

Методы морфологического анализа данных и их приложения

А. И. Чуличков,^{*} Ю. П. Пытьев, О. В. Фаломкина,[†] А. В. Зубюк

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра математического моделирования и информатики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2*

(Статья поступила 30.06.2017; Подписана в печать 03.07.2017)

Дан краткий обзор математических методов анализа изображений, сформулированы математические модели форм сигналов (изображений), в том числе и учитывающие субъективные представления исследователя, рассмотрены математические методы и численные алгоритмы вычисления характеристики близости (связности и зависимости) двух форм сигналов (изображений), использующие технику косого проецирования. Приведены примеры применения методов анализа изображений для решения ряда прикладных задач.

PACS: 02.70.-с.

УДК: 004.932, 004.942.

Ключевые слова: морфологические методы, форма изображения, субъективная модель, анализ изображений, косое проецирование.

ВВЕДЕНИЕ

Морфологические методы успешно применяются для анализа и содержательной интерпретации изображений реальных сцен, полученных при неконтролируемых условиях регистрации, таких как условия освещения, его спектральный состав, характеристики аппаратуры, регистрирующей изображения, оптические свойства сцены и др. Подобная задача анализа и интерпретации изображений возникает при создании систем машинного зрения, систем обзора земли из космоса, устройств видеоконтроля, в связи с необходимостью автоматического выделения и распознавания объектов на изображениях, полученных при неопределенных условиях освещения, при решении задач ориентации и привязки к местности летательных аппаратов при различных погодных условиях и т. д. Методами морфологического анализа можно успешно решать задачи автоматического узнавания, классификации идентификации объектов по их изображениям, выделения отличий в сценах по их изображениям и др.

Для решения упомянутых задач разрабатывались и другие, в том числе морфологические, эффективные методы (см., например, работы [1–10]). Основное отличие методов, развиваемых в настоящей статье, состоит в том, что они основаны на достаточно простой и в то же время реалистичной модели формирования изображений сцены, достаточной для решения широкого круга практических задач. Считается, что условия регистрации изображений могут меняться в широких пределах, тем самым каждая сцена порождает набор своих изображений, который называется «формой изображения сцены». Если форма является выпуклым замкнутым подмножеством евклидова пространства изображений, то с ней можно взаимно однозначно

связать проектор на это множество. Во многих практически важных случаях этот проектор легко вычисляется, что делает такой подход весьма привлекательным.

В настоящее время морфологические методы анализа сигналов получили дальнейшее развитие, связанное с решением задач сравнительного анализа нескольких форм (классов) изображений на предмет их морфологической зависимости, морфологической связности и т. п. [11]. Использование косого проецирования в морфологическом анализе позволяет сравнивать формы по степени их близости. Одним из распространенных способов моделирования формы сигналов является задание линейного подпространства как множества изображений заданной сцены (сигналов заданного источника). Это линейное подпространство, например, можно получить как множество изображений, полученных при всевозможных условиях регистрации. В простейшей ситуации, когда изображение объектов сцены задается набором областей поля зрения, определяемых геометрией сцены, а яркости этих областей постоянны и изменяются в широких пределах при изменении освещения, это линейное подпространство, обозначим его V , есть линейная оболочка индикаторных функций областей, яркости каждой из которых суть некоторые константы [12]. Линейное подпространство V задается оператором ортогонального проецирования Π на V . Связность двух форм как двух линейных подпространств V_1 и V_2 евклидова пространства предлагается характеризовать размерностью подпространства L_0 , являющегося их пересечением (индекс морфологической связности), а объем параллелепипеда, ребрами которого являются ортонормированные базисные векторы ортогональных к L_0 дополнений V_1 и V_2 , характеризует морфологическую зависимость форм (индекс морфологической независимости). Эти характеристики можно построить, используя операторы косого проецирования на V_1 вдоль V_2 и на V_2 вдоль V_1 .

Привлекательность косого проецирования можно продемонстрировать на решении задачи фильтрации: если, например, известно, что анализируемое изобра-

^{*}E-mail: achulichkov@gmail.com

[†]E-mail: olesya.falomkina@gmail.com

жение (или сигнал) $\mathbf{f}$ есть сумма «полезного» изображения (или сигнала) $\mathbf{g}$ формы V_1 и помехи $\mathbf{h}$ формы V_2 , то косое проецирование позволяет безошибочно выделить «уникальные части» помехи и сигнала в отличие от ортогонального, которое дает лишь наилучшие аппроксимации сигнала $\mathbf{f}$ сигналами заданной формы.

В последнее время интерес представляет развитие морфологических методов анализа данных, учитывающих субъективные представления исследователя об изображаемой сцене (для анализа изображений) или об источнике сигнала (для анализа сигналов), поскольку методы и модели морфологического анализа и интерпретации изображений реальных сцен, как правило, представляют собой компьютерные и математические воплощения результатов субъективного анализа модельера–исследователя (м.–и.) цели исследования и средств ее достижения (математических, вычислительных и др.), позволяющие сформулировать морфологическую модель визуальной информации об исследуемом объекте, содержащейся в его изображениях.

В работе рассмотрен математический формализм субъективного моделирования, позволяющий м.–и. моделировать как формализованные, так и неформализованные, неполные и недостоверные знания, начиная с «абсолютного незнания» вплоть до «абсолютного знания» модели объекта исследования, основанные на его научном опыте и интуиции, эмпирически проверять адекватность субъективной модели цели исследования, корректировать субъективную модель, комбинируя субъективные представления с данными наблюдений, а при достаточном объеме данных наблюдений — эмпирически восстанавливать модель объекта исследования [13, 14].

