

Точное решение гиперболического уравнения теплопроводности и уравнения типа Гюера–Крумхансля.

К. В. Жуковский*

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра теоретической физики*

Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Статья поступила 21.06.2017; Подписана в печать 23.06.2017)

Изучается распространения тепла в математической модели Гюера–Крумхансля. Получено точное аналитическое решение одномерного уравнения типа Гюера–Крумхансля. При этом используется операторный метод. С его помощью изучается распространение импульсов тепла различной формы в среде с учетом фононного и баллистического способов теплопередачи. Полученные результаты применены для моделирования распространения тепла в сверхтонких пленках с учетом влияния молекулярных эффектов в системе пониженной размерности. Моделируется распространение сверхкоротких лазерных тепловых импульсов и распространение изолированных тепловых волн с учетом числа Кнудсена, а также решение для периодической начальной функции. Исследуются точные решения вышеуказанных задач в модели тонких плёнок, обсуждается принцип максимума и положительность решений в контексте теплопроводности.

PACS: 02.30-й, 44.05+е, 41.85.Ja, 03.65.Db, 05.60.k.

УДК: 530.1, 536, 517.

Ключевые слова: уравнение Гюера–Крумхансля, теплопроводность, тонкие пленки, число Кнудсена, принцип максимума.

ВВЕДЕНИЕ

Развитие компьютерных методов в сочетании с техническим прогрессом в вычислительной технике в последние десятилетия значительно упростило решение многих математических задач. Для анализа математических моделей физических процессов широко применяются компьютерные методы. Однако для глубокого понимания происходящих физических явлений и соответствующего их объяснения часто необходимо получить и исследовать аналитические решения. Для этого используется весь аппарат математической физики. Одним из наиболее часто встречающихся в повседневной жизни законов физики является закон теплопроводности Фурье, который связывает изменение температуры с потоком тепла линейной зависимостью [1]. Эта модель хорошо описывает явление теплопроводности в однородных твердых недеформируемых телах при нормальных условиях. Однако закон Фурье действует не для всех материалов в особенности при низких температурах $< 15^\circ\text{K}$ и, как справедливо отмечено Л. Онсагером в 1931 г. [2], может рассматриваться только как «приближенное описание теплопроводности, которое пренебрегает временем, необходимым для ускорения потока тепла», так как он предполагает мгновенное нарастание потока тепла во всех точках одновременно. Наиболее значительное явление, выхо-

дящее за рамки закона Фурье, это так называемый второй звук [3], впервые обнаруженный в твердых кристаллах с помощью экспериментов по распространению тепловых импульсов [4–7]. Для описания этого явления был предложен фононный механизм теплопроводности и соответствующее уравнение Каттанео [8]: $(\tau \partial_t^2 + \partial_t)T = D_T \nabla^2 T$, где D_T — теплопроводность и τ — время релаксации. Не останавливаясь на подробностях теории, отметим только, что в рамках этой теории температурные колебания распространяются как затухающие волны в среде со скоростью $v_t = \sqrt{D_T/\tau}$. Модель Каттанео предполагает конечную скорость нарастания потока тепла, следующего за изменением температуры на границе области. Это запаздывание характеризуется временем τ после появления градиента температуры, которое в свою очередь отражает свойства среды и описывает временное соотношение между началом изменения температуры и реакцией потока тепла на это изменение. Время, необходимое для начала переноса тепла, ассоциируется с фононными взаимодействиями, которые переносят тепло, и является мерой тепловой инерции среды. Однако и модель Каттанео не лишена противоречий как физического, так и математического характера (см., например, [9–13]). Кроме того, уравнение Каттанео, качественно описывая второй звук, давало неверные значения для скорости распространения тепловой волны $\sqrt{D_T/\tau}$, которые расходились с экспериментальными данными по распространения импульсов тепла в сверхчистых неметаллических кристаллах Bi и NaF при низких температурах.

*E-mail: zhukovsk@physics.msu.ru

Наиболее распространенной моделью, заменившей модель Каттанео, является модель Гюера–Крумхансля [14], которая в одномерном случае сводится к соответствующему одномерному уравнению теплопроводности [15]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} - \delta \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2}\right) F(x, t) = \left(\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa^2\right) F(x, t),$$

$$\alpha, \varepsilon, \delta, \kappa = \text{const.} \tag{1}$$

Отметим, что в модели, предложенной Гюером и Крумханслем, предполагается $\kappa = 0$; линейное слагаемое $\kappa \neq 0$ означает наличие источников в уравнении (1). Роль этого слагаемого будет обсуждаться в дальнейшем. Не останавливаясь подробно на физических механизмах переноса тепла в модели Гюера–Крумхансля, отметим лишь, что она дополняет диффузию тепла Фурье и распространение тепловых волн ещё одной компонентой переноса тепла, которая действует на масштабах L , сравнимых со средней длиной свободного пробега фононов l [16, 17]. Действительно, теории Фурье [1] и Казимира [18] недостаточны для описания переноса тепла, который зависит не только от столкновений между фононами, но и от взаимодействия фононов на границе среды. Эти, так называемые баллистические условия, когда длина свободного пробега фононов сравнима с размером системы, в реальности наблюдаются в малоразмерных структурах, таких как сверхтонкие пленки и полосы графена, карбоновые нанотрубки, силиконовые волокна и др. [22–26]. Исследование баллистической теплопроводности в последнее время находится в центре внимания ученых и проводится в основном численными методами [19–26]. Понимание того, определяется ли перенос тепла баллистическими условиями или нет к каждому конкретному случаю важен с практической точки зрения, так как баллистическая фононная теплопередача требует оценки условий на границе среды и зависит от них, а не только свойств самой среды [17, 25, 27].

В то же время было показано, что уравнение Гюера–Крумхансля описывает теплопроводность также в макроскопических трехмерных объектах с сильной внутренней неоднородностью [28, 29]. Другие исследования [30–34] подтвердили, что теплопередача в сильно неоднородных средах при комнатной температуре не описывается законами Фурье и Каттанео, а скорее моделируется уравнениями типа Гюера–Крумхансля [19, 21, 28], несмотря на отсутствие собственно баллистических условий $l \approx L$. Похожие результаты получались и при исследовании распространения коротких импульсов тепла [35] при нормальной температуре в пористых материалах. Эти результаты затем рассматривались в более общем контексте в [36]. Таким образом, получение решений и исследование уравнения Гюера–Крумхансля представляет актуальную задачу с множеством практических приложений.

1. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА ГЮЕРА–КРУМХАНСЛЯ

Методы математической физики в сочетании с операторным подходом к решению дифференциальных уравнений [37–39] и преобразованиями Лапласа, позволяют получить точное аналитическое описание теплового поведения системы с учетом подобных эффектов при различных значениях её параметров. Для этого уравнение (1), ответственное за распространение тепла, удобно записать в следующем виде:

$$\left(\tau \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\right) F(x, t) = \left(k_b \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} + k_T \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu\right) F(x, t), \tag{2}$$

где $\tau = 1/\varepsilon$, $\mu = \kappa^2/\varepsilon$, $k_T = \alpha/\varepsilon$ — теплопроводность типа Фурье, а $k_b = \delta/\varepsilon$ — теплопроводность баллистического типа. Уравнение (5) является частным случаем более общего уравнения следующего типа

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \varepsilon(x) \frac{\partial}{\partial t}\right) F(x, t) = \hat{D}(x) F(x, t), \tag{3}$$

где $\hat{D}(x)$ — дифференциальный оператор, действующий на координату x . После преобразований Лапласа получаем частное решение уравнения (3)

$$F(x, t) \propto C e^{-\frac{t}{2} \varepsilon(x)} \frac{t}{4\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi \sqrt{\xi}} e^{-\frac{t^2}{16\xi}} e^{-\xi \varepsilon^2(x)} e^{-4\xi \hat{D}(x)} f(x), \tag{4}$$

при условии, что интеграл сходится, где $F(x, 0) = f(x)$ начальное условие, а C — константа, определяемая из другого начального или граничного условия. В частности, для оператора $\hat{D}(x) = \alpha \partial_x^2 + \kappa$ получаем частное решение телеграфного уравнения (ТУ):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\right) F(x, t) = \left(\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa\right) F(x, t),$$

$$\varepsilon, \alpha, \kappa = \text{const}, \tag{5}$$

которое также называется гиперболическим уравнением теплопроводности со свободным членом (см. (5)). Решение (4) уравнения (5), затухающее на полу-бесконечном отрезке времени при $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, \infty) = 0$, представляет собой одну из ветвей общего решения

$$F(x, t) = e^{-\frac{t\varepsilon}{2}} \left(e^{-\frac{t}{2} \sqrt{\varepsilon^2 + 4\hat{D}(x)}} C_1(x) + e^{\frac{t}{2} \sqrt{\varepsilon^2 + 4\hat{D}(x)}} C_2(x) \right), \tag{6}$$

