

Вариационная модель пьезоэлектрического резонатора в форме прямоугольного параллелепипеда

А. А. Теплых,* Б. Д. Зайцев, А. М. Шихабудинов, И. А. Бородина

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН
Россия, 410019, Саратов, ул. Зеленая, д. 38

(Статья поступила 12.07.2017; Подписана в печать 18.09.2017)

В статье представлена теория вынужденных колебаний пьезоэлектрического резонатора в форме прямоугольного параллелепипеда. В основе метода лежит представление неизвестных компонент механического смещения и электрического потенциала внутри резонатора в виде линейных комбинаций ортогональных базисных функций. В качестве базисных функций для тела прямоугольной формы были выбраны полиномы Лежандра. Неизвестные коэффициенты, входящие в эти линейные комбинации определяются из условия стационарности лагранжиана, описывающего систему. В отличие от известного метода RPR (rectangular parallelepiped resonance), который позволяет рассчитать собственные частоты для свободного резонатора, представленный метод определяет распределение механических и электрических полей внутри резонатора для заданной возбуждающей частоты. Преимуществом метода является возможность использования комплексных материальных констант, что позволяет учесть вязкость и электрическую проводимость материала резонатора.

PACS: 43.20+g.

УДК: 534-16.

Ключевые слова: прямоугольный пьезорезонатор, пьезокерамика ЦТС-19, материальные константы, алгоритм Нелдера–Мида.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время часто возникает задача определения свойств пьезоэлектрических материалов, из которых изготавливаются различные резонаторы, датчики, излучатели и приемники ультразвука и т.д. Одним из способов определения свойств пьезоматериала является акустическая резонансная спектроскопия (Acoustic resonance spectroscopy). Данный способ заключается в том, что из исследуемого материала изготавливают образец в виде прямоугольного параллелепипеда и измеряют спектр его собственных частот или его отклик на воздействие импульсной внешней силы. В нашей лаборатории была сделана попытка определения материальных констант прямоугольного резонатора из пьезокерамики ЦТС–19, который возбуждался при помощи нанесенных на его противоположные стороны металлических электродов. Зависимость электрического импеданса данного резонатора от частоты была измерена, а также рассчитана при помощи двумерной математической модели, основанной на методе конечных элементов, аналогичной описанной в [1]. Как оказалось, вид измеренной и рассчитанной резонансных кривых в одном и том же частотном диапазоне качественно отличался, количество и форма резонансов не совпадали. Это объясняется тем, что двумерная модель не учитывает резонансные моды, возникающие в направлении третьей оси: в модели резонатор в этом направлении полагался бесконечным, хотя на практике его размер был соизмерим с остальными поперечными размерами резонатора. Появилась необходимость в создании

полностью трехмерной модели резонатора, учитывающей все его геометрические размеры и расположение электродов. Применение трехмерного метода конечных элементов оказалось слишком затратным с вычислительной точки зрения, поэтому был разработан вариационный подход к решению данной задачи по аналогии с методом, представленным в [2, 3]. Применение этого метода позволило уточнить значения материальных констант пьезокерамики путем решения обратной задачи при помощи алгоритма Нелдера–Мида.

1. ВАРИАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ПЬЕЗОРЕЗОНАТОРА В ФОРМЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях пьезоэлектрического резонатора в форме прямоугольного параллелепипеда. Его поперечные размеры составляют $2L_1$, $2L_2$ и $2L_3$, ребра параллельны координатным осям, центр резонатора лежит в начале координат. На левую и правую грани резонатора с координатами $x_1 = -L_1$ и $x_1 = +L_1$ нанесены металлические электроды, электрический потенциал на которых меняется во времени по гармоническому закону с частотой ω . Необходимо найти распределение акустического поля и электрического потенциала внутри такого резонатора. Как было предложено в работе [3], запишем компоненты механического смещения u_i и электрический потенциал φ в виде линейной комбинации ортогональных базисных функций:

$$u_i = \sum_{p,q,r=0}^N a_i^{(p,q,r)} F^{(p,q,r)}(x_1, x_2, x_3) \exp(I\omega t), \quad (1)$$