В работе формулируются математические модели форм сигналов (изображений), в том числе и учитывающие субъективные представления исследователя о сигналах, математические методы и численные алгоритмы вычисления характеристики близости (связности и зависимости) двух форм сигналов (изображений), использующие косые проекторы. Методы можно успешно применять для поиска фрагментов сигнала заданной формы при известной форме помехи, фильтрации сигналов, оценки параметров формы и др., для решения задач геофизики, дистанционного зондирования системы Земля–атмосфера, ядерной физики, спектроскопии, медицины и т. п.

1. ЭЛЕМЕНТЫ МОРФОЛОГИЧЕСКОГО АНАЛИЗА [12]

Изображение как математический объект является векторнозначной функцией $\mathbf{f}(\cdot) : Y \rightarrow \mathcal{R}^N$, где $\mathcal{R}^N$ — N -мерное евклидово пространство, Y — ограниченная замкнутая область на плоскости $\mathcal{R}^2$, называемая полем зрения. Значение нормы $\|\mathbf{f}(y)\|_N$ называется яркостью изображения $\mathbf{f}(\cdot)$ в точке $y \in Y$, $\|\mathbf{z}\|_N^2 = z_1^2 + \dots + z_N^2$, $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N)$ — вектор, при-

надлежащий пространству $\mathcal{R}^N$, величина $\mathbf{f}(y)/\|\mathbf{f}(y)\|_N$ называется цветом изображения $\mathbf{f}(\cdot)$ в точке $y \in Y$. Линейные операции над изображениями определены равенствами $(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2)(y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f}_1(y) + \mathbf{f}_2(y)$, $(a \cdot \mathbf{f})(y) \stackrel{\text{def}}{=} a \cdot \mathbf{f}(y)$, $y \in Y$. Любое изображение $\mathbf{f}(\cdot)$ считается μ -измеримым, функция $\|\mathbf{f}(y)\|_N$ является μ -интегрируемой (μ есть некоторая мера на борелевском классе множеств из $\mathcal{R}^2$). Множество всех изображений $L_\mu^2(Y)$ является евклидовым пространством, в котором квадрат нормы изображения $\mathbf{f}(\cdot)$ определяется равенством $\|\mathbf{f}(y)\|_\infty^2 = \int_Y \|\mathbf{f}(x)\|_N^2 \mu(dx) < \infty$, а скалярное произведение изображений $\mathbf{f}(\cdot)$ и $\mathbf{g}(\cdot)$ имеет вид $(\mathbf{f}, \mathbf{g})_\infty = \int_Y (\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(x)) \mu(dx)$.

2. ФОРМА ИЗОБРАЖЕНИЯ И КЛАССА ИЗОБРАЖЕНИЙ [12]

Обозначим через S некоторую сцену, K — множество условий регистрации изображений этой сцены (например, погодные условия, характеристики освещения и т. п.), тогда $V_S = \{\mathbf{f}(\cdot, k) \in L_\mu^2(Y), k \in K\}$ — класс изображений, которые можно получить при всех условиях регистрации $k \in K$. Класс V_S содержит все визуальные данные, доступные для анализа геометрических характеристик сцены S и ее элементов, и называется *формой (класса) изображений* сцены S . Далее, можно выбрать некоторое изображение $\mathbf{f}(\cdot) \in V_S$ и образовать класс $V_S(\mathbf{f}) = \{\mathbf{g}(\cdot) \in V_S, \mathbf{g}(\cdot) \prec \mathbf{f}(\cdot)\}$ изображений, которые представляют геометрические характеристики элементов S не более детально, чем изображение $\mathbf{f}(\cdot) \in V_S$. В монографии [12] $V_S(\mathbf{f})$ называется *формой изображения* $\mathbf{f}(\cdot)$. Изображение $\mathbf{g}(\cdot)$ не всегда передает некоторые детали формы S , представленные в изображении $\mathbf{f}(\cdot)$. Данное отношение $\prec$ определяет на множестве V_S частичную квазиупорядоченность: оно рефлексивно и транзитивно.

Если $\mathbf{g}(\cdot) \prec \mathbf{f}(\cdot)$ и $\mathbf{f}(\cdot) \prec \mathbf{g}(\cdot)$, то изображения $\mathbf{f}(\cdot)$ и $\mathbf{g}(\cdot)$ эквивалентны по форме и одинаково детально представляют сцену S , $\mathbf{f}(\cdot) \cong \mathbf{g}(\cdot)$. Таким образом, с каждым изображением $\mathbf{f}(\cdot) \in V_S$ связан класс изображений $E_S(\mathbf{f}) = \{\mathbf{g}(\cdot) \in V_S, \mathbf{g}(\cdot) \cong \mathbf{f}(\cdot)\}$, $\mathbf{f}(\cdot) \in V_S$, эквивалентных изображению $\mathbf{f}(\cdot)$ по форме. Множество $V_S(\mathbf{f})$ представляет собой выпуклый конус в $L_\mu^2(Y)$, который обычно является замкнутым в $L_\mu^2(Y)$ для любого изображения $\mathbf{f}(\cdot) \in V_S$, и существует оператор $\Pi_f : L_\mu^2(Y) \rightarrow L_\mu^2(Y)$ проецирования на $V_S(\mathbf{f})$, для которого $\|\mathbf{g}(\cdot) - \Pi_f \mathbf{g}(\cdot)\| = \inf_{\mathbf{h}(\cdot) \in V_S(\mathbf{f})} \|\mathbf{g}(\cdot) - \mathbf{h}(\cdot)\|$, $\mathbf{g}(\cdot) \in L_\mu^2(Y)$.

3. КОСООЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ [11]

Пусть евклидово пространство $L_\mu^2(Y)$ можно разложить в прямую, но, вообще говоря, не ортогональную сумму подпространств $L_{\mu,1}^2(Y)$ и $L_{\mu,2}^2(Y)$:

$L_\mu^2(Y) = L_{\mu,1}^2(Y) \oplus L_{\mu,2}^2(Y)$, и, следовательно, для любого изображения $\mathbf{f}(\cdot) \in L_\mu^2(Y)$ существует его однозначное представление в виде суммы изображений $\mathbf{f}_1(\cdot) \in L_\mu^2(Y)$ и $\mathbf{f}_2(\cdot) \in L_\mu^2(Y)$: $\mathbf{f}(\cdot) = \mathbf{f}_1(\cdot) + \mathbf{f}_2(\cdot)$. Оператор $S : L_\mu^2(Y) \rightarrow L_\mu^2(Y)$, определенный равенством $S\mathbf{f}(\cdot) = \mathbf{f}_1(\cdot)$, называется косым проектором, проецирующим на пространство $L_{\mu,1}^2(Y)$ вдоль $L_{\mu,2}^2(Y)$. В конечномерном евклидовом пространстве $\mathcal{R}^N$ для любого его подпространства $\mathcal{R}^k$ существует сколько угодно дополнительных к $\mathcal{R}^k$ подпространств $\mathcal{R}^{N-k}$, $\mathcal{R}^N = \mathcal{R}^k \oplus \mathcal{R}^{N-k}$, и косых проекторов, проецирующих на $\mathcal{R}^k$ вдоль $\mathcal{R}^{N-k}$, см. рис. 1. На нем приведен пример пространства $\mathcal{R}^3 = \mathcal{R}^1 \oplus \mathcal{R}^2$, косой проектор $S^{(1)}$ проецирует на $\mathcal{R}^1$ вдоль $\mathcal{R}^2$, $S^{(2)} = I - S^{(1)}$ проецирует на $\mathcal{R}^2$ вдоль $\mathcal{R}^1$, $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)} + \mathbf{f}^{(2)}$, пространство $\mathcal{R}^1$ можно интерпретировать как форму сигнала (изображения) $\mathbf{f}^{(1)}$, $\mathcal{R}^2$ — как форму помехи $\mathbf{f}^{(2)}$, $\mathcal{R}^1 \oplus \mathcal{R}^2 = \mathcal{R}^3$, $\mathcal{R}^1 \cap \mathcal{R}^2 = \{0\}$ — как форму класса изображений $\mathbf{f}$. В данном случае косое проецирование выделяет из $\mathbf{f}$ сигнал $\mathbf{f}^{(1)}$ и помеху $\mathbf{f}^{(2)}$. При ортогональном проецировании $\Pi_1 \mathbf{f} = \Pi_1 \mathbf{f}^{(1)} + \Pi_1 \mathbf{f}^{(2)} = \mathbf{f}^{(1)} + \Pi_1 \mathbf{f}^{(2)}$, $\Pi_2 \mathbf{f} = \Pi_2 \mathbf{f}^{(1)} + \mathbf{f}^{(2)}$ суть наиболее точные в $\mathcal{R}^3$ сигналами $\mathbf{f}^{(1)} \in \mathcal{R}^1$ и помехами $\mathbf{f}^{(2)} \in \mathcal{R}^2$, причем $\Pi_1 \mathbf{f} + \Pi_2 \mathbf{f} \neq \mathbf{f}$.

Пример. Рассмотрим пример применения техники косого проецирования в задаче морфологической фильтрации двумерных изображений листов проката алюминия, позволяющих выделить особенности различных видов, присутствующие на поверхности листа алюминия. В процессе проката на листе металла могут образовываться дефекты двух видов: дефекты «первого типа», характеризующие качество сплава, представляющие собой встречающиеся на всей поверхности листа проката углубления и выпуклости неправильной формы и небольшой высоты, а также дефекты «второго типа», появляющиеся вследствие нарушенной гладкости самого барабана проката, имеющие вид длинных узких высокоамплитудных борозд и хребтов вдоль направления проката. С помощью сканирующего микроскопа получают изображение поверхности листа алюминия, которое затем исследует эксперт, однако процесс оценки качества поверхности человеком часто занимает много времени. Поэтому целесообразно автоматизировать процедуру принятия решений о том, достаточного ли качества поверхность проката, какого типа дефекты она содержит и нет ли необходимости изменить параметры шлифовки.

На рис. 2,а представлено изображение фрагмента поверхности проката алюминия, на котором присутствуют изображения дефектов обоих типов: светлые и темные горизонтальные полосы представляют собой изображения дефектов, оставляемых барабаном проката, темные углубления неправильной формы являются дефектами, характеризующими качество сплава. На рис. 2,б представлен результат морфологической фильтрации с использованием техники косого проецирования, когда на исходном изображении оставлены лишь дефекты «первого типа», а дефекты «второго типа»

отсутствуют. Морфологическая фильтрация изображений листов проката алюминия с применением техники ортогонального проецирования рассмотрена в статье [15].

