Математическое моделирование периодических волноведущих систем прямоугольного сечения

А. Н. Боголюбов, А. И. Ерохин, В. М. Пикунов, М. И. Светкин*

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Статья поступила 30.06.2017; Подписана в печать 03.07.2017)

Предлагается математическая модель идеально проводящей периодической волноведущей системы кусочно–постоянного прямоугольного сечения. Подобная геометрия все чаще находит применение при создании устройств терагерцового диапазона. Поставленная задача представляет собой систему уравнений Максвелла, дополненную граничными условиями на металле и условиями Флоке на сечениях, отстоящих на один период структуры. Решение задачи основано на неполном методе Галеркина и проекционном сшивании полей в области скачков сечений. При использовании такого подхода напрямую возникают матричные задачи с плохо обусловленными матрицами, так как в этом случае одновременно присутствуют экспоненциально возрастающие и убывающие матричные коэффициенты. В связи с этим предлагаемый метод дополнительно учитывает направления распространения волн на каждом регулярном участке системы, что позволяет исключить экспоненциально возрастающие элементы и улучшить обусловленность матриц. При этом в явном виде учитываются переотражения волн, происходящие внутри одного периода системы. На основе модели построены дисперсионные характеристики различных структур. Исследована сходимость данного метода к предельным случаям.

PACS: 02.70.Dh УДК: 51.73, 519.632.4, 537.876.45.
Ключевые слова: периодическая волноведущая система, неполный метод Галеркина, условия Флоке, терагерцовый диапазон.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время при создании электронных устройств терагерцового диапазона все чаще используются электродинамические структуры, состоящие из отрезков периодических волноводов лестничного типа [1–3]. Математическое описание таких систем приводит к системам дифференциальных уравнений второго порядка с плохо обусловленными матрицами.

В данной работе предлагается математическая модель волноведущей системы без потерь кусочно–постоянного сечения, основанная на неполном методе Галеркина и методе проекционного сшивания полей, учитывающем непрерывность потока вектора Умова–Пойнтинга. При использовании неполного метода Галеркина электромагнитное поле на каждом регулярном участке волноведущей системы разбивается на волны, распространяющиеся направо, т.е. бегущие направо волны и экспоненциально затухающие при увеличении z, и налево, т. е. бегущие налево и экспоненциально возрастающие при увеличении z. Таким образом, при численных расчетах возникают как очень большие, так и очень малые числа, что приводит к появлению плохо обусловленных матриц.

В связи с этим основная идея предлагаемого метода состоит в том, что для электромагнитных волн, распространяющихся вдоль и против оси волновода, независимо рассматриваются распространение на регулярных участках, отражение и прохождение сечений стыка. Этот подход позволяет избавиться от экспоненциально возрастающих матричных коэффициентов, что позволяет улучшить обусловленность получаемых матриц. На конечном этапе для получения полного поля решения для волн, распространяющихся влево и вправо, объединяются.

Электромагнитные поля во всех регулярных участках прямоугольного сечения могут быть представлены в виде разложения по векторному базису [6], который может быть выписан аналитически. Далее будем считать, что векторный базис для всех сечений рассматриваемой системы уже построен и обозначим его $\left\{G_n^{(ei)}\right\}$ для электрического поля в i-ом сечении и $\left\{G_n^{(hi)}\right\}$ — для магнитного.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим периодическую волноведущую систему, продольное сечение которой изображено на рис. 1.

Период $d = d_1 + d_2$ этой системы состоит из двух регулярных участков с постоянными сечениями $\Omega_1 = \{x \in [0, a], y \in [b_2 - b_1, b_2]\}$ и $\Omega_2 = \{x \in [0, a], y \in [0, b_2]\}$ с длинами d_i, $i = 1, 2$ соответственно.

