

Гамма–метрики с параметром Ньюмена–Унти–Тамбурино

Д. В. Гальцов* К. В. Кобялко†

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра теоретической физики. Россия,
119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*

(Статья поступила 09.07.2017; Подписана в печать 10.07.2017)

В настоящей работе исследуются некоторые геометрические и физические характеристики новых гамма–метрик с параметром Ньюмена–Унти–Тамбурино. Определяется масса и угловой момент сингулярности и струн Мизнера, свойства времениподобных геодезических, включая возникновение геодезического хаоса, появление горизонта при $\delta = 2$.

PACS: 02.30.IK; 04.20.-q

УДК: 514.822

Ключевые слова: Черные дыры, гамма–метрика, параметр Ньюмена–Унти–Тамбурино, геодезические, интегрируемость

ВВЕДЕНИЕ

Радиоинтерферометрия со сверхдлинными базами сделала возможными наблюдения за центром Галактики с угловым разрешением, достаточным для наблюдения тени от центрального объекта, который предположительно является керовской черной дырой. В связи с этим усилился интерес к поиску альтернативных моделей компактных объектов, отличных от предсказываемых стандартной теорией черных дыр, в которой метрика Керра является уникальной. Основные предположения, которые приводят к последнему предсказанию, это принцип космической цензуры, запрещающий существование так называемых голых сингулярностей, не скрытых горизонтом событий, а также принцип защиты хронологии, запрещающий области пространства–времени вне горизонта, в которых присутствуют замкнутые времениподобные кривые (ЗВК). Хотя оба предположения и являются весьма правдоподобными, все же абсолютно исключить возможность их нарушения нельзя.

В связи с этим возникает интерес к исследованию альтернативных решений. Особое внимание в литературе уделяется метрикам, содержащим параметр Ньюмана–Унти–Тамбурино (НУТ) [1–3], который можно рассматривать как магнитный аналог шварцшильдовой массы [4, 5]. Решения Шварцшильда и Тауб–НУТ представляют пример гравитационной дуальности, связь между ними во многом аналогична связи между магнитными монополями и электрическими зарядами в электродинамике [6]. Однако, до конца остается невыясненным вопрос об их физической интерпретации и возможности существования. В частности, известно, что решения типа Тауб–НУТ содержат ЗВК, что рассматривается как патология. Однако недавно было показано, что свободное движение вдоль ЗВК невозможно, а содержащиеся в области ЗВК го-

лые сингулярности в виде струн Мизнера (МС) процируются для геодезических [7]. Таким образом, есть основания рассматривать решения данного класса как физически допустимые и учитывать их в астрофизическом моделировании [8].

Заметим, что струны Мизнера представляют собой слабые особенности метрики. Определением истинных сингулярностей принято считать остановку геодезических [9], которая в данном случае не происходит. Истинные голые сингулярности кривизны присутствуют в решениях Зипоя–Вурхиса (ЗВ) [10], или так называемых гамма–метриках, которые можно понимать как аксиально–симметричную деформацию черной дыры Шварцшильда. Эти метрики являются нестандартным примером пространств с положительной массой, содержащих голую сингулярность [11].

Использование методик генераций решений с помощью преобразований симметрий трехмерных сигма-моделей, к которым сводится теория Эйнштейна для стационарных пространств [12], в частности преобразование Элерса, позволяет построить новые решения. Не так давно было получено обобщение решения ЗВ, содержащее НУТ заряд [13]. Данное решение осталось не исследованным полностью. Тем не менее ряд уникальных свойств полученной метрики, в частности, улучшение поведения инварианта Кречмана, может служить основанием для более тщательного анализа. В настоящей работе мы проводим разностороннее исследование метрики ЗВ–Тауб–НУТ (ЗВТН) в различных координатных системах, включая сфероидальные и цилиндрические координаты.

1. МЕТРИКА ЗВТН

Для построения решения ЗВТН будем использовать формулировку Эрнста вакуумных уравнений Эйнштейна для стационарных метрик в сфероидальных координатах

*E-mail: gdmv04@mail.ru

†E-mail: kobyalkov@yandex.ru

$$d\bar{s}^2 = -f(dt + \omega d\phi)^2 + f^{-1}e^{2v}(x^2 - y^2) \left(\frac{dx^2}{x^2 - 1} + \frac{dy^2}{1 - y^2} \right) + f^{-1}(x^2 - 1)(1 - y^2)d\phi^2. \quad (1)$$

Вводя комплексный потенциал Эрнста [14]:

$$i\mathcal{E} = if - \chi, \quad (2)$$

уравнения Эйнштейна можно представить в виде [10]:

$$(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}})\nabla^2\mathcal{E} = 2(\nabla\mathcal{E})^2 \quad (3)$$