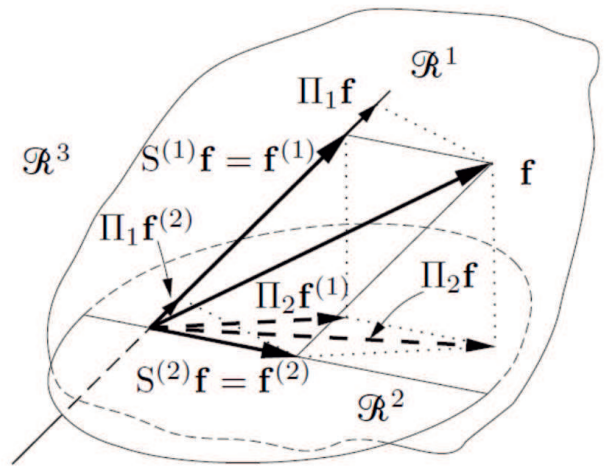
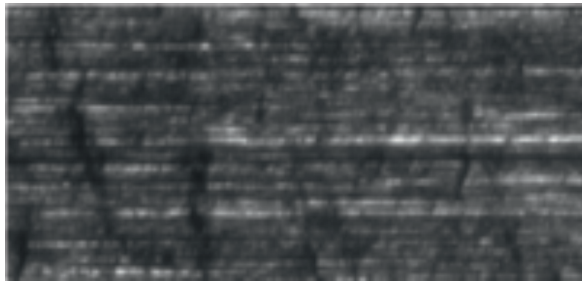


Рис. 1: Косые проекторы $S^{(i)} : \mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}^3$, $i = 1, 2$, $S^{(1)}$ проецирует на $\mathcal{R}^1$ вдоль $\mathcal{R}^2$, $S^{(2)} = I - S^{(1)}$ проецирует на $\mathcal{R}^2$ вдоль $\mathcal{R}^1$, $\mathcal{R}^3 = \mathcal{R}^1 \oplus \mathcal{R}^2$

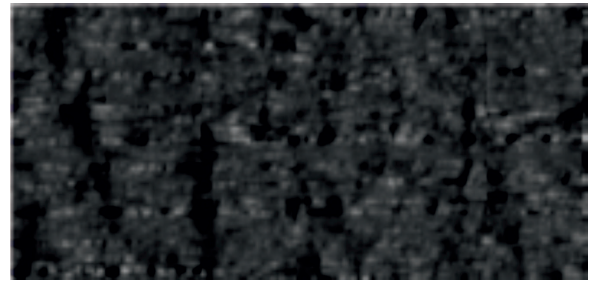
4. СУБЪЕКТИВНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ [13, 14]

Математический формализм субъективного моделирования предложен в статьях [13, 14] как метод моделирования неполной и недостоверной информации о возможных значениях неизвестного параметра $x \in X$, определяющего модель $M(x)$ объекта исследования, выраженной в форме субъективных суждений м.-и. Это дает возможность моделировать неформализованные, неполные и недостоверные знания, начиная с «абсолютного незнания» модели объекта исследования вплоть до «абсолютного знания» этой модели, а если доступны данные наблюдений за объектом, то позволяет эмпирически проверять адекватность субъективной модели цели исследования, корректировать субъективную модель, и при определенных условиях — эмпирически восстанавливать модель объекта исследования.

Математической основой данного формализма является предложенное м.-и. пространство $(X, \mathcal{P}(X), \text{Pl}^{\tilde{x}}, \text{Bel}^{\tilde{x}})$ с мерами правдоподобия $\text{Pl}^{\tilde{x}}(\cdot) : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{L}$ и доверия $\text{Bel}^{\tilde{x}}(\cdot) : \mathcal{P}(X) \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$, в котором X — множество возможных значений неизвестного параметра x модели $M(x)$, $\mathcal{P}(X)$ — класс всех подмножеств X , неопределенный элемент (н.э.) $\tilde{x}$ со значениями в X характеризует модальности субъективных суждений м.-и. об истинности каждого значения $x \in X$ правдоподобием $\text{Pl}^{\tilde{x}}(\tilde{x} = x)$ равенства $\tilde{x} = x$ и доверием $\text{Bel}^{\tilde{x}}(\tilde{x} \neq x)$ неравенства $\tilde{x} \neq x$ [13].



а



б

Рис. 2: Изображение фрагмента поверхности проката алюминия, содержащее изображения дефектов проката двух видов — а, результат морфологической фильтрации с использованием техники косого проектирования — б

Правдоподобие $Pl^{\tilde{x}}$ и доверие $Bel^{\tilde{x}}$ принимают значения в шкалах $\mathcal{L} = ([0, 1], \leq, +, \times)$ и $\hat{\mathcal{L}} = ([0, 1], \geq, \hat{+}, \hat{\times})$ соответственно, где операции сложения $+$, $\hat{+}$ и умножения $\times$, $\hat{\times}$ определены согласно равенствам

$$a + b = \max\{a, b\}, \quad a \hat{+} b = \min\{a, b\}, \\ a \times b = \min\{a, b\}, \quad a \hat{\times} b = \max\{a, b\}, \quad a, b \in [0, 1].$$