*E-mail: teplykhaa@mail.ru

$$\varphi = \sum_{p,q,r=0}^N a_4^{(p,q,r)} F^{(p,q,r)}(x_1, x_2, x_3) \exp(I\omega t). \quad (2)$$

Здесь I — мнимая единица, t — время, $a_1, \dots, a_4$ — комплексные весовые коэффициенты. F является ортогональной базисной функцией специального вида:

$$F^{(p,q,r)}(x_1, x_2, x_3) = (L_1 L_2 L_3)^{-1/2} P_p(x_1/L_1) \times \\ \times P_q(x_2/L_2) P_r(x_3/L_3), \quad (3)$$

где $P_n(x)$ — полином Лежандра порядка n . Запись $\sum_{p,q,r=0}^N$ обозначает, что целочисленные индексы p, q, r принимают все возможные значения от 0 до N включительно. Таким образом, выражения для u_i и φ состоят из N^3 слагаемых. Удобство такого представления станет ясно из дальнейших рассуждений.

В работах [2, 3] сформулирован вариационный подход к задаче о колебаниях пьезорезонатора. В них показано, что колебания в такой системе должны удовлетворять условию стационарности лагранжиана, описывающего систему:

$$\delta L = 0, \quad (4)$$

где лагранжиан L есть разность кинетической и потенциальной энергии исследуемой системы. Как известно, кинетическая энергия резонатора W_k записывается в виде:

$$W_k = \frac{1}{2} \int_V \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dV, \quad (5)$$

где ρ — плотность, u_i — компонента механического смещения, V — объем резонатора. Потенциальная энергия пьезорезонатора W_p является суммой нескольких величин:

$$W_p = \frac{1}{2} \int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_j} c_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} e_{kij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \varepsilon_{jkl} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dV, \quad (6)$$

где c_{ijkl} , e_{kij} , ε_{jkl} — компоненты тензора упругости, пьезоэлектрического тензора и тензора диэлектрической проницаемости, соответственно. Таким образом, можно определить коэффициенты a в выражениях (1), (2) исходя из условия стационарности лагранжиана:

$$\frac{\partial L}{\partial a^{(p,q,r)}} = 0, \quad (7)$$

где $p, q, r = 0, \dots, N$. В работе [3] рассматриваются собственные колебания резонатора со свободными гранями, поэтому условие (7) приводит к задаче на собственные значения, решение которой позволяет найти собственные частоты колебаний резонатора. В нашем случае на некоторых гранях сформулированы граничные условия типа Дирихле для потенциала φ :

$$\varphi = V_1|_{x_1=-L_1}, \quad \varphi = V_2|_{x_2=-L_2}, \quad (8)$$

где V_1 и V_2 — амплитуды потенциала на левой и правой гранях резонатора, соответственно. Некоторые исследователи пытались учесть их, видоизменяя выражение (2) таким образом, чтобы эти граничные условия выполнялись автоматически. Однако эти попытки приводили к нарушению важного свойства ортогональности базисных функций. В данной работе мы учитываем эти граничные условия при помощи добавочного слагаемого для лагранжиана: поверхностного интеграла

$$W_s = \gamma \sum_{b=1}^2 \int_{S_b} \varphi (\varphi - V_b) dS. \quad (9)$$

Здесь S_b — площадь соответствующей грани, а γ — скалярный параметр. При $\gamma \rightarrow \infty$ учет интеграла (9) приводит к выполнению граничных условий (8).

Теперь, используя (7) мы можем записать систему уравнений для $a^{(p,q,r)}$ в явном виде:

$$\delta L = \int_V \delta u_i \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + e_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) - \rho \omega^2 u_i \right] dV + \int_V \delta \varphi \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(e_{jkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \varepsilon_{klj} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) \right] dV + \gamma \sum_{b=1}^2 \int_{S_b} \delta \varphi (\varphi - V_b) dS \quad (10)$$