в совокупности с уравнениями дуализации:

$$\omega_{,x} = (1 - y^2)f^{-2}\chi_{,y}, \quad \omega_{,y} = -(x^2 - 1)f^{-2}\chi_{,x}, \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что уравнения (4) инвариантны относительно преобразований Эйлера

$$(i\mathcal{E})^{-1} \rightarrow (i\mathcal{E})^{-1} + \gamma. \quad (5)$$

Применение преобразования (5) к метрике ЗВ в сфероидальных координатах [10] позволяет получить решение, содержащее НУТ заряд:

$$ds^2 = -f(dt - \omega d\phi)^2 + \Sigma^2 \left(\frac{dx^2}{x^2 - 1} + \frac{dy^2}{1 - y^2} \right) + R^2 d\phi^2, \quad (6)$$

где вводятся следующие обозначения:

$$R^2 = L^2 f^{-1}(x^2 - 1)(1 - y^2), \quad \Sigma^2 = L^2 f^{-1} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2} \right)^{\delta^2} (x^2 - y^2), \quad (7)$$

$$f = \frac{a}{\left(\frac{x+1}{x-1} \right)^\delta + \gamma^2 \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^\delta}, \quad \omega = 2Ny + C, \quad N = 2\gamma\delta L/a. \quad (8)$$

при этом ϕ — периодическая координата с периодом 2π , δ, γ, C — произвольные вещественные параметры, первый называют параметром деформации. Поведение инварианта Кречмана $R^{\mu\nu\rho\lambda}R_{\mu\nu\rho\lambda}$ при различных значениях параметра деформации приведено в табл. 1, где вводится семейство несингулярных при $x = \pm 1$ функций $Z(x, \delta)$. Непосредственно видно, что имеется три типа потенциальных сингулярностей:

- Множество $x = \pm y$. Может быть сингулярностью кривизны для $0 < |\delta| < 1$ и $1 < |\delta| < \sqrt{3/2}$.
- Множества I ($x = \pm 1$) являются сингулярностями кривизны для $\delta \neq 0, \pm 1$. Отметим основные изменения по сравнению с случаем чистого решения ЗВ в том, что при $\delta = -1$ решение не имеет расходимости в кривизне, в случае не равного нулю НУТ заряда.

- В точках P^\pm ($x = 1, y = \pm 1$) сингулярности кривизны нет при $\delta = 0, \pm 1, \pm 2$ и $\delta > 2$. Помимо этого очевидно, что зеркальные точки $x = -1, y = \pm 1$ с $-\delta$ обладают тем же самым набором свойств с точностью до умножения на фактор γ^2 , в частности становятся горизонтами при $\delta = 0, \pm 1, \pm 2$ и $|\delta| > 2$. Действительно нетрудно видеть, что

$$f = \frac{a(x^2 - 1)^\delta}{(x + 1)^{2\delta} + \gamma^2(x - 1)^{2\delta}}, \quad (9)$$

$$f = \frac{a(x^2 - 1)^{|\delta|}}{\gamma^2(x + 1)^{2|\delta|} + (x - 1)^{2|\delta|}},$$

при $\delta > 0$ и $\delta < 0$ соответственно.

Таблица I: Инвариант Кречмана $R^{\mu\nu\rho\lambda}R_{\mu\nu\rho\lambda}$

δ	I	P^\pm	$x = \pm y \neq \pm 1$
$\delta > 2$	∞	0	0
$\delta = 2$	∞	$\frac{3a^2}{4L^4}$	0
$\sqrt{3/2} < \delta < 2$	∞	∞	0
$\delta = \sqrt{3/2}$	∞	∞	$Z(x, \delta)$
$1 < \delta < \sqrt{3/2}$	∞	∞	∞
$\delta = 1$	$Z(1, \delta)$	$Z(1, \delta)$	$Z(x, \delta)$
$0 < \delta < 1$	∞	∞	∞
$\delta = 0$	0	0	0

2. ЛОКАЛИЗАЦИЯ МАССЫ И УГЛОВОГО МОМЕНТА

Вычислим теперь массу и угловой момент источника решения (6) в координатах Вейля. Как известно, физическая масса M и угловой момент J могут быть получены с помощью интегралов Комара по двумерной поверхности на бесконечности [15]. Кроме того, каждому участку на оси цилиндрических координат можно сопоставить некоторый угловой момент J_a и массу M_a . Определим их для каждого из выше обозначенных множеств I, P^\pm , а также струн Мизнера G^\pm ($y = \pm 1, x > 1$), сосредоточенных на оси цилиндрических координат (ρ, z) . Как известно, в координатах Вейля интегралы Комара для электровакуумных метрик могут быть записаны в виде выражений предложенных Томиацу [16] и исправленных в [17], которые в вакуумном случае имеют вид:

$$M_a = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_a} \nabla^\rho \xi_{(t)}^t \sqrt{-g} dz d\phi, \quad (10)$$

$$J_a = -\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma_a} \nabla^\rho \xi_{(\phi)}^t \sqrt{-g} dz d\phi, \quad (11)$$