Электромагнитные поля, возникающие в представленной системе с идеально проводящими стенками, описываются системой уравнений Максвелла с граничными условиями, заключающимися в равенстве нулю касательной компоненты электрического поля на границе волновода, и условиями Флоке для электрическо-

*E-mail: mihail-svetkin@mail.ru

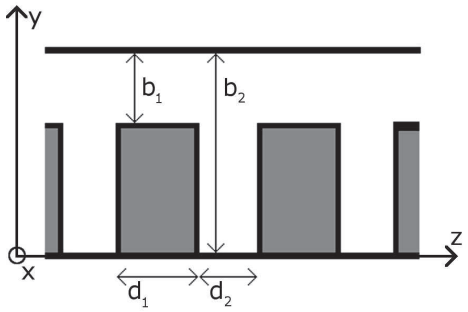

Рис. 1: Продольное сечение периодической волноведущей системы

го и магнитного полей в сечениях, находящихся на расстоянии периода системы d:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{E}(M,z) = ik\mathbf{H}(M,z), \quad M \in \Omega(z), \quad 0 < z < d, \\ \mathrm{rot}\mathbf{H}(M,z) = -ik\mathbf{E}(M,z), \\ \mathbf{E}_\tau|_{\partial D} = 0, \\ \mathbf{E}(M,d) = \lambda \mathbf{E}(M,0), \\ \mathbf{H}(M,d) = \lambda \mathbf{H}(M,0), \end{cases} \tag{1}$$

где $\lambda = \mathrm{const}$ — постоянная Флоке [4], ∂D — металлическая граница волновода, $\Omega(z)$ — кусочно–постоянное сечение. В сечениях, содержащих стык двух волноводов, ставятся условия сопряжения, отражающие непрерывность в среднем потока вектора Умова–Пойнтинга, которые можно записать в проекционном виде:

$$\int_S \left[\mathbf{E}_\perp^{(1)} - \mathbf{E}_\perp^{(2)}, \mathbf{G}_n^{(h1)^*}\right] \mathbf{z}_0 ds = 0, \qquad n = 1..N, \tag{2}$$

$$\int_S \left[\mathbf{G}_m^{(e2)}, \mathbf{H}_\perp^{(1)^*} - \mathbf{H}_\perp^{(2)^*}\right] \mathbf{z}_0 ds = 0, \qquad m = 1..M, \tag{3}$$

$$\mathbf{E}_\perp^{(i)}(M) = 0, \quad M \in \delta, i = 1, 2, s, \tag{4}$$

где $S = \Omega_1 \cap \Omega_2$ — область перекрытия сечений регулярных участков волновода, а $\delta = \Omega_1 \vartriangle \Omega_2$ — металлическая часть этого сечения.

2. ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦ ТРАНСФОРМАЦИИ ПОЛЯ

Пусть $z_a, z_b, (0 < z_a < z_b < d)$ — координаты сечений стыков отрезков волновода на рассматриваемом периоде. Пронумеруем сечения следующим образом: «1» — $z = 0$, «2» — $z = z_a - 0$, «3» — $z = z_a + 0$, «4» — $z = z_b - 0$, «5» — $z = z_b + 0$, «6» — $z = d$. Обозначим $C_\pm^i$ столбец амплитуд волн электрического поля в i-ом сечении, распространяющемся в направлении, определяемом нижним индексом. Таким образом, полное электрическое поле представляется в виде суперпозиции полей, распространяющихся вдоль оси волновода в положительном и отрицательном направлении:

$$\mathbf{E}^{(i)} = \mathbf{E}_+^{(i)} + \mathbf{E}_-^{(i)}, \quad \mathbf{E}_+^{(i)} = \sum_n \left(C_+^i\right)_n \mathbf{G}_n^{(ei)}, \\ \mathbf{E}_-^{(i)} = \sum_n \left(C_-^i\right)_n \mathbf{G}_n^{(ei)}, \tag{5}$$

Оператор, действующий на столбец в i-ом сечении и возвращающий столбец в j-ом сечении, обозначим U_i^j.