Для любого множества $E \in \mathcal{P}(X)$ меры $Pl^{\tilde{x}}$ и $Bel^{\tilde{x}}$ определены равенствами

$$Pl^{\tilde{x}}(E) \equiv Pl^{\tilde{x}}(\tilde{x} \in E) = \sup_{x \in E} t^{\tilde{x}}(x), \\ E \neq \emptyset, \quad Pl^{\tilde{x}}(\emptyset) \equiv 0, \\ Bel^{\tilde{x}}(E) \equiv Bel^{\tilde{x}}(\tilde{x} \in E) = \inf_{x \in X \setminus E} \hat{t}^{\tilde{x}}(x), \\ E \neq X; \quad Bel^{\tilde{x}}(X) = 1,$$

где $t^{\tilde{x}}(x) = Pl^{\tilde{x}}(\tilde{x} = x)$, $\hat{t}^{\tilde{x}}(x) = Bel^{\tilde{x}}(\tilde{x} \neq x)$, $x \in X$. Функции $t^{\tilde{x}}(\cdot) : X \rightarrow \mathcal{L}$ и $\hat{t}^{\tilde{x}}(\cdot) : X \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$ называются распределениями правдоподобий и доверий значений x , $t^{\tilde{x}}(x)$ и $\hat{t}^{\tilde{x}}(x)$ — правдоподобие истинности равенства $\tilde{x} = x$ и доверие истинности неравенства $\tilde{x} \neq x$, $x \in X$, значения $Pl^{\tilde{x}}(E)$ и $Bel^{\tilde{x}}(E)$ определяют правдоподобие и доверие истинности включения $\tilde{x} \in E \in \mathcal{P}(X)$. Пространство $(X, \mathcal{P}(X), Pl^{\tilde{x}}, Bel^{\tilde{x}})$ характеризует н.э. $\tilde{x}$ и называется его моделью.

Модели «абсолютного незнания» и «абсолютного знания» модели объекта исследования. Случай «абсолютного незнания» модели $M(x)$, $x \in X$, определяется инвариантными относительно выбора шкал $\mathcal{L}$ и $\hat{\mathcal{L}}$ распределениями $t^{\tilde{x}}(x) = Pl^{\tilde{x}}(\tilde{x} = x) = 1$ и $\hat{t}^{\tilde{x}}(x) = Bel^{\tilde{x}}(\tilde{x} \neq x) = 0$, $x \in X$, согласно которым все значения $\tilde{x} = x$ равноправдоподобны и любому неравенству $\tilde{x} \neq x$, $x \in X$, доверять нельзя. В случае «абсолютного знания» $t^{\tilde{x}}(x) = \begin{cases} 1, & 5A; 8x = x_0, \\ 0, & 5A; 8x \neq x_0, \end{cases}$ $\hat{t}^{\tilde{x}}(x) = \begin{cases} 0, & 5A; 8x = x_0, \\ 1, & 5A; 8x \neq x_0, \end{cases}$ $x \in X$, то есть x_0 — единственное правдоподобное значение параметра $x \in X$ модели $M(x)$ и любому другому значению доверять нельзя.

5. СУБЪЕКТИВНАЯ МОРФОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ [13, 14]

Как показано в статьях [13, 14], косое проектирование является частным случаем решения задачи морфологической оптимизации. Речь идет об оценивании сигнала $\mathbf{f}^{(1)}$ в определенной м.-и. субъективной морфологической модели наблюдения, в которой сигнал $\mathbf{f}^{(1)}$ и помеха $\mathbf{f}^{(2)}$ являются реализациями независимых неопределенных векторов $\tilde{\mathbf{f}}^{(1)}$ и $\tilde{\mathbf{f}}^{(2)}$, наблюдаемых по схеме $\tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\mathbf{f}}^{(1)} + \tilde{\mathbf{f}}^{(2)}$ и заданных распределениями $t^{\tilde{\mathbf{f}}^{(i)}}(\mathbf{f}^{(i)}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{f}^{(i)} \in \mathcal{R}^i, \\ 0, & \mathbf{f}^{(i)} \notin \mathcal{R}^i, \end{cases} \quad i = 1, 2, \quad \mathcal{R}^1 \oplus \mathcal{R}^2 = \mathcal{R}^3$, правдоподобий истинности их значений. Оптимальная оценка максимального правдоподобия $\mathbf{f}_*^{(1)}$, минимизирующая правдоподобие ошибки оценивания значения $\mathbf{f}^{(1)} = \mathbf{f}^{(1)}$, определяется условием, согласно которому $\mathbf{f}_*^{(1)} = S^{(1)}\mathbf{f}$.

Пример. Пусть м.-и. не знает, какие именно значения принимают неопределенные векторы $\tilde{\mathbf{f}}^{(i)}$, $i = 1, 2$, но может указать конусы $C^{(i)} \in \mathcal{R}^i$, $i = 1, 2$, такие, что $0 \leq t^{\tilde{\mathbf{f}}^{(i)}}(\mathbf{f}^{(i)}) \leq 1$, $\mathbf{f}^{(i)} \in C^{(i)}$, $i = 1, 2$, (см. рис. 3, на котором графически представлен пример распределений: чем плотнее «заштрихован» конус $C^{(i)}$, $i = 1, 2$, тем выше правдоподобие реализации $\tilde{\mathbf{f}}^{(i)} = \mathbf{f}^{(i)}$, $i = 1, 2$; наиболее правдоподобная реализация в каждом конусе выделена зеленым цветом).