где $\hat{D}(x) = \alpha \partial_x^2 + \kappa$ и $C_{1,2}(x)$ определяются из граничных условий. Ограниченное при $t \rightarrow \infty$ решение уравнения (1), (2) с начальным условием $F(x, 0) = f(x)$ можно получить операторным методом, следуя технике, развитой в [38, 39]; оно записывается следующим образом:

$$F(x, t) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t}}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi\sqrt{\xi}} e^{-\frac{t^2}{16\xi} - \xi(\varepsilon^2 + 4\kappa^2)} \times \int_{-\infty}^\infty e^{-\zeta^2} \hat{S}f(x) d\zeta, \quad (7)$$

$$\hat{S} = \exp \left\{ (t\delta/2 - 4\xi\alpha + 2\xi\varepsilon + i2\sqrt{\xi}\delta\zeta) \partial_x^2 \right\}.$$

Оператор теплопроводности \hat{S}

$$\hat{S} = \exp(\alpha t \partial_x^2) \quad (8)$$

даёт решение уравнения теплопроводности Фурье:

$$\partial_t F(x, t) = \alpha \partial_x^2 F(x, t) \quad (9)$$

с помощью преобразования Гаусса начального условия $F(x, 0) = f(x)$ (см. [37, 40]):

$$F(x, t) = \hat{S}f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t \alpha}} \int_{-\infty}^\infty \exp \left\{ -\frac{(x - \xi)^2}{4t\alpha} \right\} f(\xi) d\xi. \quad (10)$$

Так для начального распределения $f(x) = \exp(-x^2)$ получаем

$$\hat{S} \exp(-x^2) \equiv \exp(\alpha t \partial_x^2) \exp(-x^2) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\alpha t}} \exp \left(-\frac{x^2}{1 + 4\alpha t} \right), \quad (11)$$

а для δ -функции Дирака имеем:

$$\hat{S} \delta(x) \equiv \exp(\alpha t \partial_x^2) \delta(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \alpha t}} \exp \left(-\frac{x^2}{4\alpha t} \right). \quad (12)$$

Квантовомеханическим аналогом расширенного уравнения теплопроводности является прохождение заряда под потенциальным барьером. Например, динамика заряда под барьером в электростатическом поле описывается следующим уравнением:

$$\partial_t F(x, t) = \alpha \partial_x^2 F(x, t) + \beta x F(x, t) \quad (13)$$

с начальным условием $F(x, 0) = f(x)$ и представляет, по сути, переход к мнимому времени в уравнении Шрёдингера. Детали этого формализма и соответствующего ему Евклидова подхода в квантовой механике приведены, например, в [41]. Это важно также при исследовании вакуумных эффектов квантовой хромодинамики и описывает туннелирование частицы в области, где её энергия ниже, чем потенциальная энергия барьера. В термодинамической интерпретации уравнения (13) линейное слагаемое в нем моделирует излучение

в атмосферу через теплоизолирующую прокладку с линейно меняющейся по координате толщиной. Решение уравнения (13) сводится к последовательному преобразованию функции начального условия $F(x, 0) = f(x)$ операторами теплопроводности $\hat{S} = e^{\alpha t \partial_x^2}$ и сдвига $\hat{\Theta} f(x) \equiv e^{\eta(\partial_x + \alpha)} f(x) = e^{\eta \alpha} f(x + \eta)$:

$$F(x, t) = e^{\Phi(x, t; \alpha, \beta)} \hat{\Theta} \hat{S} f(x) = \frac{e^{\Phi(x, t; \alpha, \beta)}}{2\sqrt{\pi \alpha t}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x + \alpha \beta t^2 - \xi)^2}{4t\alpha}} f(\xi) d\xi, \quad (14)$$

где $\hat{\Theta} = e^{\alpha \beta t^2 \partial_x}$ и $\Phi(x, t; \alpha, \beta) = \alpha \beta^2 t^3 / 3 + \beta t x$. Квантовомеханическая интерпретация полученного решения уравнения Шрёдингера для частицы, диффундирующей под потенциальным барьером в электростатическом поле, представляет собой амплитуду вероятности того, что частица, находившаяся в начальный момент времени в исходной точке $x = 0$, через время t перейдёт в точку с координатой x . То же самое — с точностью до множителя, равного количеству диффундирующих частиц — относится к их концентрации, при условии, что взаимодействием частиц между собой можно пренебречь. Для произвольной функции начального условия f решение записывается в виде свертки этой функции с ядром χ :

$$F(x, t) = \int_{-\infty}^\infty \chi(x - \eta) f(\eta) d\eta \equiv \chi * f, \quad (15)$$

где ядро χ типа Гаусса является решением исходного уравнения с начальным условием в виде δ -функции Дирака $F(x, 0) = \delta(x)$:

$$\chi(x, t) \equiv F(x, t)|_{f=\delta(x)} = e^{\Phi} e^{-\frac{(x + \alpha \beta t^2)^2}{4t\alpha}} / 2\sqrt{\pi t \alpha}. \quad (16)$$

В контексте теплопроводности начальное условие $F(x, 0) = \delta(x)$ моделирует распространение мгновенного лазерного импульса. Эта экспериментальная техника является устоявшейся для определения теплопроводности веществ [42] и позволяет проводить чувствительные измерения, поэтому получение точных решений с $F(x, 0) = \delta(x)$ представляет большую практическую ценность.

Точное ограниченное на $t \rightarrow \infty$ решение уравнения типа Гюера–Крумхансля (1), (2) с начальным условием $f(x) = \delta(x)$ записывается следующим образом:

$$F(x, t)|_{f(x)=\delta(x)} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t}}{8\pi^{3/2}} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi\sqrt{\xi}} e^{-\frac{t^2}{16\xi} - \xi(\varepsilon^2 + 4\kappa^2)} \times \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-\zeta^2 - \frac{x^2}{4(a + i b \zeta)}} d\zeta}{\sqrt{|a + i b \zeta|}}, \quad (17)$$

где

$$a = t\delta/2 - 4\xi\alpha + 2\xi\varepsilon\delta, \quad b = 2\delta\sqrt{\xi}. \quad (18)$$

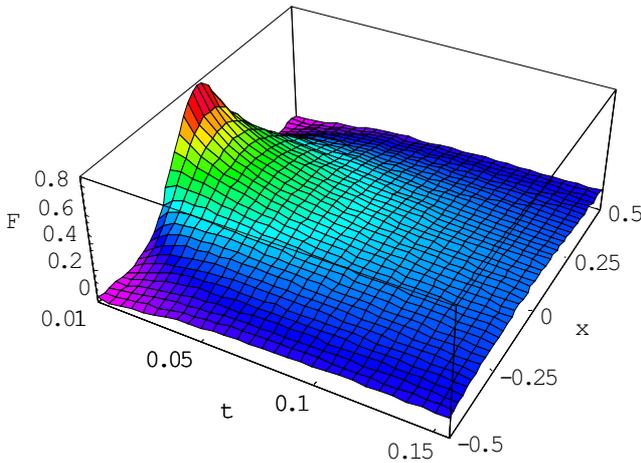


Рис. 1: Решение уравнения (1) типа Гюера-Крумхансля с начальной функцией $\delta(x)$ при $\alpha=\varepsilon=\delta=\kappa=1$

Пример решения (1), (2) с $f(x) = \delta(x)$ (см. (17)) приведен на рис. 1.