где Σ_a , $a = I, G^+, G^-$ представляет собой поверхности цилиндров ($\rho \rightarrow 0$), а ξ - векторы Киллинга. Можно получить следующее выражения для подинтегральных функций через потенциалы Эрнста (4):

$$2\sqrt{-g}\nabla^\rho \xi_{(t)}^t = -\omega \frac{\partial \chi}{\partial z} + \rho f^{-1} \frac{\partial f}{\partial \rho}, \quad (12)$$

$$2\sqrt{-g}\nabla^\rho \xi_{(\phi)}^t = 2\omega - 2\rho\omega f^{-1} \frac{\partial f}{\partial \rho} + (\rho^2 f^{-2} + \omega^2) \frac{\partial \chi}{\partial z}. \quad (13)$$

Масса полубесконечных струн G^\pm и сингулярности оказываются следующими:

$$M_{G_\epsilon^\pm} = -\frac{a\gamma}{4(1+\gamma^2)}(2N \pm C), \quad M_I = \delta L. \quad (14)$$

При $\delta > 0$ имеем положительно определённую массу сингулярности $M_I > 0$ и отрицательную суммарную массу двух полубесконечных струн $M_{\text{inf}} < 0$, не зависящую от значения константы C .

Аналогично, из (11) и (13), получим три основных вклада в угловой момент:

- На интервале Σ_I ненулевой вклад в угловой момент равен:

$$J_I = \frac{2\delta - 1}{2} CL. \quad (15)$$

- На интервалах Σ_{G^\pm} угловой момент при $z \rightarrow \infty$ стремится к бесконечности как:

$$J_{G_\epsilon^\pm} \cong \mp \frac{1}{4}(2N \pm C)(z - L) \mp \frac{a\gamma}{8(1+\gamma^2)}(2N + C)^2. \quad (16)$$

где z — точка обрезания, и имеет конечную линейную плотность. Соответствующее среднее значение для массы на единицу длины источника равна нулю, в этом смысле источник (СМ) можно считать формально "безмассовым". При этом полное решение генерируется массивной вращающейся сингулярностью и полубесконечными вращающимися струнами. При $C = 0$ сингулярность не вращается, а суммарный угловой момент противоположно вращающихся струн компенсируется и равен нулю.

3. КРУГОВЫЕ ОРБИТЫ

Как известно, круговые орбиты играют особенно важную роль в изучении гравитационных свойств центрального тела. В частности нас будет интересовать области существования и стабильности круговых орбит и орбит постоянного радиуса и широты (ОПРШ) [18]. Можно показать, что в общем случае переменные в уравнении Гамильтона-Якоби метрики ЗВТН не разделяются ввиду отсутствия тензора Киллинга, который существует для метрик типа

D (данная метрика имеет тип I). Однако удается построить двумерный эффективный потенциал содержащий, в частности, информацию о круговых орбитах и их стабильности [18, 19]. Прежде всего параметризованные собственным аффинным временем геодезические удовлетворяют следующему уравнению нормировки ds^2 :

$$\epsilon = -f(\dot{t} - \omega\dot{\phi})^2 + \Sigma^2 \left(\frac{\dot{x}^2}{x^2 - 1} + \frac{\dot{y}^2}{1 - y^2} \right) + R^2 \dot{\phi}^2, \quad (17)$$

где $\dot{}$ обозначает производную по собственному времени, а $\epsilon = 0, 1, -1$ — для изотропных пространственно-подобных и времени-подобных кривых соответственно. Два вектора Киллинга $\xi_{(t)}^\mu$ и $\xi_{(\phi)}^\mu$ определяют два интеграла движения:

$$f(\dot{t} - \omega\dot{\phi}) = E, \quad (18)$$

$$f(\dot{t} - \omega\dot{\phi})\omega + L^2 f^{-1}(x^2 - 1)(1 - y^2)\dot{\phi} = l, \quad (19)$$

где E и l интерпретируются как энергия и орбитальный момент пробной частицы. Уравнение (17) можно записать в терминах эффективного потенциала:

$$\frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2) + V_{eff}(\rho, z) = 0, \quad (20)$$