В сечениях стыка из условий сопряжения (2)–(4) при подстановке разложений полей (5) могут быть получены операторы отражения R и прохождения T, которые действуют на столбец комплексных амплитуд волн, падающих на рассматриваемое сечение, и возвращают столбцы амплитуд отраженных и прошедших волн, соответственно. Например, для волны, падающей на сечение «2» слева с амплитудами C_+^2, амплитуды прошедших C_+^3 и C_-^2 отраженных волн будут иметь вид:

$$C_+^3 = T_2^3 C_+^2, C_-^2 = R_2^2 C_+^2.$$

Помимо введенных выше операторов R и T, для описания данной структуры потребуется ввести оператор распространения на регулярных участках P. Поскольку рассматривается система без потерь, моды соответствующие различным базисным функциям распространяются независимо, следовательно, матрица оператора P будет диагональной:

$$P_j^i = \mathrm{diag}\left(\left\{\exp\left(\pm i\gamma_n^{(i)}(z_a - z_b)\right)\right\}_{n=1..N_i}\right). \tag{6}$$

Для получения дисперсионной характеристики рассматриваемой структуры необходимо построить матрицу трансформации полных полей в сечениях, отстоящих на период d. Для этого необходимо отдельно рассмотреть преобразование амплитуд волн, падающих на рассматриваемый период структуры слева и справа, в амплитуды волн распространяющихся из данного периода налево и направо.

Первой рассмотрим матрицу трансформации полей S_+ распространяющихся вправо в «1» сечении в поля распространяющиеся вправо в «6» сечении.

$$C_+^6 = P_5^6 T_4^5 P_3^4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} Q^n\right) T_2^3 P_1^2 C_+^1, \\ Q = R_3^3 P_4^3 R_4^4 P_3^4. \tag{7}$$

Бесконечная сумма описывает внутренние переотражения между двумя скачками сечений «2–3» и «4–5». В рассматриваемом случае ряд в (7) является сходящимся и может быть переписан в следующем виде:

$$C_+^6 = P_5^6 T_4^5 P_3^4 (I - Q)^{-1} T_2^3 P_1^2 C_+^1 = S_+ C_+^1, \\ S_+ = P_5^6 T_4^5 P_3^4 (I - Q)^{-1} T_2^3 P_1^2. \tag{8}$$

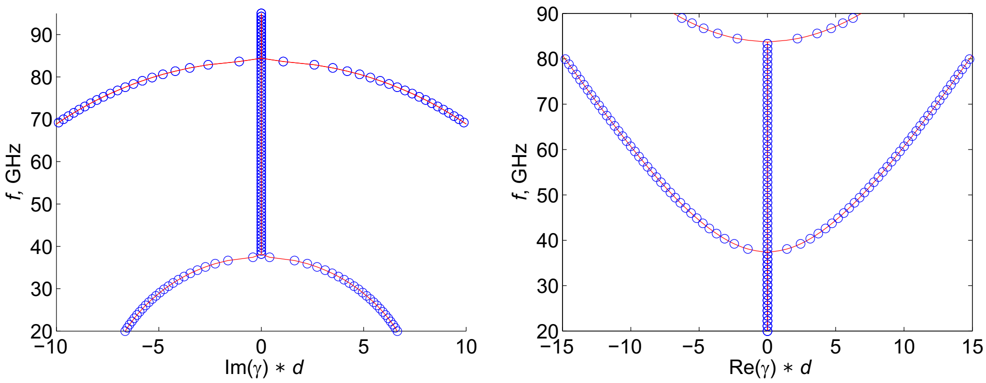

Рис. 2: Зависимость мнимой и действительной части от частоты для регулярного волновода

Аналогично может быть построена матрица B_+, связывающая поля распространяющиеся в 1-ом сечении направо и налево как результат отражения от нерегулярностей внутри периода структуры.

$$B_+ = P_2^1 R_2^2 P_1^2 + P_2^1 T_3^2 P_4^3 R_4^4 P_3^4 \left(I - Q\right)^{-1} T_2^3 P_1^2. \quad (9)$$

Первое слагаемое соответствует отражению от первого стыка, а второе — результат внутренних переотражений между сечениями «2–3» и «4–5».