В случае если функция начального условия может быть аппроксимирована полиномом $f(x) = \sum_n x^n$, решение принимает следующий вид:

$$F(x, t)|_{f(x)=\sum_n x^n} = \sum_n \frac{e^{-\frac{t}{2}\varepsilon}}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi\sqrt{\xi}} e^{-\frac{t^2}{16\xi} - \xi(\varepsilon^2 + 4\kappa^2)} \times \int_{-\infty}^\infty e^{-\zeta^2} H_n(x, a + 2i\delta\zeta\sqrt{\xi}) d\zeta, \quad (19)$$

где $H_n(x, y)$ — полиномы Эрмита двух переменных [43, 44]:

$$H_n(x, y) = \exp\left(y \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) x^n = n! \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{x^{n-2r} y^r}{(n-2r)! r!}, \quad (20)$$

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!} H_n(x, y) = \exp(xt + yt^2).$$

Дальнейшее интегрирование в (19) с учетом (20) не представляет труда. Например, в простейшем случае $f(x) = x^2$ имеем

$$F(x, t)|_{f(x)=x^2} = e^{-\frac{t}{2}(\sqrt{V}+\varepsilon)} \left(x^2 + t\delta + \frac{t}{\sqrt{V}}(\delta\varepsilon - 2\alpha)\right), \quad (21)$$

$$V = \varepsilon^2 + 4\kappa^2.$$

Точное аналитическое решение в случае начальной функции $f(x) = x^n e^{\gamma x}$ можно получить, используя операторное тождество

$$\exp(y\partial_x^2)x^k e^{\alpha x} = e^{(\alpha x + \alpha^2 y)} H_k(x + 2\alpha y, y). \quad (22)$$

Тогда решение для произвольных $n \in \text{Integers}$, $\gamma \in \text{Reals}$ записывается в виде интеграла

$$F(x, t)|_{f(x)=e^{\gamma x} x^n} = \frac{e^{\frac{t}{2}(\gamma^2 \delta - \varepsilon) + \gamma x t}}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi\sqrt{\xi}} e^{-\frac{t^2}{16\xi} - \xi d} \times \int_{-\infty}^\infty e^{-\zeta^2 + ib\zeta\gamma^2} H_n(x + 2\gamma\nu, \nu) d\zeta, \quad (23)$$

где $\nu = a + ib\zeta$, $a = t\delta/2 - 4\xi\alpha + 2\xi\varepsilon\delta$, $b = 2\sqrt{\xi}\delta$, $d = \varepsilon^2 + 4\kappa^2 + 2\gamma^2(2\alpha - \varepsilon\delta)$. Результат интегрирования с учетом (20) очень громоздкий, хотя он и выражается в элементарных функциях. В простейшем случае, например $F(x, 0) = e^{-x}x$, имеем

$$F(x, t) = e^{-x+t(\delta-\varepsilon)/2} e^{-\frac{t}{2}\sqrt{q}} \times (x - \delta t + (2\alpha + \delta(\delta - \varepsilon))t/\sqrt{q}), \quad (24)$$

где $q = \varepsilon^2 + 4\kappa^2 + \delta^2 + 4\alpha - 2\varepsilon\delta$. В дальнейшем мы исследуем и другие примеры.

2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСОВ В УРАВНЕНИИ ГЮЕРА-КРУМХАНСЛЯ

Импульсная техника измерения теплопроводности является наиболее широко распространенной (см., например, [42]). В этом контексте встает вопрос о форме измеряемого импульса. Большинство экспериментальных исследований предполагает лазерный импульс, как наиболее доступный и легко повторяемый в различных условиях, или не придают особого значения форме импульса [35]. Выше мы написали точное аналитическое решение в элементарных функциях для экспоненциально-степенного импульса $F(x, 0) = x^n e^{\gamma x}$. Функция $f(x) = e^{\gamma x} x^n$ при $\gamma < 0$ уже описывает импульс, а ряд $f(x) = \sum_{n,\gamma} x^n e^{-\gamma x}$ позволяет моделировать очень широкий спектр импульсов от пологого до быстро нарастающего, в том числе асимметричной формы. На основе полученных выше точных решений исследуем распространение таких импульсов в среде при различных условиях и сравним с распространением мгновенного точечного импульса $f(x) = \delta(x, 0)$. Например, операторным методом легко получить затухающее на $t \rightarrow \infty$ точное аналитическое решение уравнения Гюера-Крумхансля для гладкой начальной функции $F(x, 0) = (|x| + 2)^2 e^{-|x|}$, $(\lim_{x \rightarrow 0} \{\partial_x F(x, 0)\}) = 0$, $(\lim_{x \rightarrow 0} \{\partial_x^2 F(x, 0)\}) = -2$ в следующем простом виде:

$$\begin{aligned}
 F(x, t) = & e^{-\sqrt{x^2} - \frac{1}{2}(\sqrt{r} - \delta + \varepsilon) \times} \\
 & \times \left((2 + \sqrt{x^2})^2 - t\delta (3 + 2\sqrt{x^2}) + \right. \\
 & \left. + 2(t\delta)^2 + \frac{8t\eta}{r^{3/2}} + \frac{4t^2\eta}{r} + \frac{t\rho}{\sqrt{r}} (3 + 2\sqrt{x^2} - 2t\delta) \right), \\
 & \rho = 2\alpha + \delta (\delta - \varepsilon), \\
 & \eta = \alpha^2 - \alpha\delta\varepsilon - (\delta\kappa)^2, \\
 & r = 4(\alpha + \kappa^2) + (\varepsilon - \delta)^2.
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что решение (25) удовлетворяет уравнениям (1), (2). Его поведение при $\alpha = \varepsilon = \delta = 1$ и $\kappa^2 = 0.1$ продемонстрировано на рис. 2. В этом случае вклады диффузии Фурье, фоновых волн Каттанео и баллистических эффектов в перенос тепла в уравнении (2) оказываются одного порядка: $\tau = k_T = k_b = 1$ и $\mu = +0.1$. На рис. 2 видно затухающее со временем решение уравнения с начальной функцией $F(x, 0) = (|x| + 2)^2 e^{-|x|}$, напоминающее решение для теплопроводности Фурье. Действительно, из самой структуры уравнения Гюера–Крумхансля следует, что при $\alpha/\delta = \varepsilon$ решение соответствующего уравнения Фурье является также решением (1) и (2) с $\kappa = 0$. В этом случае решение почти не отличается от показанного на рис. 2.

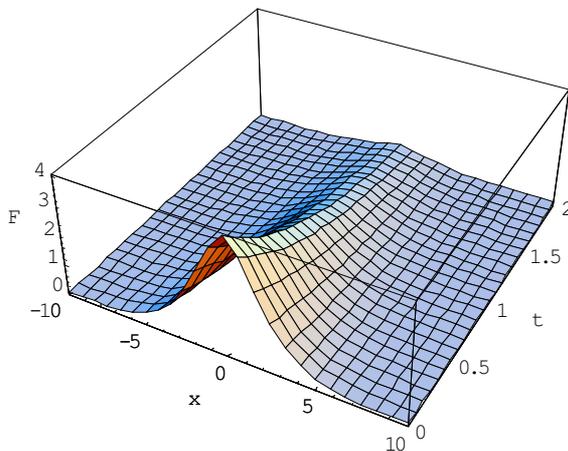


Рис. 2: Решение уравнения (1) с начальной функцией $F(x, 0) = (|x| + 2)^2 e^{-|x|}$ при равных друг другу вкладах компонент переноса тепла $\alpha = \varepsilon = \delta = 1$ с $\kappa^2 = 0.1$

При $\kappa^2 < 0$ решение медленно затухает как видно из рис. 3, где показана эволюция начальной функции при $\alpha = \varepsilon = \delta = 1$ и $\kappa^2 = -0.5$ ($\tau = k_T = k_b = 1$, $\mu = -0.5$). Отметим значительно большее время релаксации, изменение знака второй производной по времени, а также излом решения в точке $x = 0$ при $t > 0$ по сравнению с решением при $\kappa^2 = 0.5$ на рис. 2.

Отметим интересную особенность, а именно, решение уравнения Гюера–Крумхансля (формула (1)

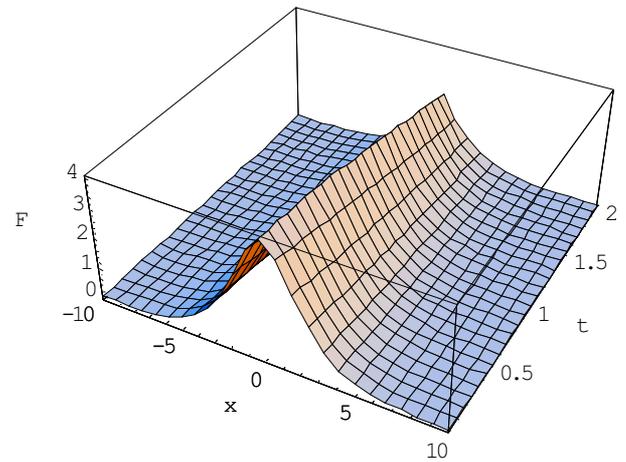


Рис. 3: Решение уравнения (1) с начальной функцией $F(x, 0) = (|x| + 2)^2 e^{-|x|}$ при равных друг другу вкладах компонент переноса тепла $\alpha = \varepsilon = \delta = 1$ и $\kappa^2 = -0.5$

с $\kappa = 0$) может принимать отрицательные значения при сравнимых друг с другом вкладах компонент переноса тепла Фурье — α , Каттанео — ε , и Гюера–Крумхансля — δ , что продемонстрировано на рис. 4 примером решения с $\alpha = \varepsilon = 5$, $\delta = 10$.