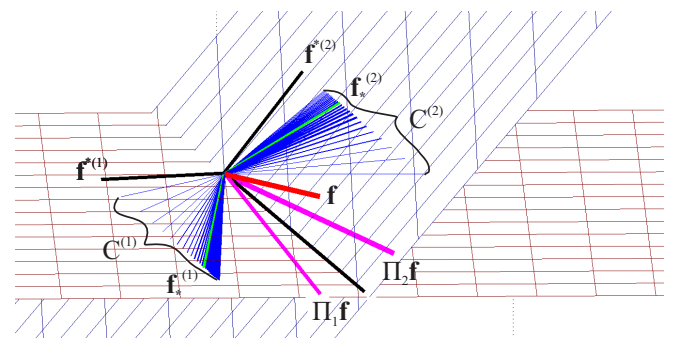


Рис. 3: Графический пример распределений правдоподобий возможностей $t^{\tilde{\mathbf{f}}^{(i)}}(\mathbf{f}^{(i)})$, $\mathbf{f}^{(i)} \in C^{(i)}$, $i = 1, 2$

В этом случае оптимальное разложение $\mathbf{f}_* = \mathbf{f}_*^{(1)} + \mathbf{f}_*^{(2)}$, минимизирующее правдоподобие ошибочного разложения, определяется условием

$$t^{\tilde{\mathbf{f}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{f}}^{(2)}}(\mathbf{f}_*^{(1)}, \mathbf{f}_*^{(2)}) = \max\{\min\{t^{\tilde{\mathbf{f}}^{(1)}}(\mathbf{f}^{(1)}), t^{\tilde{\mathbf{f}}^{(2)}}(\mathbf{f}^{(2)})\} | \mathbf{f}^{(1)} \in C^{(1)}, \mathbf{f}^{(2)} \in C^{(2)}, \mathbf{f}^{(1)} + \mathbf{f}^{(2)} = \mathbf{f}\}.$$

На рис. 3 показаны компоненты $\mathbf{f}_*^{(1)}, \mathbf{f}_*^{(2)}$ оптимального разложения в случае субъективной независимости неопределенных векторов $\tilde{\mathbf{f}}^{(i)}$, $i = 1, 2$. На рис. 4 для сравнения приведены примеры решения задачи морфологической оптимизации разными методами.

6. ВЕРОЯТНОСТНАЯ И ВОЗМОЖНОСТНАЯ МОДЕЛИ СЛУЧАЙНОЙ ФОРМЫ ИЗОБРАЖЕНИЯ [16,17,18]

В предыдущем разделе рассмотрена субъективная морфологическая модель наблюдения, в которой изображение является неопределенным элементом, принимающим значения на множестве изображений $V \subset L_\mu^2(Y)$, называемом формой изображения. При этом предполагается, что форма V не изменяется. В настоящем разделе рассмотрена модель, допускающая изменчивость множества V . Более точно, предполагается, что форма изображения является *случайной*.

Как было сказано выше, форма изображения несет максимальную информацию о геометрической форме изображенного объекта. Соответственно, модель, в рамках которой форма изображения считается случайной, может быть использована при решении задач анализа изображений объектов со случайно изменяющейся геометрической формой. К таким объектам можно отнести любой подвижный эластичный физический объект, геометрическая форма которого может изменяться в известных пределах, сохраняя при этом характерные особенности, свойственные форме именно этого объекта, либо объект, выбранный наугад из класса объектов, геометрические формы которых имеют общие характерные особенности. Предполагается, что процедура регистрации изображений подобного объекта такова, что его геометрическая форма, запечатленная на каждом конкретном изображении, является результатом случайного выбора из множества всех его форм.

Изменение геометрической формы объекта приводит к изменению его изображения и, следовательно, формы V его изображения. Обозначим V семейство форм изображений, соответствующих всевозможным геометрическим формам объекта.

В качестве примера рассмотрим изображения еловых веточек (см. рис. 5). Определим форму изображения $V_{C,I}$ «эталонной» еловой веточки (веточки с одинако-

выми по форме иголками) как множество всех изображений с произвольными яркостями пикселей в центральной части изображения и полосами постоянной яркости, имеющими одинаковые кривизну C и наклон I (соответствующие кривизне и наклону иголок веточки), в верхней и нижней частях, см. рис. 5, в, г. Тогда V можно определить как $V = \{V_{C,I} | C \in C, I \in I\}$, где C и I — множества допустимых значений кривизны и наклона еловых иголок.

Определение 1. *Вероятностной моделью случайной формы изображения* называется вероятностное пространство (V, A, Pr) , где A — σ -алгебра подмножеств семейства V , и Pr — вероятность, определенная на A .

Определение 2. *Возможностной моделью нечеткой формы изображения* называется пространство с возможностью (V, A, P) , где P — возможность, определенная на A .

Заметим, что в определении 2 мера возможности P обладает теми же формальными математическими свойствами, что и мера правдоподобия Pr , рассмотренная выше, однако используется для моделирования вероятностной случайности. При этом для описания изменчивости формы изображения используется принятый в теории возможностей термин «нечеткость».