В волноведущей структуре, состоящей из последовательно повторяющихся двух участков постоянного сечения, удобно выбрать начало координат в середине любого регулярного участка. Тогда при зеркальном отражении $z \to -z$ волновод переходит сам в себя и в этом случае $S_+ = S_- = S$, $B_+ = B_- = B$.

3. СУММИРОВАНИЕ ПОЛЕЙ

Поле C_+^1 в сечении «1» порождает прошедшее через период поле SC_+^1 в сечении «6», распространяющееся направо, и поле BC_+^1 в сечении «1», распространяющееся налево. Аналогично, поле C_-^6 в сечении «6» порождает поле SC_-^6 в сечении «1», распространяющееся налево, и поле BC_-^6 в сечении «6», распространяющееся направо. Таким образом, суммарное электрическое поле в левом сечении будет $C_+^1 + BC_+^1 + SC_-^6$, а в правом - $C_-^6 + BC_-^6 + SC_+^1$. Подставив эти выражения в условие Флоке для электрического поля в (1), получим:

$$\begin{pmatrix} S & I+B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_+^1 \\ C_-^6 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} I+B & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_+^1 \\ C_-^6 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Амплитуды магнитных поле в каждой волне могут быть выражены через амплитуды электрических полей

$$D_\pm^i = \pm H^{(i)} C_\pm^i, \quad H^{(i)} = \mathrm{diag}\left(\left\{\frac{k}{\gamma_n^{(i)}}\right\}_{n=1..N}\right). \quad (11)$$

где k — волновое число, $\gamma_n^{(i)}$ — постоянная распространения i-ой волны, знак определяется направлением распространения. Таким образом, условие Флоке для магнитного поля принимает вид:

$$\begin{pmatrix} HS & H(-I+B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_+^1 \\ C_-^6 \end{pmatrix} = \\ = \lambda \begin{pmatrix} H(I-B) & -HS \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_+^1 \\ C_-^6 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Объединяя (11) и (12), получим обобщенную задачу на собственные значения для определения комплексных амплитуд электрического поля и соответствующих параметров Флоке λ [10].

$$\begin{pmatrix} S & I+B \\ HS & H(-I+B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_+^1 \\ C_-^6 \end{pmatrix} = \\ = \lambda \begin{pmatrix} I+B & S \\ H(I-B) & -HS \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_+^1 \\ C_-^6 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Постоянные распространения собственных мод периодического волновода определяются по формуле:

$$\gamma_n = \frac{Ln\left(\lambda_n\right)}{id}. \quad (14)$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рассмотрена периодическая структура, продольное сечение которой изображено на рис. 1. Выполнен предельный переход к регулярному волноводу. Дисперсионные характеристики этой регулярной системы получаются аналитически [7]. Выбраны следующие геометрические параметры, соответствующие терагерцовому диапазону частот, а именно: ширина волновода 4 мм, высота 2 мм.

На приведенных ниже графиках красные кривые показывают зависимости мнимой части от частоты для