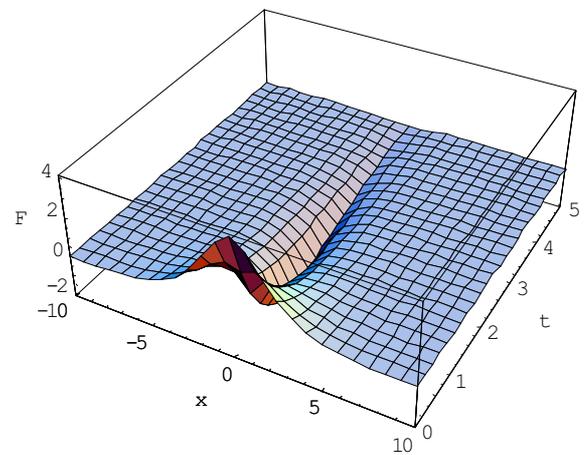


Рис. 4: Решение уравнения Гюера–Крумхансля ((1) с $\kappa = 0$) при сравнимых друг с другом вкладах компонента переноса тепла $\alpha = \varepsilon = 5$, $\delta = 10$ с начальной функцией $F(x, 0) = (|x| + 2)^2 e^{-|x|}$

Поведение полученного аналитического решения представляет особый интерес при условии доминирующей роли баллистических эффектов в переносе тепла. Пример решения уравнения Гюера–Крумхансля ((1) с $\kappa = 0$) с $\alpha = 1$, $\delta = 10$, $\varepsilon = 0.1$ с начальной функцией $F(x, 0) = (|x| + 2)^2 e^{-|x|}$ показан на рис. 5.

При таком выборе $\alpha/\delta = \varepsilon$ и наше решение удовлетворяет одновременно и уравнению теплопроводности Фурье, демонстрируя типичное Фурье поведе-

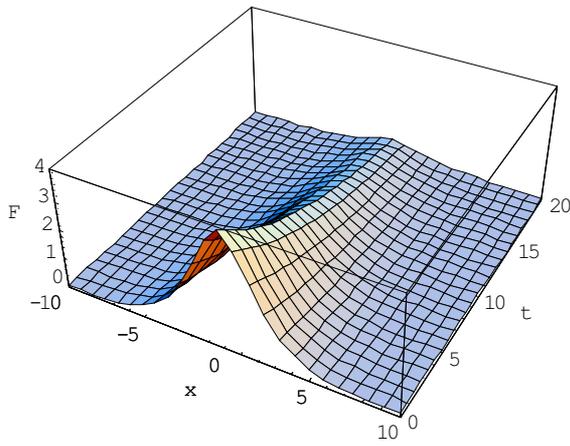


Рис. 5: Решение уравнения Гюера–Крумхансля ($\kappa = 0$) при доминирующем вкладе баллистических эффектов: $\delta = 10$, $\alpha = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $\alpha/\delta = \varepsilon$, с начальной функцией $F(x, 0) = (|x| + 2)^2 e^{-|x|}$

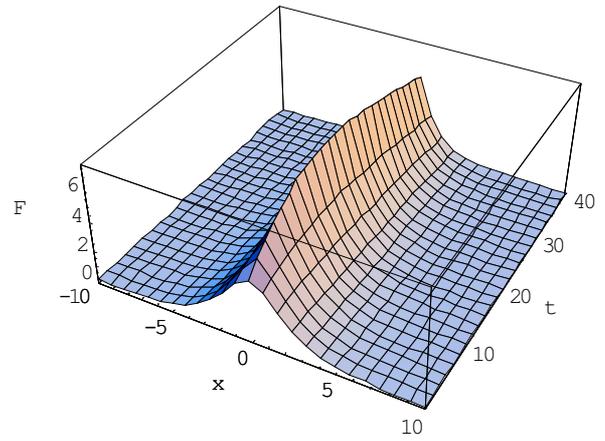


Рис. 6: Решение уравнения (1) с начальной функцией $F(x, 0) = (|x| + 2)^2 e^{-|x|}$ в сверх-диффузивном режиме с $\delta = 10$, $\alpha = \varepsilon = 1$, $\kappa^2 = -0.5$

ние (ср. рис. 5 и рис. 2). Характерное время затухания $\tau_{fade} \cong 20$ оказывается на порядок больше, чем в случае $\alpha = \varepsilon = \delta = 1$, где $\tau_{fade} \cong 2$ (ср. с рис. 2). При этом роль членов Каттанео и Фурье в уравнении мала. Отметим, что практически идентичное решение получается и для $\alpha = \varepsilon = 1$, $\delta = 10$, $\kappa^2 = -0.1$ (рисунок такой же, как рис. 5), однако, в этом случае $\delta \gg \alpha/\varepsilon$.

Необходимо отметить, что терминология, связанная с баллистическим переносом, оправдана, только если соответствующие условия $l \approx L$ могут быть реализованы. Поскольку уравнение Гюера–Крумхансля описывает также процессы в материалах с существенной неоднородностью при комнатной температуре, где не приходится говорить о выполнимости условия $l \approx L$, то соответствующий режим с $\delta > \alpha/\varepsilon$ более правильно называть сверх-диффузивным, следуя [29]. Например, при $\alpha = 1$, $\delta = 10$, $\varepsilon = 0.1$ имеем основной вклад в уравнение от члена Гюера–Крумхансля $\sim \delta$, но при этом $\alpha/\delta = \varepsilon$ и такой режим не является сверх-диффузивным. Поведение решения уравнений (1), (2) в сверх-диффузивном режиме при $\delta = 10$ и $\alpha = \varepsilon = 1$, $\kappa^2 = -0.5$ ($k_b = 10$, $\tau = k_T = 1$, $\mu = -0.5$) показано на рис. 6.

Отметим, что разница между характерным временем релаксации в сверх-диффузивном режиме и при одинаковых вкладах членов Каттанео, Фурье и Гюера–Крумхансля составляет более десятка раз (ср. рис. 6 с рис. 3 и рис. 5 с рис. 2). Кроме того, в некоторых случаях максимум решения достигается внутри рассматриваемой области, как на рис. 6, так что принцип максимума не выполняется! В сверх-диффузивном режиме при $\alpha = \varepsilon = 1$, $\delta = 10$, $\kappa^2 = 0.5$ ($\tau = k_T = 1$, $k_b = 10$, $\mu = +0.5$) (см. рис. 7) решение быстро убывает и становится отрицательным! Затем оно постепенно приближается к нулю со стороны отрицательных значений (см. рис. 7 и рис. 6).

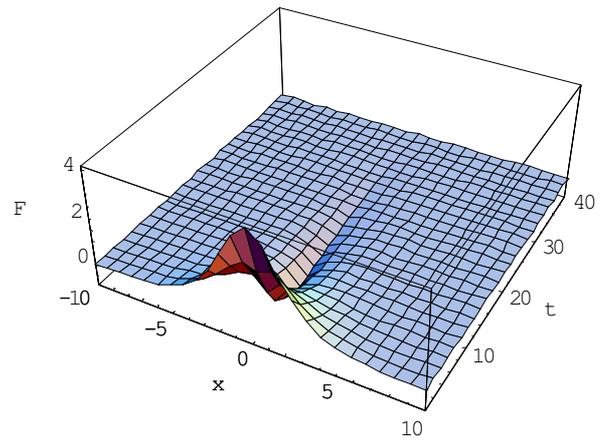


Рис. 7: Решение уравнения (1) с начальной функцией $F(x, 0) = (|x| + 2)^2 e^{-|x|}$ в сверх-диффузивном режиме с $\delta = 10$, $\alpha = \varepsilon = 1$, $\kappa^2 = 0.5$

Такое поведение решения радиально отличается от типичного поведения решения Фурье (ср. рис. 5). Минимум решения достигается внутри рассматриваемой области, а не на её границе; положительность решения не сохраняется! Решение уравнений (1), (2) в сверх-диффузивном режиме при относительно малых значениях члена Каттанео с $\alpha = \varepsilon = \delta = 10$, $\kappa^2 = \pm 1$ ($\tau = 0.1$, $\mu = \pm 0.1$, $k_b = k_T = 1$) не зависит от знака линейного слагаемого и показано на рис. 8.