или

$$- \int_V \rho \omega^2 a_i^{(p,q,r)} F(p, q, r) F(p', q', r') dV + \int_V \frac{\partial F(p, q, r)}{\partial x_j} \left(c_{ijkl} a_i^{(p,q,r)} + e_{kij} a_4^{(p,q,r)} \right) \frac{\partial F(p', q', r')}{\partial x_k} dV = 0, \\ \int_V \frac{\partial F(p, q, r)}{\partial x_j} \left(e_{jkl} a_i^{(p,q,r)} - \varepsilon_{jkl} a_4^{(p,q,r)} \right) \frac{\partial F(p', q', r')}{\partial x_k} dV + \gamma \sum_{b=1}^2 \int_{S_b} a_4^{(p,q,r)} F(p, q, r) F(p', q', r') dS - \\ - \gamma \sum_{b=1}^2 \int_{S_b} V_b F(p, q, r) F(p', q', r') dS = 0 \quad (11)$$

Как видно, данное выражение является системой линейных уравнений относительно $a^{(p,q,r)}$, и его можно переписать в более компактной форме:

$$Aa^{(p,q,r)} = B. \quad (12)$$

Решая данную систему уравнений относительно $a^{(p,q,r)}$, можно найти весовые коэффициенты для выражений (1) и (2). Несмотря на то, что данная система состоит из $4N^3$ уравнений, благодаря специальному виду базисной функции (3) большинство коэффициентов в ней равны нулю, система является разреженной и поддается решению за приемлемое время. Таким образом, можно найти явные выражения для функций распределения акустического поля u_i и электрического потенциала φ для определенной частоты ω возбуждающего поля. Это позволяет найти ток смещения через боковую грань резонатора:

$$J = I\omega \int_{S_1} e_{1kl} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \varepsilon_{1k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dS \quad (13)$$

и определить электрический импеданс резонатора

$$Z = \frac{V_2 - V_1}{J} \quad (14)$$

как функцию частоты. Это является важным преимуществом данного метода по сравнению с описанным в [3], который позволяет находить спектр собственных частот резонатора, но ничего не говорит о соотношении их амплитуд и импедансов на этих частотах.

2. УТОЧНЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ МАТЕРИАЛЬНЫХ КОНСТАНТ ПЬЕЗОРЕЗОНАТОРА

Пьезоэлектрические резонаторы, импеданс которых измерялся, были изготовлены из пьезокерамики ЦТС-19. Заготовки для резонаторов в виде цилиндров диаметром 20 мм и высотой 18 мм были приобретены в ООО «Аврора-ЭЛМА», г. Волгоград. Из такого цилиндра был изготовлен резонатор в форме прямоугольного параллелепипеда с поперечными размерами $2L_1 = 17.96 \pm 0.01$ мм, $2L_2 = 14.14 \pm 0.01$ мм, $2L_3 = 14.14 \pm 0.01$ мм. Плотность образца была равна 7430 ± 30 кг/м³. Полярная ось Z пьезокерамики была параллельна размеру 17.96 мм. Были измерены частотные зависимости для действительной и мнимой частей электрического импеданса в диапазоне 75–775 кГц для данного резонатора, при двух конфигурациях электродов: (образец № 1) электроды нанесены на торцы параллелепипеда, так что возбуждающее электрическое поле было параллельно полярной оси пьезокерамики, и (образец № 2) электроды нанесены на боковые стороны параллелепипеда и возбуждающее электрическое поле было перпендикулярно полярной оси пьезокерамики. Во время выполнения всех

измерений образцы располагались на низкоимпедансной подставке из пороллона. Все измеренные зависимости содержали главный (наибольший по амплитуде) максимум электрического импеданса на частотах 80–100 кГц. Добротность резонаторов на этой частоте оказалась в пределах 90–120, что позволило определить фактор вязкости пьезокерамики, который оказался равен $\eta = (1.5 - 1.8) \times 10^{-8}$ с / рад. Соответственно, динамический тензор упругости в данной работе принимается равным $c^D = c \times (1 + I\eta\omega)$.