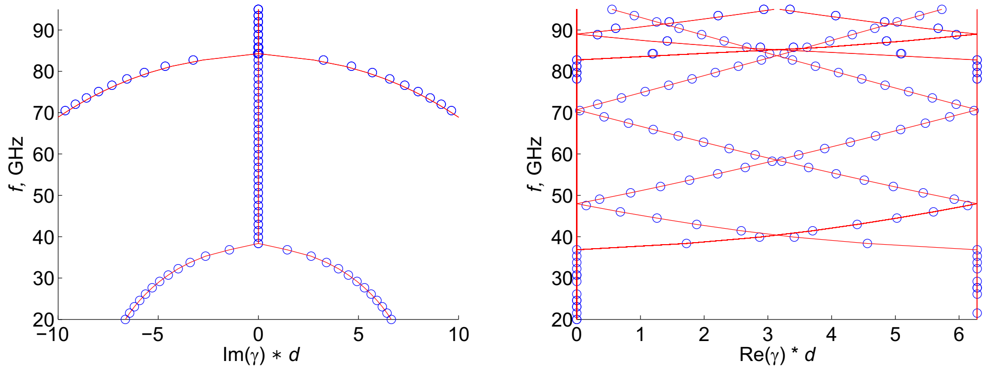

Рис. 3: Зависимость мнимой и действительной части от частоты для волновода $b_1/b_2 = 0.99$

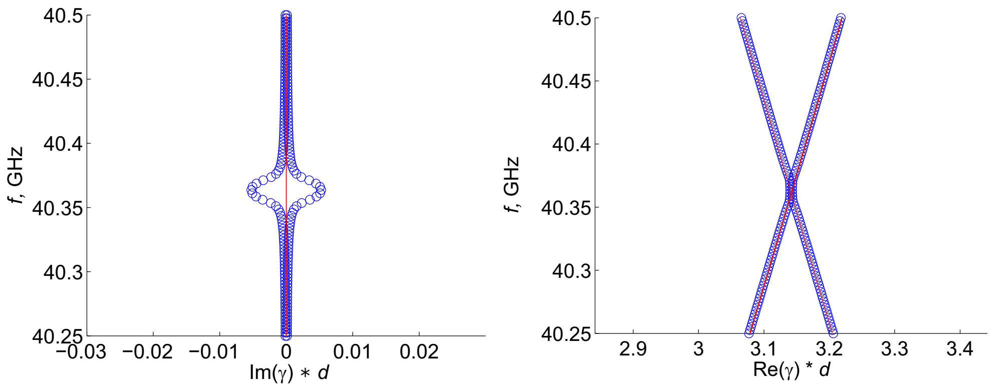

Рис. 4: Зависимость мнимой и действительной части от частоты для волновода $b_1/b_2 = 0.99$ в окрестности точки пересечения дисперсионных кривых

регулярного волновода. Синие кресты являются результатом численного расчета по приведенному выше алгоритму.

В случае дисперсионные характеристики (рис. 3) на большом диапазоне частот практически совпадают с регулярным случаем (рис. 2). Однако наличие нерегулярности в виде ступеньки приводит к возмущению дисперсионных кривых в областях с появлением так называемых «лакун» (рис. 4). Подобное поведение дисперсионных кривых было получено аналитически с помощью асимптотических методов в работах [4, 5].

При дальнейшем изменении b_1/b_2 дисперсионные характеристики все более значительно искажаются по сравнению с регулярным случаем (рис. 5).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе представлена математическая модель, позволяющая рассчитывать дисперсионные характеристики периодических волноведущих структур прямоугольного сечения с идеально проводящими стенками.

Численно продемонстрирована сходимость постоянных распространения периодической системы, полученных с помощью предложенного метода, к постоянным распространения регулярного волновода при предельном переходе $b_1 \to b_2$. Проведены расчеты систем с конкретными параметрами в терагерцовом диапазоне.

Данный метод может быть применен к более сложным многозазорным структурам с произвольным кусочно-постоянным сечением, возникающим при расчете систем с распределенным взаимодействием.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 16-31-60084 мол_а_дк, № 16-01-00690 и № 15-01-03524.

[1] *Ильинский А. С., Косич Н. Б.* Радиотехника и электроника. 1974. **19**, №6, С. 1171.