В статьях [16–18] разработаны морфологические методы идентификации объектов со случайно изменяющейся геометрической формой по их изображениям, а также поиска таких объектов на изображениях. Кроме того, разработаны адаптивные методы обучения решению указанных задач, основанные на восстановлении распределений вероятностной и возможностной мер по выборке изображений со случайной формой. Разработанные методы протестированы на реальных данных в задаче идентификации породы ели — голубая или европейская — по изображению ее веточки (см. рис 5). В проведенных тестах при объеме обучающей выборки от 100 (по 50 изображений веточек голубой и европейской елей) получена частота ошибок 8%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описан ряд математических моделей форм изображения: классической морфологии, сравнительной морфологии, основанной на формализме косоугольного проецирования, субъективной морфологической модели, а также вероятностной и возможностной модели случайной формы изображения. Приведены примеры применения морфологических методов анализа изображений в ряде прикладных исследований.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 17-07-00832.

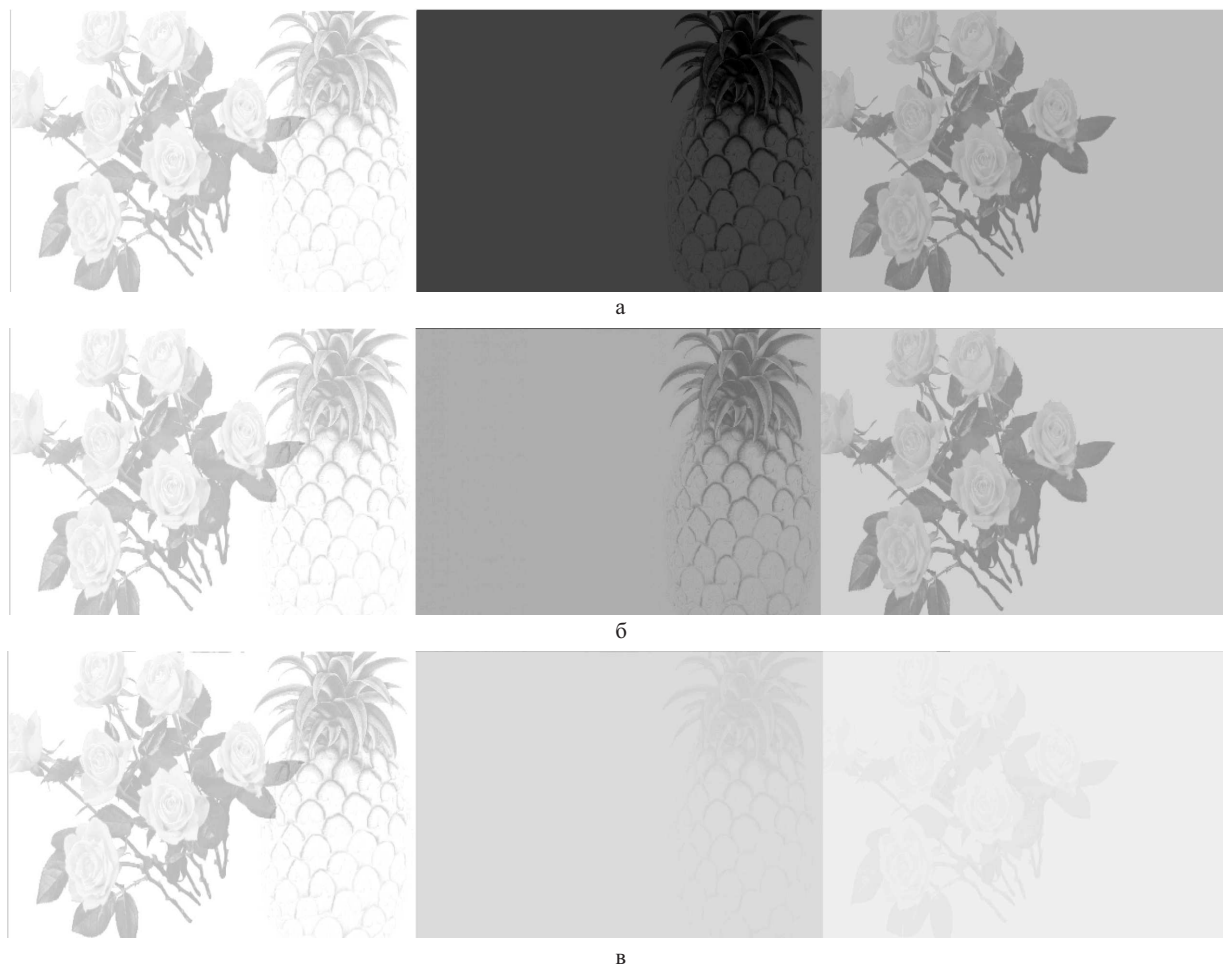


Рис. 4: *а* — первое изображение в строке — сумма двух изображений, второе и третье изображения — компоненты разложения на сумму косых проекций, полученные стандартным способом [11] (на рис. 3 им соответствуют векторы $\mathbf{f}^{*(1)}$ и $\mathbf{f}^{*(2)}$); *б* — первое изображение в строке — сумма двух изображений, второе и третье изображения — компоненты разложения, минимизирующие правдоподобие ошибки (на рис. 3 им соответствуют векторы $\mathbf{f}_*^{(1)}$ и $\mathbf{f}_*^{(2)}$); *в* — первое изображение в строке — сумма двух изображений, второе и третье изображения — компоненты разложения, полученные с помощью ортогонального проецирования (на рис. 3 им соответствуют векторы $\Pi_1 \mathbf{f}$ и $\Pi_2 \mathbf{f}$)