При помощи вышеописанной модели с максимальным порядком полиномов Лежандра $N = 21$ были рассчитаны частотные зависимости электрического импеданса для этих резонаторов в диапазоне 75–775 кГц. Количество и расположение резонансных пиков на теоретической кривой качественно соответствовало экспериментальным данным, что позволило применить выбранный метод для решения обратной задачи. Стартовые значения для алгоритма были взяты из литературы [4]. Для уточнения значений материальных констант был использован алгоритм Нелдера–Мида [5]. Целевая функция, которую минимизировал алгоритм, записывалась в виде:

$$F = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\log |Z_i^e| - \log |Z_i^t|)^2}, \quad (15)$$

где $|Z_i^e|$ и $|Z_i^t|$ — измеренный и рассчитанный модуль импеданса на частоте f_i , соответственно, n — количество точек измерения. Преимущество выбранного алгоритма состоит в том, что он не требует вычисления производных минимизируемой функции. В расчете использовались значения плотности и фактор вязкости пьезокерамики, которые не участвовали в процессе оптимизации. Результаты показаны в таблице.

Таблица I: Уточненные значения материальных констант материала пьезорезонаторов

Константа	Литература	Образец № 1, Образец № 2,	
		$E \parallel Z$	$E \perp Z$
c_{11} , 10 ¹⁰ Па	10.9	10.73	11.02
c_{12} , 10 ¹⁰ Па	6.1	5.94	6.25
c_{13} , 10 ¹⁰ Па	5.4	4.97	4.49
c_{33} , 10 ¹⁰ Па	9.3	8.37	9.21
c_{44} , 10 ¹⁰ Па	2.4	2.86	2.02
e_{15} , Кл/м ²	10.6	11.76	9.49
e_{13} , Кл/м ²	−4.9	−3.75	−4.5
e_{33} , Кл/м ²	14.9	13.05	15.2
$\varepsilon_{11}/\varepsilon_0$	820	801.8	873.8
$\varepsilon_{33}/\varepsilon_0$	840	797.9	850.2

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работы был предложен новый метод расчета импеданса пьезорезонатора в форме прямоугольного параллелепипеда, и были определены уточненные значения

материальных констант для двух образцов пьезокерамики ЦТС-19 российского производства.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 16-07-00984а.

-
- [1] Теплых А.А., Зайцев Б.Д., Кузнецова И.Е. *Ученые записки физического ф-та* Московского ун-та. 2014. № 5. P. 145328.
[2] Holland R., Nisse E. E. P. IEEE TUFFC. 1968. **SU-15**, N 2. P. 119.
[3] Ohno.I. Phys Chem Minerals. **17**. P. 371.
[4] Тополов В.Ю., Панич А.Е. Электронный научный журнал «ИССЛЕДОВАНО В РОССИИ». 2008. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2008/002.pdf>.
[5] Nelder J. A., Mead R. Comput. J. 1965. **7**. N 4. P. 308.

Variation model of the piezoelectric resonator in the form of a rectangular parallelepiped

A. A. Teplykh^a, B. D. Zaitsev, A. M. Shikhabudinov, I. A. Borodina

Saratov branch of Kotelnikov Institute of Radiotechnics and Electronics of RAS, Saratov, 410019, Russia

E-mail: ^ateplykhaa@mail.ru

The theory of forced oscillations of the piezoelectric resonator in the form of a rectangular parallelepiped is presented in article. This method based on representation of unknown components of mechanical displacements and electric potential in the resonator in the form of the linear combinations of orthogonal basic functions. The Legendre polynoms was choosed as basic functions for rectangular resonator. The unknown coefficients entering these linear combinations are defined from a condition of a stationarity of the Lagrangian of the system. Unlike the known RPR method (rectangular parallelepiped resonance) which allows to calculate natural frequencies for the free resonator the presented method defines distribution of mechanical and electric fields in the resonator for the given exciting frequency. Advantage of a method is the possibility of use of complex material constants that allows taking into account the viscosity and electrical conductance of material of the resonator.

PACS: 43.20+g.

Keywords: rectangular resonator, piezoceramics CTS-19, material constants, Nelder–Mead algorithm.

Received 12 July 2017.

Сведения об авторах

1. Теплых Андрей Алексеевич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (452) 27-24-01, e-mail: teplykhaa@mail.ru.
2. Зайцев Борис Давыдович — докт. физ.-мат. наук, профессор, зав. лабораторией; тел.: (452) 27-24-01, e-mail: zait-boris@yandex.ru.
3. Шихабудинов Александр Магомедович — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (452) 27-24-01, e-mail: alexsheih@yandex.ru.
4. Бородин Ирина Анатольевна — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (452) 27-24-01, e-mail: borodinaia@yandex.ru.