Распространение интенсивных акустических пучков в вязкоупругой среде с полостями

В. А. Гусев*
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра акустики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
(Статья поступила 08.07.2017; Подписана в печать 13.09.2017)

Рассмотрено распространение акустических волн и пучков большой интенсивности в вязкоупругих средах, содержащих газовые полости. Отклик такой среды на внешнее акустическое воздействие отличается различными частотно–зависимыми эффектами и сложной временной зависимостью, в частности резонансным и релаксационным характером. Поведение вязкоупругого материала такой среды носит релаксационный характер, несущий память о воздействии в предыдущие моменты времени. Динамика внутренних элементов — включений и полостей — может носить ярко резонансный характер. Рассчитана трансформация временных профилей и поперечной структуры пучков при распространении в подобных средах со сложной внутренней динамикой.

PACS: 43.25.+y, 47.55.dd, 47.40.Nm, 43.30.+m УДК: 534.222
Ключевые слова: вязкоупругость, среда с памятью, газовые полости, нелинейные пучки.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что введение в жидкую среду сильно сжимаемых включений, например, газовых пузырьков, вызывает значительное уменьшение локальной скорости звука, а также рост эффективного нелинейного параметра. Скорость звука и нелинейный параметр определяются концентрацией включений и их пространственным распределением [1–3]. Это позволяет управлять пространственно-временной структурой акустического поля и потоками энергии с помощью формирования заданных конфигураций включений, что может быть использовано для создания искусственных метаматериалов. Для создания таких фиксированных конфигураций удобно использовать гелеобразные матрицы или резиноподобные материалы, в которые «вмораживаются» газовые поры. Данная работа посвящена анализу акустических явлений большой интенсивности в таких средах.

1. МОДЕЛЬ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ С ПОЛОСТЯМИ

Рассмотрим для определенности резиноподобную среду с малым модулем сдвиговой упругости. Обычно такие среды проявляют вязкоупругие свойства, т. е. в зависимости от параметров внешнего воздействия могут вести себя и скорее как упругие тела или скорее как жидкости. В общем случае реализуется некоторое промежуточное поведение, характеризуемое эффектом памяти. Предположим, что в этой среде сформированы газовые поры, концентрация которых в пространстве в общем случае является переменной и описывается некоторым заданным законом. В частности, представляет интерес ситуация, когда концентрация зависит от поперечной координаты по отношению к направлению распространения волны, что может приводить к эффектам фокусировки или дефокусировки на неоднородности распределения пузырьков. Далее будем считать, что поры непроницаемы, друг с другом не взаимодействуют и друг на друга не влияют.

Часть тензора напряжений, связанная со сдвиговыми деформациями, в среде со сложной внутренней динамикой и частотно-зависимым откликом может быть задана выражением [4]:

$$\sigma_{ik} = 2\mu \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty u_{ik}\,(t-\xi)\, G\left(\frac{\xi}{\tau}\right) d\xi,$$

где функция G описывает процесс релаксации к равновесному значению. Для релаксации классического типа это ядро имеет экспоненциальный вид $G = \exp(-\xi/\tau)$. В предельных случаях больших и малых времен релаксации можно записать следующие приближенные выражения:

$$\text{при } \omega\tau >> 1 \quad \sigma_{ik} \approx 2\mu u_{ik} - \frac{2\mu}{\tau} \int_0^\infty u_{ik}\,(t-\xi)\, d\xi;$$

$$\text{при } \omega\tau << 1 \quad \sigma_{ik} \approx 2\mu\tau \frac{\partial u_{ik}}{\partial t} - 2\mu\tau^2 \frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial t^2}.$$

В первом случае среда близка к упругому телу, во втором — к вязкой жидкости.