где

$$V_{eff}(x, y) = \frac{1}{2}e^{-2\gamma} \left(-E^2 - \epsilon f + \frac{f^2 \hat{l}^2}{L^2(x^2 - 1)(1 - y^2)} \right). \quad (21)$$

где $\hat{l} = l - E\omega$. Удобнее работать с укороченным потенциалом $V = 2V_{eff}e^{2\gamma}$. Далее мы сосредоточим внимание на времени-подобных геодезических $\epsilon = -1$ в случае $C = 0$. Выясним, где расположен минимум потенциала (21), в частности ОПРШ, лежащие в экстремуме [20]:

$$V = \partial V / \partial x = \partial V / \partial y = 0. \quad (22)$$

Получим следующее значение орбитального момента частицы l :

$$l = EC \pm \sqrt{\Pi/a^2 + 4E^2 N^2}, \quad (23)$$

$$\Pi = \frac{aL^2 \Psi(\xi^2 - \zeta^2)}{(x - 2\delta)\xi + (x + 2\delta)\zeta}.$$

где $\xi = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\delta$, $\zeta = \gamma^2 \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^\delta$, $\Sigma = \xi + \zeta$ и $\Psi = x^2 - 1$. Энергия E при этом определяется выражением:

$$E^2 = (a/\Sigma) \frac{(x - \delta)\xi + (x + \delta)\zeta}{(x - 2\delta)\xi + (x + 2\delta)\zeta}. \quad (24)$$

Для положения орбиты постоянного радиуса и широты в плоскости x, y получим:

$$y_o^2 = \frac{1}{1 + \Theta}, \quad \Theta = \frac{\Psi \Sigma^2 (\xi - \zeta)}{16\gamma^2 \delta [(x_o - \delta)\xi + (x_o + \delta)\zeta]}, \quad (25)$$

а x_o — формально любое. Ограничение для координаты $|y| < 1$ приводит к простому условию $\Theta > 0$. Тогда выражение для скоростей $u = \frac{dt}{ds}$ и $\omega_o = \frac{d\phi}{ds}$:

$$u = \frac{\Psi\Sigma^2 + 16\gamma^2\delta^2}{\Psi\Sigma} \sqrt{\frac{(x-\delta)\xi + (x+\delta)\zeta}{a\Sigma[(x-2\delta)\xi + (x+2\delta)\zeta]}} \quad (26)$$

$$\omega_o = \frac{4a\gamma\delta u}{Ly_o(\Psi\Sigma^2 + 16\gamma^2\delta^2)} \quad (27)$$

Из (25), (26) и (27) очевидно, что ОПРШ в метрике ЗВТН расположены в плоскостях параллельных экваториальной, что отличается от случая решения ЗВ, где подобные орбиты лежат в экваториальной плоскости. Можно показать, что при $|\gamma| < 1$ и достаточно больших x (по крайней мере $x \gg 2\delta$) существуют орбиты постоянного радиуса и широты, причем:

$$\Pi > 0, \quad \Theta > 0, \quad E^2 > 0. \quad (28)$$

В пределе получим следующую орбиту, в нормировке $a = 1 + \gamma^2$:

$$y \rightarrow \pm 0, \quad u \rightarrow 1, \quad \omega_o \rightarrow \pm 0, \quad x_o \rightarrow \infty. \quad (29)$$

Мы видим, что на больших расстояниях орбиты постоянного радиуса и широты расположены в окрестности экваториальной плоскости ($y = 0$), при этом угловая скорость стремится к нулю. Данные орбиты устойчивы по направлениям x и y .

При $|\gamma| > 1$ ситуация отличается тем, что нарушается условие $|y| < 1$, и исчезает устойчивость в направлении y , однако, есть устойчивость в направлении x . При этом момент l не определён при достаточно больших x . Соответственно на больших расстояниях хорошо определённых ОПРШ вообще говоря нет.

При $|\gamma| = 1$ ситуация более интересна. В пределе нет орбит постоянного радиуса и широты в экваториальной плоскости, однако, они существуют в двух параллельных плоскостях:

$$y \rightarrow \pm \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad u \rightarrow 1, \quad \omega_o \rightarrow \pm 0 \quad x_o \rightarrow \infty. \quad (30)$$

Из соображений симметрии очевидно, что должны также существовать экваториальные круговые орбиты, удовлетворяющие лишь условию радиального минимума потенциала (22). Соответствующий одномерный потенциал имеет вид:

$$V_{eff}(x) = \frac{1}{2}e^{-2\gamma} \left(-E^2 + f + \frac{f^2 l^2}{L^2(x^2 - 1)} \right). \quad (31)$$

Условие минимума укороченного потенциала даёт для орбитального момента и энергии выражения:

$$l^2 = \frac{L^2\Psi(\xi^2 - \zeta^2)\delta}{a[(x-2\delta)\xi + (x+2\delta)\zeta]}, \quad (32)$$

$$E^2 = \frac{a[(x-\delta)\xi + (x+\delta)\zeta]}{\Sigma[(x-2\delta)\xi + (x+2\delta)\zeta]}.$$

Нетрудно заметить, что области определения данных величин совпадают с соответствующими областями определения ОПРШ.