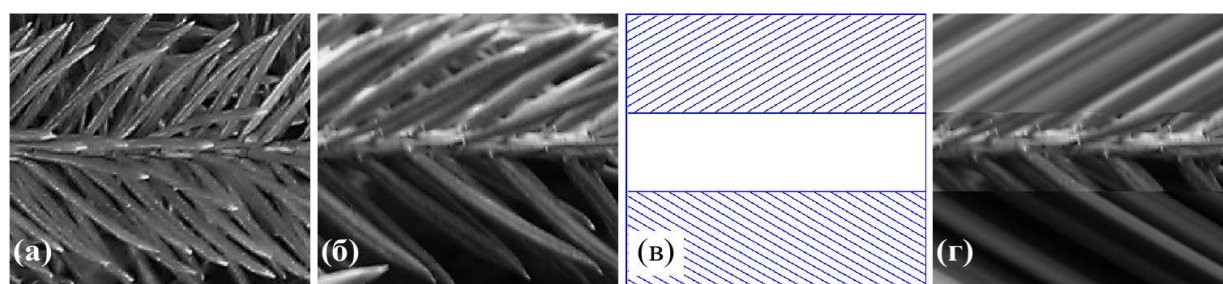


Рис. 5: *а, б* — примеры изображений еловых веточек; *в* — схематичное представление формы изображения «эталонной» еловой веточки — множества всех изображений с произвольными яркостями пикселей в центральной части изображения (ее границы отмечены горизонтальными линиями) и полосами постоянной яркости, имеющими одинаковые кривизну и наклон, в верхней и нижней частях (их границы отмечены наклонными линиями); *г* — представитель формы изображения «эталонной» еловой веточки — проекция изображения *б* на форму *в*

- [1] Yakimovsky A. Y. J. Association of Computing Machinery. 1976. N 23. P. 599.
- [2] Serra J. Image analysis and Mathematical Morphology. London: Academic Press, 1982.
- [3] Ayache N., Faugeras O.D. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 1986. N 8(1). P. 44.
- [4] Davies E.R. Pattern recognition. 1992. N 13(2). P. 113.
- [5] Витмух В.А., Сергеев В.В., Сойфер В.А. Обработка изображений в автоматизированных системах научных исследований. М.: Наука, 1982.
- [6] Visilter Yu., Zheltov S., Stepanov A. SPIE Processings. 1996. **2823**. P. 184.
- [7] Форсайт А., Понс Дж. Компьютерное зрение. Современный подход. Вильямс, 2004.
- [8] Dougherty E. R. IEEE Trans. PA MI. 1989.
- [9] Визильтер В. Ю., Сидякин С. В. Вестник компьютерных и информационных технологий. 2012. № 11. С. 3.
- [10] Местецкий Л.М. Непрерывная морфология бинарных изображений: фигуры, скелеты, циркуляры. М.: Физматлит, 2009.
- [11] Пытьев Ю.П. ЖВМиМФ. 2013. № 12. С. 154.
- [12] Пытьев Ю.П., Чуличков А.И. Методы морфологического анализа изображений. М.: Физматлит, 2010.
- [13] Пытьев Ю.П. Математическое моделирование. 2013. **25**, № 4. С. 102.
- [14] Pytyev Yu. Pattern Recognition and Image Analysis. 2017. **27**, N 2. P. 213.
- [15] Glazoff M. V., Rashkeev S. N., Pyt'ev Y. P. et al. Appl. Phys. Lett. 2009. **95**, N 8. P. 084106.
- [16] Пытьев Ю.П., Зубюк А.В. Интеллектуальные системы и компьютерные науки: материалы IX Международной конференции. 2006. **1**, № 2. С. 222.
- [17] Зубюк А.В. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2012. № 6. С. 47. (Zubyuk A. V. Mosc. Univ. Phys. Bull. 2012. N 6. P. 512).
- [18] Зубюк А.В. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2013. № 1. С. 8. (Zubyuk A. V. Mosc. Univ. Phys. Bull. 2013. N 1. P. 6).

Morphological methods of image analysis and their applications

A. I. Chulichkov^a, Yu. P. Pytyev^b, O. V. Falomkina^c, A. V. Zubjuk^d

*Department of mathematical modeling and informatics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia*

*E-mail: ^aachulichkov@gmail.com, ^byuri.pytyev@gmail.com, ^colesya.falomkina@gmail.com,
^dzubjuk@physics.msu.ru*

The paper contains a brief overview of the methods of morphological image analysis. The mathematical models of signal (image) shapes are formulated, particularly, the models that incorporate subjective judgments of a researcher. The mathematical methods and the numerical algorithms for calculating the measures of proximity of signal (image) shapes based on the oblique projection technique are considered. Some applications of the methods of morphological image analysis to the real-world problems are discussed.

PACS: 02.70.-c, 02.90.+P.

Keywords: morphological methods, image shape, subjective model, image analysis, oblique projection.

Received 30 June 2017

Сведения об авторах

1. Чуличков Алексей Иванович — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-41-78, e-mail: achulichkov@gmail.com.
2. Пытьев Юрий Петрович — доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой; тел.: (495) 939-13-32, e-mail: yuri.pytyev@gmail.com.
3. Фаломкина Олеся Владимировна — канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник; тел.: (495) 939-41-78, e-mail: olesya.falomkina@gmail.com.
4. Зубюк Андрей Владимирович — канд. физ.-мат. наук, мл. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-41-78, e-mail: zubjuk@physics.msu.ru.