[2] *Ильинский А. С., Трубников С. В., Федосеева Н. А.* Ис-

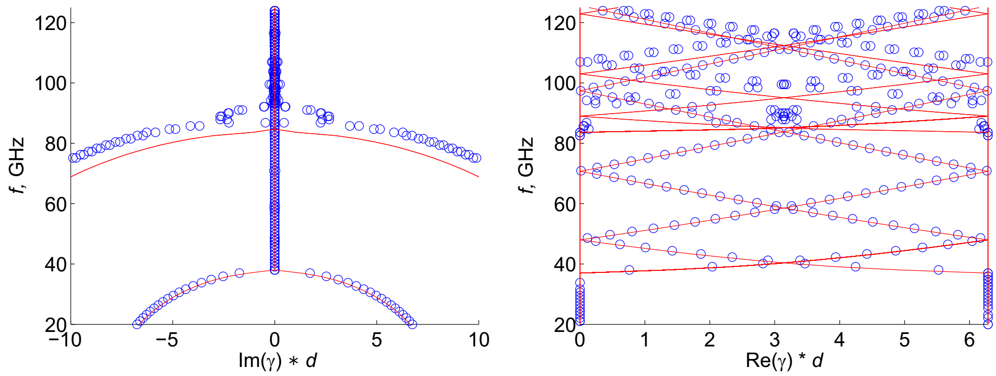

Рис. 5: Зависимость мнимой и действительной части от частоты для волновода $b_1/b_2 = 0.9$

следование резонансных явлений в фазированной антенной решетке из прямоугольных волноводов. Математические модели и оптимизация вычислительных алгоритмов. М.: Изд. Московского Университета, 1993.

[3] *Григорьев А. Д.* Электродинамика и техника СВЧ. М.: Высшая школа, 1990.

[4] *Назаров С. А.* Вестник Санкт–Петербургского университета. Сер. 1. Матем. Мех. Астрон. 2013. №. 2.

[5] *Назаров С. А.* Математические заметки. 2010. **87**, № 5. С. 764.

[6] *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* ЖТФ. 1948. **18**, № 7.

[7] *Ильинский А. С., Кравцов В. В., Свешников А. Г.* Математические модели электродинамики. М.: Высшая школа, 1991.

[8] *Свешников А. Г., Могилевский И. Е.* Математические задачи теории дифракции. М.: Физический ф-т МГУ, 2010.

[9] *Ильинский А. С., Слепян Г. Я.* Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. М.: Изд. Московского университета, 1983.

[10] *Якубович В., Старжинский В.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.

Mathematical model of periodic waveguide systems with rectangular cross–section

A. N. Bogolyubov, A. I. Erokhin, V. M. Pikunov, M. I. Svetkin[a]

Department of mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia
E-mail: [a]*mihail-svetkin@mail.ru*

A mathematical model of an ideally conducting periodic waveguide system with piecewise constant rectangular cross–section is proposed. This type of geometry is finding application in the development of terahertz devices more often recently. The problem to solve is a system of Maxwell equations supplemented by metal boundary conditions and Floquet conditions on cross–sections spaced by one period of the structure. The solution of the problem is based on incomplete Galerkin's method and projection field conjunction in the region of cross–sections jumps. Direct use of this approach leads to matrix problems with ill–conditioned matrices due to simultaneous presence of exponentially increasing and decreasing matrix coefficients. In this context the method to be proposed additionally takes into account the directions of wave propagation in any regular section in the system, which makes it possible to eliminate exponentially increasing elements and make the matrices well-conditioned. Internal wave reflections occurring within the considering period of the system are taken into account explicitly. Based on the proposed model the dispersion characteristics of various structures are constructed. The convergence of the method to the limiting cases is investigated.

PACS: 02.70.Dh
Keywords: periodic waveguide, incomplete Galerkin method, Floquet conditions, terahertz range.
Received 30 June 2017.

Сведения об авторах

1. Боголюбов Александр Николаевич — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: e-mail: bogan7@yandex.ru.
2. Ерохин Александр Игоревич — канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник; e-mail: forlector@mail.ru.
3. Пикунов Виктор Михайлович — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: e-mail: vmpikunov@mail.ru.
4. Светкин Михаил Игоревич — аспирант; тел.: e-mail: mihail-svetkin@mail.ru.