Характеристическими значениями для определения области существования всех таких орбит и их устойчивости, определяемой знаком вторых производных потенциала (21) [20], служат корни выражений:

$$P_0 = \xi - \zeta, \quad P_\delta = (x - \delta)\xi + (x + \delta)\zeta, \quad (33)$$

$$P_{2\delta} = (x - 2\delta)\xi + (x + 2\delta)\zeta,$$

$$P_3 = (x^2 + 1)(\xi - \zeta)(\xi + \zeta)^2 - 2x\delta(3\xi^3 + \xi\gamma^2 + \zeta\gamma^2 + 3\zeta^3) + 4\delta^2(\xi - \zeta)^3, \quad (34)$$

которые находятся численно. В общем, при $|\gamma| < 1$ на больших расстояниях $x \gg 2\delta$ круговое движение устойчиво. Граница области устойчивости определяется большим корнем выражения (34).

4. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ

При фиксированных значениях орбитального момента и энергии, движение в метрике ЗВТН сводится к двумерному. Начальные условия фиксируются при этом дополнительно условием нормировки (17). Соответствующую четырёхмерную динамическую систему можно рассматривать как возмущение динамической системы Шварцшильда или Тауб–НУТ, которые, очевидно, интегрируемы. В силу теорем Колмогорова–Арнольда–Мозера [21, 22] и Пуанкаре–Биркоффа [23] небольшие возмущения метрики деформируют инвариантные нерезонансные торы траекторий исходной динамической системы. Из резонансных торов (периодических) остаётся лишь чётное число — стабильные и нестабильные орбиты.

Структура всех этих орбит традиционно исследуется при помощи двумерных сечений Пуанкаре в фазовом пространстве, при этом инвариантным торам соответствуют замкнутые кривые в фазовой плоскости (x, \dot{x}) образующие так называемые главные острова стабильности. Помимо этого, в случае неинтегрируемой системы могут возникать дополнительные острова стабильности, формирующиеся вокруг вторичных стабильных орбит. Между этими островами расположены нестабильные периодические орбиты, из которых выходят асимптотические орбиты. Стабильные асимптотические орбиты не могут пересекать себя или другие устойчивые асимптотические орбиты и стремятся к периодическим орбитам в обратном (прямом) течении временного параметра. Последнее свойство асимптотических орбит в сочетании с неперекрестным свойством порождает на поверхности сечений колебания орбит гомоклинический эффект хаоса [24]. Примеры сечений Пуанкаре метрики ЗВТН при различных значениях параметров δ, γ даны на рис. 1–4. Есть несколько островов стабильности между которыми расположены области хаоса.

