В.* Изв. вузов «Прикладная нелинейная динамика». 2016. **24**, № 2. С. 40.  
 [3] *Kyhl R. L., Webster H. F.* IRE Trans. on Electron Devices. 1956. **3**, N4. P. 172.  
 [4] *Pierce J. R.* IRE Trans. on Electron Devices. 1956. **3**, N4.

- P. 183.  
 [5] *Cutler C. C.* J. of Appl. Phys. 1956. **27**, N9. P. 1028  
 [6] *Шевчик В. Н., Трубеков Д. И.* Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Советское радио, 1970.  
 [7] *Vural B.* RCA Rev. 1961. **22**. P. 753.

## Linear theory of interaction of two sheet electron beams in longitudinal magnetic field

G. M. Vdovina<sup>a</sup>, A. V. Titov<sup>b</sup>

*Department of Electronics, Vibrations and Waves, Faculty of Nonlinear Processes, Saratov State University  
 Saratov 410012, Russia*

*E-mail: <sup>a</sup>vdovinagm@gmail.com, <sup>b</sup>titovav88@gmail.com*

Linear theory of interaction between two infinitely thin sheet electron beams has been built in hydrodynamic approximation. It's supposed that electron beams move in space between two conducting planes. Research takes into account the effect of space charge and finite longitudinal focusing magnetic field. The considered model allows to describe instability to high-frequency (HF) perturbations in the given system. The eight-power dispersion equation has been derived for given system. Since it's not possible to write down its analytical solution, that dispersion equation has been solved graphically. From the point of view of the theory of coupled waves four waves can be excited in each of the beams — fast and slow space-charge waves and fast and slow cyclotron waves. The effect of finite magnetic field on development of the instability has been investigated in case of two interaction electron beams on bases of dispersion equation solution. Investigation of the dispersion characteristics allow to conclude that presence of the permanent longitudinal magnetic field leads to occurrence of new instability regions, that is caused by not only interaction of space-charge waves, but also cyclotron waves in beams.

PACS: 84.40.Fe; 84.30.Le

*Keywords:* sheet electron beam, electron beam interaction, instability, magnetic field, space-charge field.

*Received 24 July 2017.*

### Сведения об авторах

1. Вдовина Галина Михайловна — канд. физ.-мат. наук, ассистент; тел.: (8452) 210-726, e-mail: vdovinagm@gmail.com.
2. Титов Алексей Владимирович — ассистент; тел.: (8452) 210-726, e-mail: titovav88@gmail.com.