Используя выражение для тензора напряжений, можно записать обобщение волнового уравнения для смещения частиц u в поле акустической волны в вязкоупругой среде с полостями:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = c_l^2 \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} + c_t^2 \Delta \left[\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty \mathbf{u}\,(t-\xi)\, G\left(\frac{\xi}{\tau}\right) d\xi - \mathbf{u}\right] + \mathbf{F}. \quad (1)$$

Здесь c_l и c_t — скорости продольной и поперечной волн, функция $\mathbf{F}$ имеет смысл источника акустического поля. При распространении акустической волны в среде с включениями или полостями функция

*E-mail: vgusev@bk.ru

F определяет вторичное поле, рассеянное этими включениями. Это поле зависит от конкретной динамики и мод колебаний границ полостей. Но ясно, что основной вклад в излучение будет давать монопольный источник, связанный с изменением объема полости. Кроме того, любой вектор может быть представлен в виде суммы потенциальной и вихревой компонент, но вклад в изменение объема будет давать только потенциальная часть. Поэтому в главном приближении функцию **F** можно задать в виде $\mathbf{F} = \operatorname{grad} W$, где $W = c_l^2 \nu V$, ν — концентрация полостей, V — относительное изменение объема полости. Далее будем считать, что концентрация полостей пространственно неоднородна, например $\nu = \nu(z)$.

2. ДИНАМИКА ПОЛОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Рассмотрим динамику поры под действием акустической волны. Для этого необходимо записать граничные условия на поверхности полости при $r = R_0$. Поскольку основной вклад в излучение дает монопольные член, ограничимся рассмотрением сферически симметричных колебаний поры. Граничное условие — равенство давлений на границе полости имеет вид:

$$\sigma_{rr} = \frac{p}{\rho_0} + c_l^2 \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2u_r}{r} \right) + 2c_t^2 \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \frac{\partial u_r(t-\xi)}{\partial r} G\left(\frac{\xi}{\tau}\right) d\xi = \frac{P}{\rho_0}, \quad (2)$$

здесь p — давление в падающей волне, P — давление внутри полости. Колеблющаяся полость излучает сферически симметричную волну с потенциалом

$$\phi = \frac{1}{r}\Phi\left(t - \frac{r-R}{c_0}\right),$$

при этом смещение в среде задается выражением $u_r = \partial\phi/\partial r$. Подставляя в (2) выражение для потенциала, получим:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + 2\frac{c_t^2}{c_l^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty G\left(\frac{\xi}{\tau}\right)\hat{L}\Phi\frac{\partial u_r(t-\xi)}{\partial r}d\xi - \frac{R}{\rho_0}P = -\frac{R}{\rho_0}p,$$

где $\hat{L} = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\dfrac{c_l}{R}\dfrac{\partial}{\partial t} + 2\dfrac{c_l^2}{R^2}$. Давление внутри полости также задается через потенциал:

$$-P = \frac{3c_g^2\rho_g}{c_l R^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{c_l}{R}\Phi\right) + (\varepsilon - 1)\frac{c_g^2}{\rho_g}\left[\frac{3\rho_g}{c_l R^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{c_l}{R}\Phi\right)\right]^2.$$

Здесь $\varepsilon = (\gamma+1)/2$ — нелинейный параметр газа в полости, $\gamma = c_p/c_v$. В результате для потенциала можно получить уравнение

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + \frac{4c_t^2}{c_l R}\left[1 + \frac{R}{2c_l}G'(0) + \frac{3c_g^2\rho_g}{4c_t^2\rho_0}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{4c_t^2}{R^2}\left[1 + \frac{R}{2c_l}G'(0) + \frac{R^2}{2c_l^2}G''(0) + \frac{3c_g^2\rho_g}{4c_t^2\rho_0}\right]\Phi +$$
$$+ (\varepsilon-1)\frac{9c_g^2\rho_g}{R^3c_l^2\rho_0}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{c_l}{R}\Phi\right)^2 + \frac{4c_t^2}{R^2}\int_0^\infty\left[G'\left(\frac{\xi}{\tau}\right) + \frac{R}{c_l}G''\left(\frac{\xi}{\tau}\right) + \frac{R^2}{2c_l^2}G'''\left(\frac{\xi}{\tau}\right)\right]\Phi(t-\xi)\,d\xi = -\frac{R}{\rho_0}p. \quad (3)$$