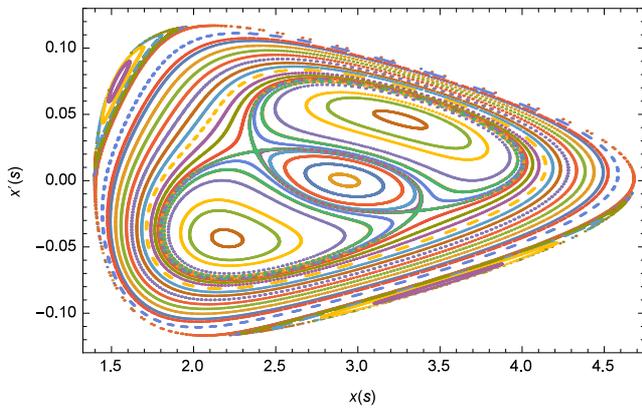


Рис. 1: Сечение Пуанкаре $\delta = 1/3, \gamma = 3/4$

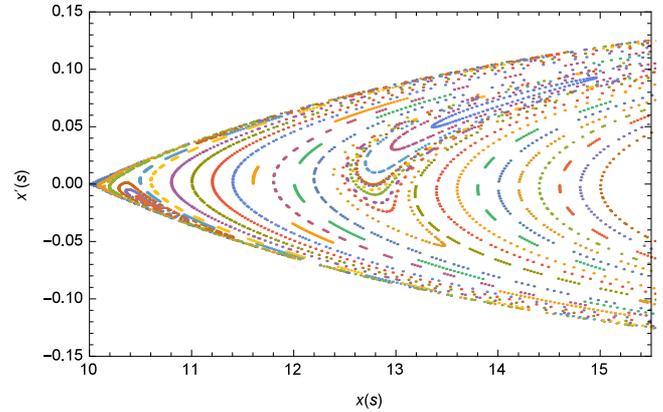


Рис. 2: Сечение Пуанкаре $\delta = 3, \gamma = 1/2$

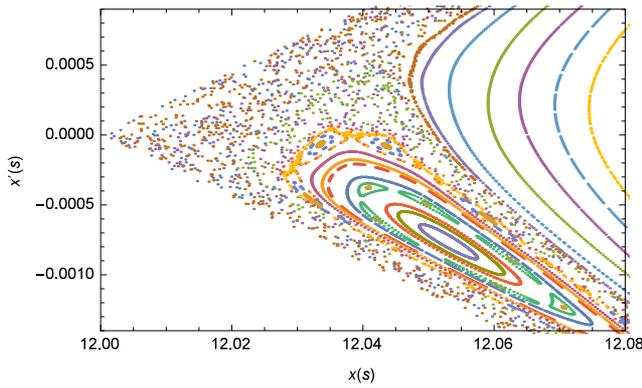


Рис. 3: Сечение Пуанкаре $\delta = 3, \gamma = 1/4$

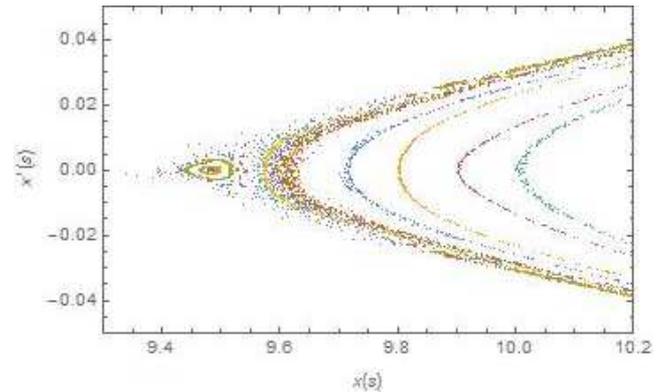


Рис. 4: Сечение Пуанкаре $\delta = 3, \gamma = 0$

Резюмируя, приходим к выводу, что деформированное решение Тауб–НУТ перестаёт быть интегрируемой системой, области хаоса сосредоточены в окрестности источника на расстояниях порядка δ . В областях $x \gg \delta$ данные эффекты отсутствуют.

5. ГЕОМЕТРИЯ ГОРИЗОНТА СОБЫТИЙ ПРИ $\delta = 2$

Изучим теперь некоторые свойства метрики ЗВТН в окрестности точек P^\pm . Как видно из табл. 1, при $\delta = 2$ инвариант Кречмана конечен, и, соответственно, точки должны представлять горизонт Киллинга. Значение соответствующего предела, вообще говоря, зависит от направления, и требуется некоторый дополнительный анализ. Построим гладкое продолжение метрики через соответствующий горизонт Киллинга. Для наших целей удобно использовать координаты, предложенные Кодамой и Хикидой [11]:

$$X^2 = \frac{1 - y^2}{x^2 - 1}, \quad Y = \frac{y}{x}. \tag{35}$$

Введём новую переменную $W = 1 - Y^2$ и определим параметр

$$\Omega = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} = \frac{\omega W^2}{\omega^2 W^2 - \Psi^2 L^2 (X^2 + Y^2)^2 X^2}. \tag{36}$$

После преобразований получим метрику (6) в следующем виде:

$$ds^2 = -sW^2 \left(dt^2 - (h/s) \frac{dW^2}{W^4} \right) + cdX^2 + bX^2 d\phi^2, \tag{37}$$

где

$$b = \left(L^2 \Psi - \frac{1}{\Psi} W^2 (X^2 + Y^2)^{-2} X^{-2} \omega^2 \right),$$

$$c = L^2 \Psi (X^2 + 1)^{-4},$$

$$s = \frac{1}{\Psi} (X^2 + Y^2)^{-2} \left(1 + \frac{W^2 \omega^2}{L^2 \Psi^2 (X^2 + Y^2)^2 X^2 - W^2 \omega^2} \right),$$

$$\begin{aligned} h &= \frac{\Psi L^2}{4Y^2(X^2 + 1)^2}, \\ \Psi &= ((x + 1)^\delta + \gamma^2(x - 1)^\delta)/a, \\ \omega &= 2NY\sqrt{\frac{X^2 + 1}{X^2 + Y^2}} + C, \end{aligned} \tag{38}$$