Оно также проявляет характерное и отличное от теплопроводности Фурье поведение: решение быстро убывает и становится отрицательным, а затем приближается к нулю с отрицательных значений везде, кроме окрестности точки $x = 0$; здесь оно вновь становится положительным и затем убывает до нуля с положительных значений: $F(x \approx 0, t > 1.2) > 0$, $F(x, t \rightarrow$

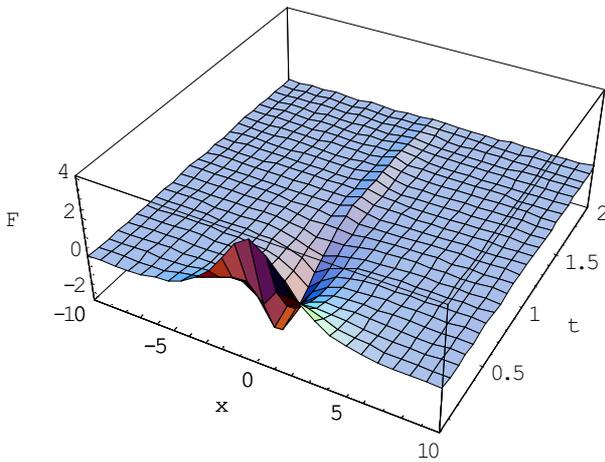


Рис. 8: Решение уравнения (1) с начальной функцией $F(x, 0) = (|x| + 2)^2 e^{-|x|}$ в сверх-диффузивном режиме при $\alpha = \varepsilon = \delta = 10, \kappa^2 = 1$

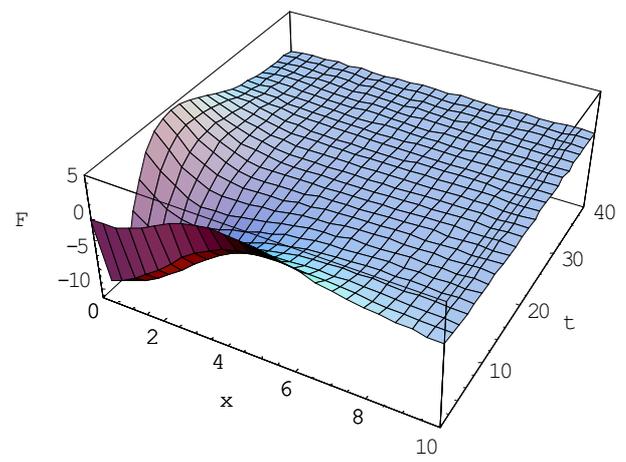


Рис. 9: Решение уравнения Гюера-Крумхансля с начальной функцией $F(x, 0) = x^4 e^{-x}$ при доминирующей роли баллистического члена : $k_b = 10, \tau = k_T = 1$ ($\alpha = \varepsilon = 1, \delta = 10$) и положительном значении линейного слагаемого $\mu = +0.5$ ($\kappa^2 = 0.5$)

$\infty) = 0$. Отметим, что минимум решения достигается внутри области и имеет отрицательные значения!

Итак, полученное точное ограниченное решение уравнений (1), (2) с $F(x, 0) = (|x| + 2)^2 e^{-|x|}$ в отдельных случаях достигает максимума и минимума внутри области $t \in [0, \infty], x \in [-L, L]$ (см. рис. 4, рис. 6, рис. 7 и рис. 8). Более того, решение (25) $F(x, t)$, эволюционируя от положительных начальных значений $f(x) > 0$, может оказаться отрицательным! Это возможно при любом соотношении членов Фурье, Каттанео и Гюера-Крумхансля в сверх-диффузивном режиме. При сравнимых друг с другом вкладах компонент переноса тепла это продемонстрировано на рис. 4, при доминирующем баллистическом слагаемом на рис. 7 и при относительно малых значениях члена Каттанео на рис. 8.

Такое нетипичное, отличающееся от Фурье поведение проявляют и решения уравнения Гюера-Крумхансля для других начальных функций. Например, для начальной функции $F(x, 0) = x^4 e^{-x}$ имеем решение, представленное на рис. 9 для $k_b = 10, \tau = k_T = 1$ и $\mu = +0.5$ ($\alpha = \varepsilon = 1, \delta = 10, \kappa^2 = +0.5$); на рис. 10 изображено решение при малых значениях параметра $\tau = 0.1, \mu = \pm 0.1$, и $k_b = k_T = 1$ ($\alpha = \varepsilon = \delta = 10, \kappa^2 = \pm 1$).

Таким образом, в этих примерах не соблюдается положительность решения и принцип максимума, который гласит, если $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности в области $R = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$, то максимум $u(x, t)$ в этой области достигается либо в начальный момент $t = 0$, либо на границе области на сторонах $x = 0$ или $x = l$. Математически это возможно, поскольку принцип максимума справедлив для эллиптических и параболических дифференциальных уравнений (слабый принцип максимума, касающийся периодических решений, устанавливает, что

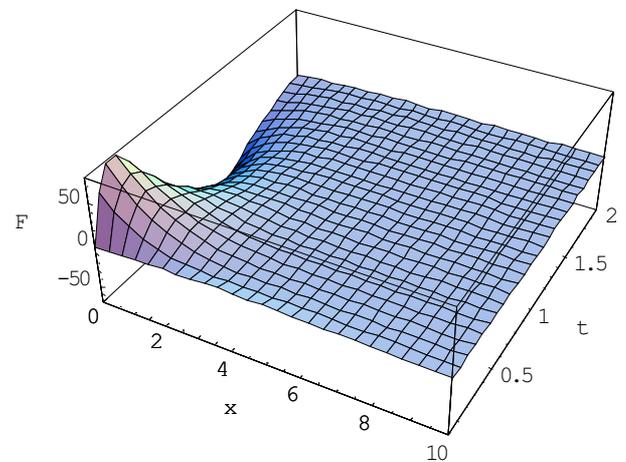


Рис. 10: Решение уравнения Гюера-Крумхансля с начальной функцией $F(x, 0) = x^4 e^{-x}$ при малых значениях параметров $\tau = 0.1, \mu = +0.1$ и $k_b = k_T = 1$ ($\alpha = \varepsilon = \delta = 10, \kappa^2 = +1$)

максимум достигается на границе, но может повторно достигаться внутри области). С физической точки зрения принцип максимума в контексте теплопроводности непосредственно связан со вторым законом термодинамики и устанавливает, что тепло естественно течет от горячего к холодному. Напомним, что принцип максимума обеспечивает единственность и стабильность решений.

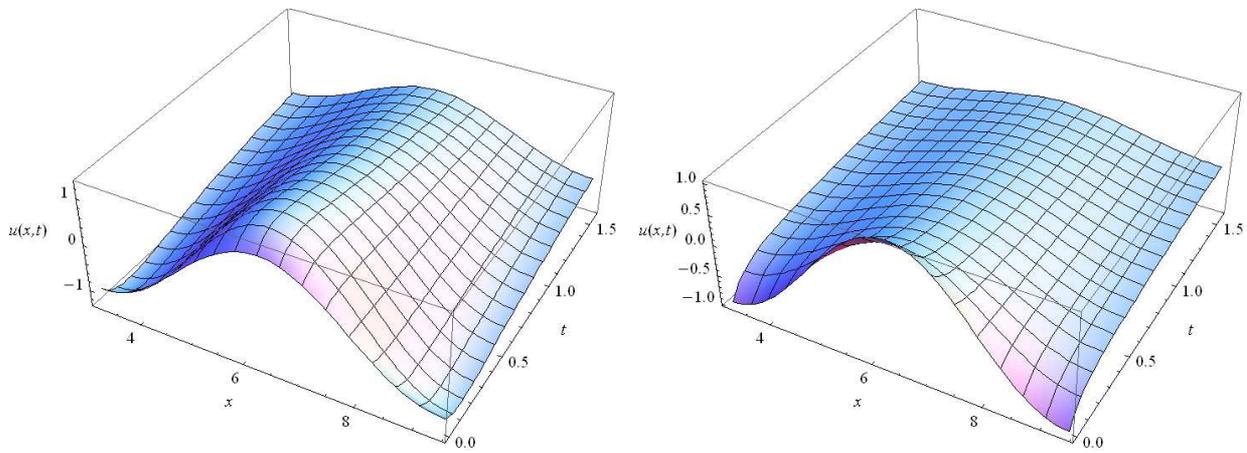


Рис. 11: Действительная часть решения $\text{Re}[F(x, t)]$ ТУ с $\alpha = 7, \kappa = -0.5, \varepsilon = 11, n = 1$ с начальными условиями $F|_{t=0} = e^{inx}$ и при $\partial F/\partial t|_{t=0} = 5e^{inx}$ слева, а с $\partial F/\partial t|_{t=0} = -5e^{inx}$ справа

3. ГАРМОНИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим эволюцию гармонической функции e^{inx} в уравнении (5). Это представляет интерес как для электротехники так и для любой функции, разложимой в ряд Фурье. Действие оператора $e^{t\partial_x^2}$ изучалось в [37–39]; экспоненциальный дифференциальный оператор $e^{\hat{D}(x)}$ не добавляет новых гармоник к имеющимся на $t = 0$. Рассмотрим следующие начальные условия:

$$F(x, t)|_{t=0} = Ge^{inx}, \quad \partial F(x, t)/\partial t|_{t=0} = Be^{inx}. \quad (26)$$

По аналогии с [39], получаем из (6) следующее решение телеграфного уравнения (5):

$$F(x, t)|_{F(x) \propto e^{inx}} = B_1 e^{inx - \frac{t}{2}(\varepsilon + \sqrt{V})} + B_2 e^{inx - \frac{t}{2}(\varepsilon - \sqrt{V})}, \quad V = \varepsilon^2 + 4(\kappa - \alpha n^2), \quad (27)$$

где коэффициенты B_1, B_2 выражаются через начальные условия при $t = 0$: $B_1 + B_2 = G$ и $B_1(\varepsilon + \sqrt{V}) + B_2(\varepsilon - \sqrt{V}) = -2B$. Отсюда немедленно получаем:

$$B_1 = \frac{-2B + G(-\varepsilon + \sqrt{V})}{2\sqrt{V}}, \quad B_2 = \frac{2B + G(\varepsilon + \sqrt{V})}{2\sqrt{V}}. \quad (28)$$

Справедливость полученного решения проверяется прямой подстановкой в уравнение (5) с начальными условиями (26). Очевидно, что в зависимости от значений параметров $\alpha, \varepsilon, \kappa$, и граничных условий, значение V , зависящее от n , может быть меньше нуля, и коэффициенты B_1, B_2 легко могут оказаться комплексными. Примеры решения телеграфного уравнения с начальными условиями $F|_{t=0} = e^{inx}$ и $\partial F/\partial t|_{t=0} = \pm 5e^{inx}$ показаны на рис. 11.

В рассмотренном примере решения ТУ с $\alpha = 7, \kappa = -0.5, \varepsilon = 11, n = 1, B = 1$, имеем $V = 91$ и для $G = 5$

$$F = -0.600699e^{-10.2697t+ix} + 1.6007e^{-0.730304t+ix}$$

(см. рис. 11 слева), а для $G = -5$, имеем

$$F = 0.447586e^{-10.2697t+ix} + 0.552414e^{-0.730304t+ix}$$

(см. рис. 11 справа). В случае с положительной производной в начальном условии на рис. 11 слева, принцип максимума, согласно которому решение $u(x, t)$ уравнения теплопроводности в области $R = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ достигает максимального значения либо в начальный момент времени, либо на границе области при $x = 0$ или при $x = 1$, нарушен, так как максимум достигается внутри области. В случае с $G = 0$ (рисунок не приводим) или с $G = -5$ в начальном условии, как на рис. 11 справа, принцип максимума выполняется.

Однако, отрицательность производной в начальном условии сама по себе не гарантирует выполнение принципа максимума. Так, при тех же значениях коэффициентов в телеграфном уравнении, при $B = 1$ и при $G = -30$ имеем для $n = 2$ значение $V = 7$ и сама функция имеет вид

$$F = e^{2ix} (9.76013 e^{-6.82288t} - 8.76013 e^{-4.17712t}),$$

представленный на рис. 12 слева. Как видно из графика на рис. 12 слева, в этом случае максимальное значение достигается внутри области и принцип максимума тоже не выполняется несмотря на отрицательность производной в начальный момент. В контексте переноса тепла это не соответствует второму закону термодинамики, но с математической точки зрения это возможно, так как принцип максимума установлен для эллиптических и параболических уравнений, а телеграфное уравнение является гиперболическим уравнением.

Для комплексных начальных значений $B = 1$ и $G = 30i$ имеем функцию

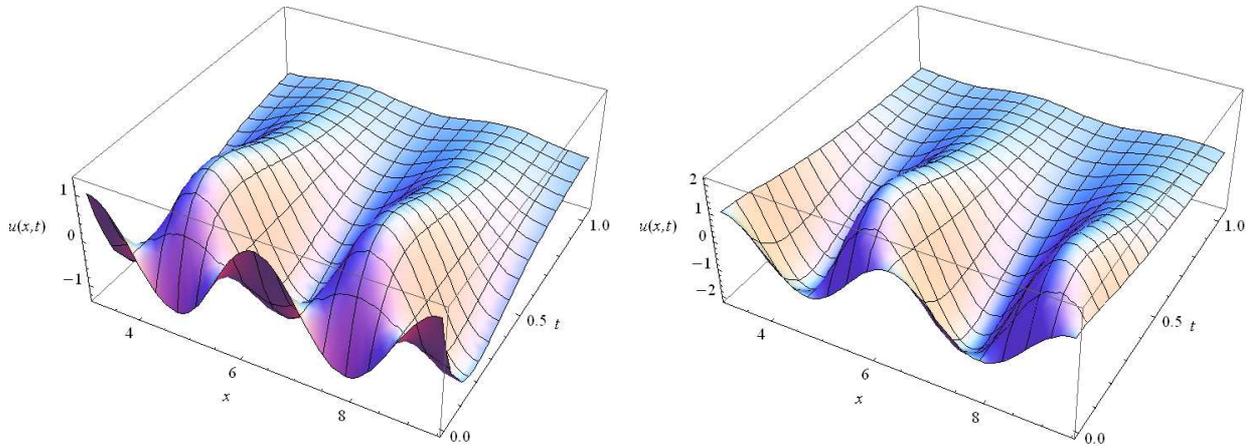


Рис. 12: Действительная часть решения $Re[F(x, t)]$ ТУ с $\alpha = 7, \kappa = -0.5, \varepsilon = 11, n = 1$ с начальными условиями $F|_{t=0} = e^{inx}, \partial F/\partial t|_{t=0} = -30e^{inx}$ слева и $\partial F/\partial t|_{t=0} = 30e^{inx}$ справа

$$F = e^{2ix} \left(-(1.5788 + 11.3389i)e^{-6.82288t} + (2.5788 + 11.3389i)e^{-4.17712t} \right),$$

представленную на рис. 12 справа. При этом принцип максимума также не выполнен, однако, в контексте электротехники отмеченное нарушение принципа максимума не представляет проблемы.

Действительная часть решения ТУ с $\alpha = 0.5, \kappa = -0.2, \varepsilon = 2$ с граничными условиями $F(x, 0) = e^{inx}, F(x, \pi/4) = 0.5e^{inx}$ для гармоник с $n \geq 3$ имеет локальный максимум внутри области, как видно на рис. 13 слева, где приведен пример с $n = 4$; в этом случае имеем $V = -28.8$ и

$$F = (0.5 + 0.935448i)e^{(-1-2.68328i)t+4ix} + (0.5 - 0.935448i)e^{(-1+2.68328i)t+4ix}.$$

Другой пример решения ТУ с $\alpha = 7, \kappa = -0.5, \varepsilon = 11,$ с граничными условиями $F(x, 0) = e^{inx}, F(x, \pi/4) = 0.5e^{inx}$ для $n = 2$ показан на рис. 13 справа; при этом $V = 7,$ а само решение имеет вид

$$F = -14.057e^{-6.82288t+2ix} + 15.057e^{-4.17712t+2ix}.$$

Очевидно, что в этом случае также не выполняется принцип максимума, согласно которому решение $u(x, t)$ уравнения теплопроводности в области $R = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ достигает максимального значения либо в начальный момент времени, либо на границе области, $x = 0,$ или $x = 1.$ Например, в случае на рис. 13 справа максимум достигается внутри области $\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2, 0 \leq t \leq \pi/4\},$ а не на границе и не при $t = 0.$ Модель теплопередачи гиперболического типа Каттанео в том или ином виде используется исследователями для описания переноса тепла, но содержит противоречия как физического, так и математического характера (см., например, [9, 13]).