В предельных случаях малых и больших времен релаксации при учете только линейных членов это выражение сводится к неоднородному уравнению колебаний:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + 2\delta\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \omega_0^2\Phi = -\frac{R}{\rho_0}p, \quad (4)$$

где при $\omega\tau \gg 1$

$$\delta = \frac{2c_t^2}{c_l R}\left[1 + \frac{3c_g^2\rho_g}{4c_t^2\rho_0}\right],$$

$$\omega_0 = \frac{2c_t}{R}\sqrt{1 + \frac{3c_g^2\rho_g}{4c_t^2\rho_0}},$$

а при $\omega\tau \ll 1$

$$\delta = \frac{2c_l}{R}\left(\frac{c_t^2}{c_l^2}\frac{c_l\tau}{R} + \frac{3c_g^2\rho_g}{4c_l^2\rho_0}\right)\left(1 + \frac{c_t^2}{c_l^2}\frac{c_l\tau}{R}\right)^{-1},$$

$$\omega_0 = \frac{c_l}{R}\sqrt{3\frac{c_g^2\rho_g}{c_l^2\rho_0}}\left(1 + \frac{c_t^2}{c_l^2}\frac{c_l\tau}{R}\right)^{-1/2}.$$

3. САМОСОГЛАСОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

В итоге получаем, что акустическое поле в вязкоупругой среде с полостями определяется связанными уравнениями (1) и (3) (или в линейном приближении (4)). Уравнение (1) описывает распространение волны с учетом вторичного поля, генерируемого изменением объема полости V. Уравнение (3) описывает колебания границы полости под действием падающей волны. Функция $\mathbf{F}$ в (1) определяется изменением объема полости V, который связан с потенциалом Φ следующими соотношениями: $V = (R_0 + R')^3 \Big/ R_0^3 - 1 \approx 3R'/R_0 + 3R'^2/R_0^2$. Для поля вблизи полости можно использовать приближенное выражение $R' \approx -\Phi/R_0^2$. Эти соотношения позволяют замкнуть систему уравнений (1) и (3).

Дальнейшее продвижение заключается в формулировании одного замкнутого самосогласованного уравнения. Для этого необходимо использовать ряд упрощающих предположений. Во-первых, будем рассматривать низкочастотное приближение по сравнению с собственной частотой колебаний полостей $\omega << \omega_0$. Интерес к этой области связан с хорошо известным фактом, что именно в низкочастотной области в жидкости с пузырьками наблюдается заметное изменение скорости, а дисперсионные эффекты выражены относительно слабо. В этом случае уравнение (3) (это наглядно видно из уравнения (4)) в старшем порядке определяет линейную алгебраическую связь между потенциалом Φ и давлением в падающей волне. Далее, используя соотношение между смещением и давлением $p = -\rho_0 c_l^2 \mathrm{div}\mathbf{u}$, уравнения (1) и (3) удается свести к одному уравнению для акустического давления

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_{eff}^2 \Delta p + \hat{L}_\Phi \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_l^2 \Delta p \right) = \left(1 + \hat{L}_\Phi\right) c_t^2 \Delta \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty p\,(t-\xi)\, G\left(\frac{\xi}{\tau}\right) d\xi - p \right] - \frac{3\nu c_l^2}{\omega_0^4 R_0^4 \rho_0} \Delta \left(1 + \hat{L}_\Phi\right) p^2, \quad (5)$$

где оператор $\hat{L}_\Phi$ учитывает все члены уравнения (3), кроме линейного по Φ. В уравнении (5) введена эффективная скорость звука

$$c_{eff}^2 = c_l^2 \left(1 - \frac{3\nu c_l^2}{\omega_0^2 R_0^2}\right).$$

Уравнение (5) является самосогласованным и представляет собой волновое уравнение с эффективной скоростью звука и слабыми дисперсионными и нелинейными слагаемыми, приводящими к медленному искажению профиля волны.

4. ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

При исследовании ограниченных пучков обычно можно пользоваться квазиоптическим приближением $p = p\left(\tau = t - z/c_{eff0}, \mu z, \sqrt{\mu}x, \sqrt{\mu}y\right)$, в котором выделяется быстрая переменная, связанная с переносом волны как целого, и медленные искажения временного профиля и поперечной формы волны. В этом приближении и в низкочастотной области $\omega << \omega_0$ уравнение (5) удается упростить:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\Delta n\,(x,y,z)}{c_{eff0}} \frac{\partial p}{\partial \tau} + A\frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} + B\frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3} + \begin{array}{c}\text{дисперсионные}\\ \text{члены}\end{array} - \frac{\varepsilon_{eff}}{\rho_{eff} c_{eff0}^3} p \frac{\partial p}{\partial \tau} + \right.$$
$$\left. + \begin{array}{c}\text{нелинейные}\\ \text{члены}\end{array} - \left(1 + \hat{L}_\Phi\right) \frac{c_t^2}{c_{eff0}^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\infty p\left(\tau + \frac{z}{c_{eff0}} - \xi\right) G\left(\frac{\xi}{\tau}\right) d\xi - p \right] \right) = \frac{c_{eff0}}{2} \Delta_\perp p.$$

Важно подчеркнуть, что входящая в это уравнение величина Δn имеет смысл изменения коэффициента преломления, но определяется различием концентрации полостей в различных точках. Для больших и малых времен релаксации можно записать уравнения типа Хохлова–Заболотской–Кузнецова:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\Delta n\,(x,y,z)}{c_{eff0}} \frac{\partial p}{\partial \tau} + A\frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} + B\frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3} - \frac{\varepsilon_{eff}}{\rho_{eff} c_{eff0}^3} p \frac{\partial p}{\partial \tau} \right) = \frac{c_{eff0}}{2} \Delta_\perp p. \quad (6)$$

Отличие состоит в виде коэффициентов. При $\omega\tau \gg 1$ $\omega_0 \sim \dfrac{2c_t}{R}$ и коэффициенты равны

$$A = \frac{2\delta}{\omega_0^2}\left(1 - \frac{c_l^2}{c_{eff0}^2}\right),$$

$$\omega_0 \sim \frac{2c_t}{R}, \quad B = \frac{1}{\omega_0^2}\left(1 - \frac{c_l^2}{c_{eff0}^2}\right),$$

$$\frac{\varepsilon_{eff}}{\rho_{eff}c_{eff0}^3} = (\varepsilon - 1)\left(1 - \frac{c_l^2}{c_{eff0}^2}\right)\frac{9c_g^2\rho_g}{\omega_0^2 R^4 \rho_0^2}.$$

При $\omega\tau \ll 1$: $\omega_0 \sim \left(\sqrt{3}c_g/R\right)\sqrt{\rho_g/\rho_0}$,

$$A = \frac{2\delta}{\omega_0^2}\left(1 - \frac{c_l^2}{c_{eff0}^2}\right) + \frac{c_t^2}{c_{eff0}^2},$$

$$B = \frac{1}{\omega_0^2}\left(1 - \frac{c_l^2}{c_{eff0}^2}\right), \quad \omega_0 \sim \frac{2c_t}{R},$$

$$\frac{\varepsilon_{eff}}{\rho_{eff}c_{eff0}^3} = (\varepsilon - 1)\left(1 - \frac{c_l^2}{c_{eff0}^2}\right)\frac{9c_g^2\rho_g}{\omega_0^2 R^4 \rho_0^2}.$$