и введено обозначение $\hat{\phi} = \phi - \Omega t$. При $X = 0$ величина s обращается в нуль и выражение (h/s) расходится. Данное затруднение связано с наличием струны Мизнера, которая возникает всякий раз при введении в решение параметра НУТ. Тем не менее, данную сингулярность можно устранить следующим преобразованием:

$$t \rightarrow t \pm \omega|_{X=0}\phi, \tag{39}$$

Как следствие, временная компонента теперь периодична, иными словами, время скомпактифицировано на окружность. Рассмотрим случай $Y \rightarrow 1$. При замене (39) видим, что теперь все функции хорошо определены при $X = 0$.

$$\begin{aligned} H^2 &= (h/s)|_{X=0} = L^2\Psi^2(1/Y)Y^2/4, \\ \Omega_H &= \Omega|_{X=0} = \frac{NW^3}{Y^6\Psi^2(1/Y)L^2}, \end{aligned}$$

и в окрестности $X = 0$ раскладываются так

$$(h/s) = H^2 + \Pi_1(X, W)W^2, \quad \Omega = \Omega_H + \Pi_2(X, W)W^2, \tag{40}$$

где функции $\Pi_1(X, W)$ и $\Pi_2(X, W)$ гладкие функции при $W = 0$, такие что:

$$\Pi_1(X, W) = -\frac{16L^2X^2(2 + X^2)}{(1 + X^2)^2} + O(W), \tag{41}$$

$$\Pi_2(X, W) = -\frac{NX^2(3 + 3X^2 + X^4)}{256L^2(1 + X^2)^3}W + O(W). \tag{42}$$

Следуя Кодаме и Хикиде вводим координаты:

$$u_{\pm} = t \pm \int^W H \frac{dW}{W^2}, \quad \phi_{\pm} = \phi \pm \int^W \Omega_H H \frac{dW}{W^2}. \tag{43}$$

Метрика (37) при этом переписывается в виде:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -sW^2 du_{\pm}^2 \pm 2H du_{\pm} dW + s\Pi_1 dW^2 + \\ &+ bX^2(d\phi_{\pm} \pm \Pi_2 H dW - \Omega du_{\pm})^2 + cdX^2, \end{aligned} \tag{44}$$

и, таким образом, является гладкой, несингулярной при $W = 0$, и может быть продолжена на значения $W < 0$. Площадь горизонта:

$$S = 2 \times \lim_{\kappa \rightarrow 0} 2\pi \int_0^\infty \sqrt{bc} X dX = \frac{32\pi L^2}{a}, \tag{45}$$

как и следовало ожидать, совпадает с величиной, полученной Кодамой и Хикидой. Аналогично при $\delta = -2$ можно получить похожие выражения. Для площади горизонта получим тот же результат, но с фактором γ^2 :

$$S = 2 \times \lim_{\kappa \rightarrow 0} 2\pi \int_0^\infty \sqrt{bc} X dX = \frac{32\pi L^2 \gamma^2}{a}. \tag{46}$$

Резюмируя, мы получили гладкое продолжение метрики через горизонт ценой компактификации времени. Данное условие, хотя математически весьма привлекательно, очевидно нефизично. Тем не менее известно, что в случае метрики Тауб–НУТ продолжение, не опирающееся на данное условие также возможно, при этом удаётся избежать нехаусдорфовости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получено и исследовано решение ЗВТН (6) в сфероидальных и цилиндрических координатах. При отличном от нуля значении параметра преобразования Элерса (5) в решении ЗВТН улучшается поведение инвариантов Кречмана (табл. 1) при отрицательных значениях параметра деформации δ . Появляются новая зеркальная симметрия компонент метрического тензора и новые зеркальные горизонты при $\delta \geq 2, \delta = 1$.

Применение интегралов Комара с использованием потенциалов Эрнста позволило вычислить массы (14), угловые моменты (15), (16) источников на оси симметрии. Показано, что решение генерируется двумя полубесконечными струнами с конечной плотностью углового момента и конечной полной отрицательной массой. Сингулярная подпорка I имеет положительную массу и конечный угловой момент.

Исследовано геодезическое круговое движение и области устойчивости соответствующих орбит постоянного радиуса и широты. Проведено численное исследование сечений Пуанкаре четырёхмерной динамической системы соответствующей движению в метрике ЗВТН. Косвенно доказана неинтегрируемость на основе наблюдения эффектов гомоклинического хаоса. При этом области хаоса сосредоточены на некоторых малых участках фазовой плоскости, нося тем самым локальный характер. В асимптотически дальней области пространства хаос почти не наблюдается.