4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГЮЕРА–КРУМХАНСЛЯ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ И ЕГО СВЯЗЬ С РЕШЕНИЕМ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ

В последнее время большое внимание уделяется исследованиям передачи тепла не подчиняющейся закону Фурье, что стимулируется многочисленными практическими приложениями. Точные частные аналитические решения уравнений теплопроводности гиперболического типа были получены, например, в [45–47]. Отметим следующую интересную особенность решения гиперболического уравнения теплопроводности для гармонической функции $e^{inx}.$ Произведём замену $\varepsilon \rightarrow \varepsilon + n^2\delta,$ где $\delta > 0, \varepsilon > 0,$ в уравнении (5). Тогда решение (27) телеграфного уравнения (5) принимает следующий вид:

$$F(x, t)|_{F(x) \propto e^{inx}} = C_1 e^{inx - \frac{1}{2}(\varepsilon + n^2\delta + \sqrt{U})t} + C_2 e^{inx - \frac{1}{2}(\varepsilon + n^2\delta - \sqrt{U})t}, \quad (29)$$

$$U = (\varepsilon + n^2\delta)^2 + 4(\kappa - \alpha n^2),$$

где C_1, C_2 определяются из начальных условий. Легко убедиться, что решение (29) удовлетворяет также и следующему уравнению:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} - \delta \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} \right) F(x, t) = \left(\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa \right) F(x, t), \quad (30)$$

$$\alpha, \varepsilon, \delta, \kappa = \text{const},$$

которое при $\kappa = 0$ представляет собой уравнение, полученное Гюйером и Крумханслем [15] при решении линеаризованного уравнения Больцмана для фононов в одномерном случае. Мы учтём также постоянное слагаемое κ для общности. В контексте передачи тепла

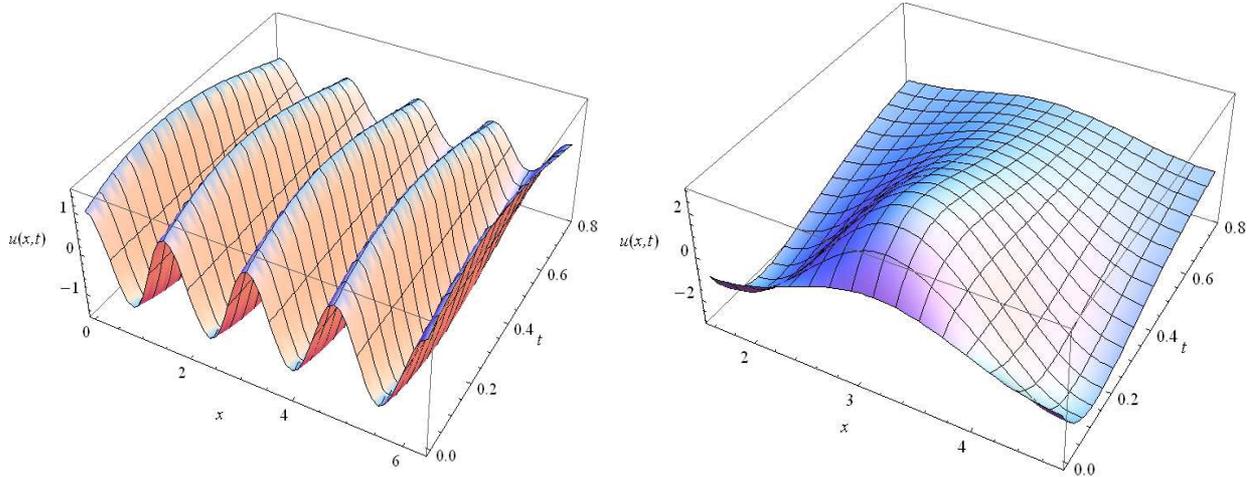


Рис. 13: Действительная часть решения $Re[F(x, t)]$ ТУ с начальными условиями $F(x, 0) = e^{inx}$, $F(x, \pi/4) = 0.5e^{inx}$ для $\alpha = 0.5$, $\kappa = -0.2$, $\varepsilon = 2$ и $n = 4$ слева, и $\alpha = 7$, $\kappa = -0.5$, $\varepsilon = 11$, для $n = 2$ справа

уравнение (1) чаще записывают в следующем виде:

$$\left(\tau \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\right) F(x, t) = \left(k_b \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} + k_T \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu\right) F(x, t), \quad (31)$$

где $\tau = 1/\varepsilon$, $\mu = \kappa/\varepsilon$, $k_T = \alpha/\varepsilon$ — теплопроводность Фурье, а $k_b = \delta/\varepsilon$ ассоциируют с баллистическими эффектами. Такое уравнение возникает при исследовании передачи тепла в малоразмерных объектах, например, в тонких пленках, нановолокнах, веществах с существенной внутренней неоднородностью и др., где характерный размер системы сравним или меньше, чем длина свободного пробега фононов, ответственных за перенос тепла в моделях Каттанео и Гюйера–Крумхансля [16]. Баллистический механизм теплопередачи дополняет тепловые волна в модели Каттанео и действует, когда характерный масштаб системы L сравним или меньше, чем длина свободного пробега l фононов, ответственных за волновой перенос тепла, как, например, в модели Гюйера–Крумхансля. Подобные баллистические условия реализуются также для электронов, и свойственны графену, карбоновым нанотрубкам, силиконовым нанопроводам и др. системам, где характерный масштаб меньше длины свободного пробега $L < l$. При этом для баллистического механизма теплообмена играют значительную роль условия на границе среды, а не внутри неё, как при диффузии или волновом процессе.

Таким образом, решение (29) расширенного уравнения Гюйера–Крумхансля (УГК) (1), (2) с $\kappa \neq 0$ для гармонической функции e^{inx} является в то же время решением гиперболического уравнения теплопроводности (5) с коэффициентом при первой производной по времени, зависящим от номера гармоники

и равным $\varepsilon + n^2\delta$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\varepsilon + n^2\delta) \frac{\partial}{\partial t}\right) F(x, t) = \left(\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa\right) F(x, t). \quad (32)$$

Так как для гармонической функции e^{inx} и одинаковых значений коэффициентов $\alpha, \varepsilon, \kappa, \delta$ в уравнениях (1) и (32), последние имеют одинаковое решение (29), то можно заключить, что для функции, разложимой в ряд $\phi(x) = \sum_n c_n e^{inx}$, решение уравнений (1) и (32) будет также одинаковым и представляется в виде ряда $\Phi = \sum_n c_n F(x, t)$, где $F(x, t)$ — решение (29). В этом смысле для гармонической функции уравнение Гюйера–Крумхансля (2) с $\mu = 0$ (или (1) с $\kappa = 0$) представляет собой уравнение Каттанео с зависимым от номера гармоники коэффициентом при $\partial/\partial t$: $(\varepsilon + n^2\delta)\partial/\partial t$. Таким образом, с учётом вышесказанного решение уравнения Гюйера–Крумхансля (1) с начальными условиями (26) записывается в виде (29), где

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{2B + G(m^2\delta + \varepsilon - \sqrt{U})}{2\sqrt{U}}, \\ C_2 &= \frac{2B + G(m^2\delta + \varepsilon + \sqrt{U})}{2\sqrt{U}}, \end{aligned} \quad (33)$$

где U определено в (29), а B и G заданы в начальных условиях $F(x, t)|_{t=0} = Ge^{inx}$, $\partial F/\partial t|_{t=0} = Be^{inx}$ при $t = 0$. Приведём пример решения уравнения Гюйера–Крумхансля с различными значениями коэффициентов в нём. Вначале рассмотрим те же значения коэффициентов $\alpha = 7$, $\kappa = -0.5$, $\varepsilon = 11$, и те же начальные условия $F|_{t=0} = e^{inx}$, $\partial F/\partial t|_{t=0} = -30e^{inx}$, что и в рассмотренном ранее случае с ТУ (рис. 12 слева), но положим $\delta = 2$ и $\delta = 6$ (см. рис. 14 слева и справа соответственно).