Выражения для коэффициентов похожи, но отличаются значениями входящих в них параметров. В частности, собственная частота $\omega_0^{(\omega\tau\gg1)} \gg \omega_0^{(\omega\tau\ll1)}$. Это означает, что значение эффективного нелинейного параметра для упругой среды значительно меньше его значения для вязкой жидкости:

$$\varepsilon_{eff}^{(\omega\tau\gg1)} \ll \varepsilon_{eff}^{(\omega\tau\ll1)}.$$

Вывод вышеприведенных уравнений, например, (6) относился к случаю, когда волна падает на границу среды по нормали и граничное условие задается на плоскости, перпендикулярной направлению распространения. При наклоном падении нужно выбрать другие эволюционные координаты, а именно продольную медленную координату в виде $\xi = x/\cos\theta$, $\eta = z - x\,\mathrm{tg}\,\theta$, где θ — угол падения волны [5]. Такой выбор координат позволяет ставить условие на той же границе среды, хотя она теперь и не перпендикулярна направлению распространения. Процедура вывода эволюционного уравнения аналогична выводу уравнения (6) и приводит к следующему результату:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial p}{\partial\xi} + \frac{\Delta n}{c_{eff0}}\frac{\partial p}{\partial\tau} + A\frac{\partial^2 p}{\partial\tau^2} + B\frac{\partial^3 p}{\partial\tau^3} - \frac{\varepsilon_{eff}}{\rho_{eff}c_{eff0}^3}p\frac{\partial p}{\partial\tau}\right) = \frac{c_{eff0}}{2\cos^2\theta}\frac{\partial^2 p}{\partial\eta^2}.$$

Для решения такого типа уравнений может быть использован подход, предложенный в [6] и развитый в [2]. Вначале на основе линейной дифракционной задачи рассчитывается фаза, что позволяет построить лучи, что особенно важно вблизи каустик и фокусов, а затем вдоль этих лучей рассчитываются амплитудные характеристики нелинейной задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе предложены самосогласованные эволюционные уравнения, описывающие распространение ограниченных акустических пучков большой интенсивности в вязкоупругой среде с газовыми полостями. При этом в низкочастотной области основным фактором является изменение скорости звука в зависимости от концентрации полостей и появление эффективного переменного показателя преломления, что позволяет управлять характером трансформации акустического поля.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14-22-00042).

[1] *Руденко О. В.* УФН. 2006. **176**. С. 77.
[2] *Гусев В. А., Руденко О. В.* Акуст. журн. 2015. **61**, № 2. С. 169.
[3] *Григорьев В. А., Луньков А. А., Петников В. Г.* Акуст. журн. 2015. **61**, № 1. С. 90.
[4] *Собисевич А. Л., Руденко О. В.* Акуст. журн. 2005. **51**, № 7. С. 169.
[5] *Гусев В. А., Окунев А. О.* Ученые записки физического ф-та Московского ун-та. 2015. № 4. 154321.
[6] *Гамильтон М. Ф., Руденко О. В., Хохлова В. А.* Акуст. журн. 1997. **43**, № 1. С. 48.

The intense acoustic beam propagation in a visco-elastic medium with cavities

V. A. Gusev

Department of Acoustics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia
E-mail: vgusev@bk.ru

The propagation of high intensity acoustic waves and beams in viscoelastic medium containing a gas cavity is considered. The response of such medium to the external acoustic influence features in various frequency–dependent effects and complex temporal dependence, in particular of resonance and relaxation character. The behavior of a viscoelastic material has the relaxation type, carrying the memory of the impact in the previous moments of time. The dynamics of internal elements, such as inclusions and cavities can have a clearly resonant character. The transformation of the time profile and the transverse structure of the beams propagating in such medium with complex internal dynamics is calculated.

PACS: 43.25.+y, 47.55.dd, 47.40.Nm, 43.30.+m
Keywords: viscoelasticity, medium with memory, gas cavity, nonlinear beams.
Received 08 July 2017.

Сведения об авторе

Гусев Владимир Андреевич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-29-43, e-mail: vgusev@bk.ru.