Построено продолжение метрики через горизонт Киллинга при $\delta = 2$. Вопрос о продолжении без наложения периодического условия (39) на время, так же как и случае $\delta \neq 2$ пока остается открытым.

Работа проводилась в рамках госбюджетной темы «Квантовая теория полей и частиц», а также проекта РФФИ 17-02-01299а.

- [1] *Newman E., Tamburino L., Unti T.J.* J. Math. Phys. 1963. **4**. P. 915.
- [2] *Misner C.W.* J. Math. Phys. 1963. **4**. P. 924; *Misner C.W., Taub A.H.* Sov. Phys. JETP. 1969. **28**. P. 122.
- [3] *Hawking S.W., Ellis G.F.R.* The Large Scale Structure of Space–Time 1973. Cambridge University Press. ISBN 0-521-09906-4.
- [4] *Dowker J.S., Roche J.A.* Proc. Phys. Soc. 1967. **92**. P. 1; *Dowker J.S.* Gen. Rel. Grav. 1974. **5**. P. 603.
- [5] *Dehouck F.* Nucl. Phys. B. 2011. **216**. P. 223.
- [6] *Wu T.T., Yang C.N.* Phys. Rev. D. 1975. **12**. P. 3845.
- [7] *Clement G., Gal'tsov D., Guenouche M.* Phys. Lett. B. 2015. **750**. P. 591.
- [8] *Nouri-Zonoz M., Lynden-Bell D.* Mon. Not. R. Astron. Soc. 1997. **292**. P. 714; *Rahvar S., Nouri-Zono M.* Mon. Not. R. Astron. Soc. 2003. **338**. P. 926; *Rahvar S., Habibi F.* Astrophys. J. 2004. **610**. P. 673 ; *Bogdanov M.B., Cherepashchuk A.M.* Astrophys. Space Sci. 2008. **317**. P. 181.
- [9] *Geroch R.* in Battelle Rencontres. C. De-Witt and J. Wheeler. eds., Benjamin, New York 1968, P. 236.
- [10] *Griffiths J.B.* Exact Space–Times in Einstein's General Relativity. Cambridge University Press, 2009.
- [11] *Kodama H., Hikida W.* Classical Quant. Grav. 2003. **20**. P. 5121.
- [12] *Gal'tsov D.V.* Prog. Theor. Phys. Supp. 2008. **172**. P. 121.
- [13] *Contopoulos I.G., Esposito F.P., Kleidis K., Papadopoulos D.B., Witten L.* Int. J. Mod. Phys. D. 2016. **25**. 1650022.
- [14] *Ernst F.J.* Phys. Rev. 1968. **167**. P. 1175.
- [15] *Komar A.* Phys. Rev. 1959. **113**. P. 934.
- [16] *Tomimatsu A.* Prog. Theor. Phys. 1983. **70**. P. 385.
- [17] *Clement G., Gal'tsov D.* On the Smarr formula for rotating dyonic black holes. arXiv:1707.01332 [gr-qc].
- [18] *Castro G., Letelier P.S.* Classical Quant. Grav. 2011. **28**. P. 22.
- [19] *Kovar J., Kopacek O., Karas V., Kojima Y.* Springer Proceedings in Physics 2014. **157**. P. 373.
- [20] *Kovar J., Kopacek O., Karas V., Kojima Y.* Classical Quant. Grav. 2013. **30**. 025010.
- [21] *Kolmogorov A.N.* Dokl. Akad. Nauk SSSR 1954. **98**. P. 527.
- [22] *Arnold V.I.* Russ. Math. Surv. 1963. **18**. P. 13.
- [23] *Poincare H.* Rend. Circ. Mat. Palermo. 1912. **33**. P. 375.
- [24] *Contopoulos G.* Order and chaos in dynamical astronomy. Springer, Berlin, 2002.

Gamma metrics with the Newman–Unty–Tamburino parameter

D. V. Galtsov^a, K. V. Kobialko^b

*Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia.*

E-mail: ^agdmv04@mail.ru , ^bkobyalkokv@yandex.ru

In this paper we study some geometric and physical characteristics of new gamma metrics with the Newman–Unty–Tamburino parameter. The mass and angular momentum of singularity and Mizner's strings, the properties of time–like geodesics, including the appearance of geodesic chaos, the appearance of the horizon at $\delta = 2$ are determined.

PACS: 02.30.IK; 04.20.-q.

Keywords: Black holes, gamma–metric, Newman–Unty–Tamburino parameter, geodesic, integrability.

Received 09 July 2017.

Сведения об авторах

1. Дмитрий Владимирович Гальцов — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: gdmv04@mail.ru.

2. Кобялко Кирилл Владимирович — магистр; e-mail: kobyalkokv@yandex.ru.