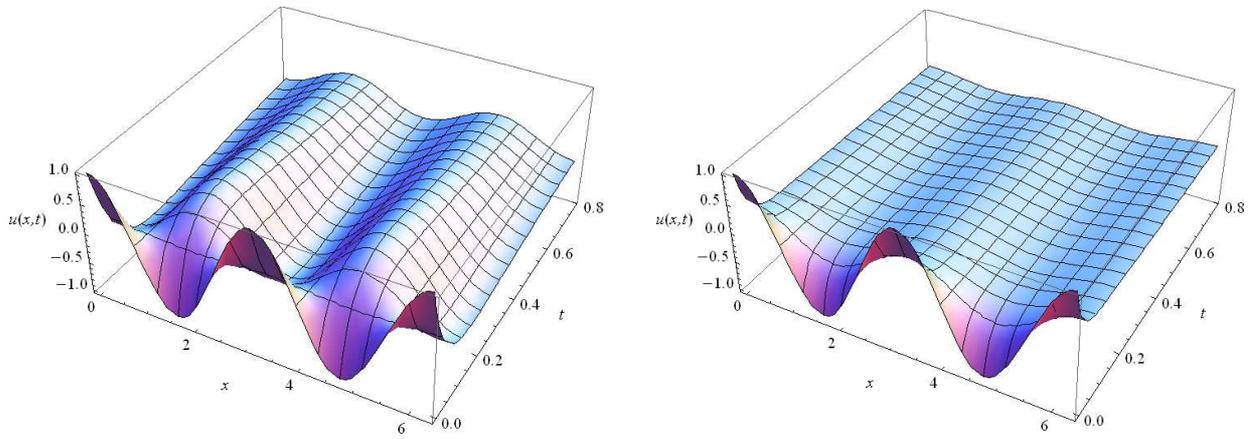


Рис. 14: Действительная часть решения $Re[F(x, t)]$ УГК с $\alpha = 7, \kappa = -0.5, \varepsilon = 11, F|_{t=0} = e^{inx}, \partial F/\partial t|_{t=0} = -30e^{inx}, n = 2$ для $\delta = 2$ слева и для $\delta = 6$ справа

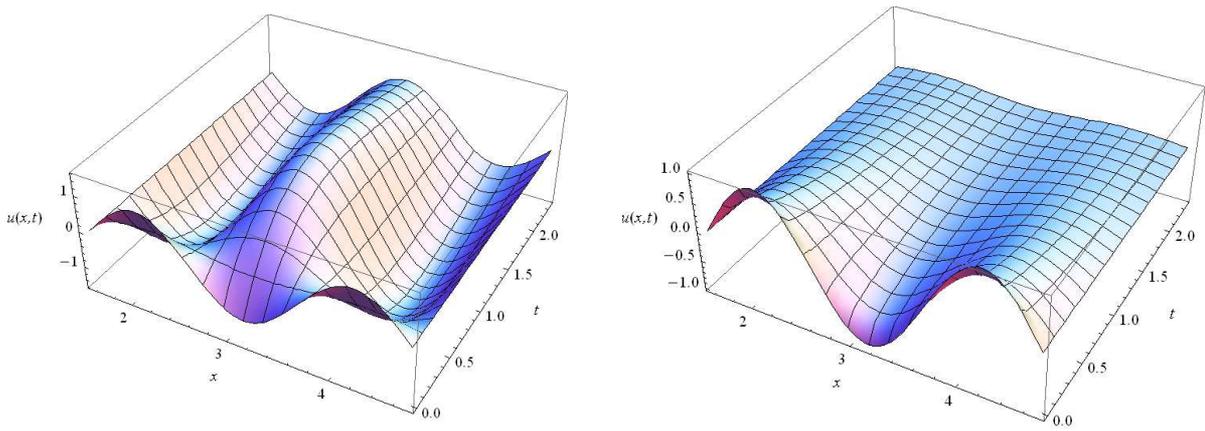


Рис. 15: Эволюция гармонического решения для $\theta_b(x, t)$ в тонкой плёнке с начальными условиями $\theta_b(x, 0) = e^{i3x}, \partial\theta_b/\partial t(x, 0) = -7e^{i3x}$ в уравнении (35) при $Kn = 0.1$ слева и $Kn = 1$ справа

Сравним решение УГК на рис. 14 с решением ТУ (рис. 12 слева). Видим, что с увеличением значения $\delta > 0.5$, например, для $\delta = 2$ и $\delta = 6$ восстанавливается ожидаемое для теплопроводности физическое поведение решения, как показано на рис. 14 слева и справа соответственно. Максимум достигается в начале при $t = 0$ и выполняется принцип максимума. Таким образом, дополнительный баллистический член с δ кардинально меняет поведение решения. Для телеграфного уравнения в результате сложения волн легко реализуются локальные максимумы, которые в уравнения Гюера–Крумхансля подавляются дополнительным демпфирующим членом δ . Увеличение значения коэффициента δ приводит к более быстрому затуханию начальной функции и увеличивает эффективную теплопередачу.

Операторным методом легко получить точное ограниченное решение уравнения типа Гюера–Крумхансля (1), (2) с начальной гармонической функцией $f(x) = \exp(inx)$:

$$F(x, t)|_{f(x)=\exp(inx)} = \exp\left(inx - \frac{t}{2}(\varepsilon + n^2\delta + \sqrt{U})\right),$$

$$U = \varepsilon^2 + 4(\kappa^2 - \alpha n^2) + 2n^2\varepsilon\delta + n^4\delta^2. \tag{34}$$

Ниже мы исследуем поведение полученных выше решений при различных значениях параметров уравнения Гюера–Крумхансля. Отметим, что в операторном виде полученные решения представляют проинтегрированное взвешенное действие оператора теплопроводности \hat{S} на функцию начального условия с экспоненциально-степенным ядром.

5. ВЛИЯНИЕ БАЛЛИСТИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ НА ПЕРЕДАЧУ ТЕПЛА В МОДЕЛИ ГЮЕРА–КРУМХАНСЛЯ

При исследовании теплопроводности в тонких плёнках встречается следующее уравнение типа Гюера–

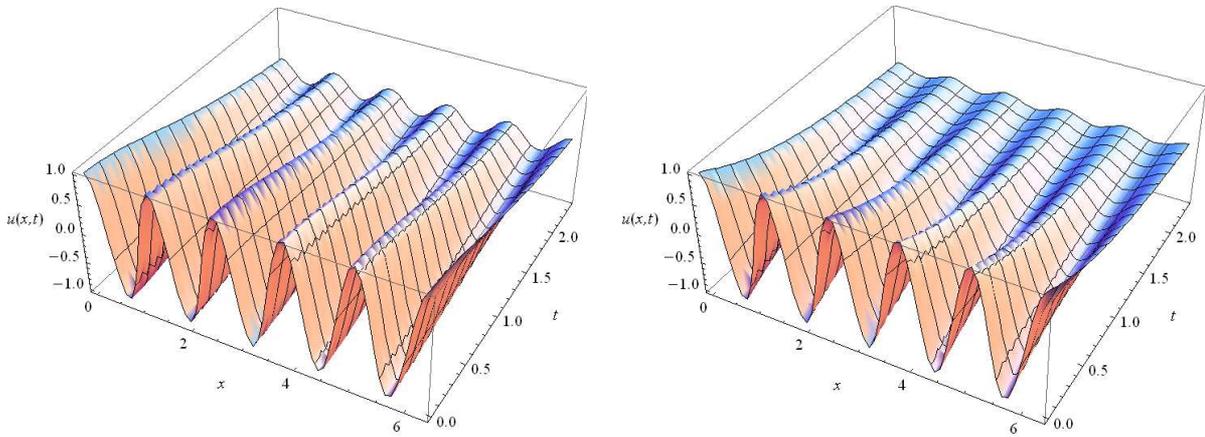


Рис. 16: Распространение гармоники $\theta_b(x, t)$ с начальными условиями $\theta_b(x, 0) = e^{i5x}$, $\partial\theta_{bt}(x, 0) = 0$ для в тонкой плёнке в уравнении (35) при $Kn = 0.1$ слева и $Kn = 1$ справа

Крумхансля (см. [16], ср. (2)):

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t} + 2 \frac{\partial}{\partial t} - \frac{10Kn^2}{3} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 3Kn^2 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} + 1 \right\} \times \theta_b(x, t) = 0, \quad (35)$$

где $\theta_b = F(x, t)$ — баллистическая компонента безразмерной энергии или квази температуры (см. [16]), и Kn — число Кнудсена, которое является безразмерной величиной; оно равно отношению средней длины свободного пробега к характерному физическому масштабу: $Kn = \lambda/L$, и оно часто используется при анализе динамики потоков, в частности для проскальзывающего вдоль стенок микроканала потока [48]. В нашем случае число Кнудсена характеризует условия для баллистического переноса тепла. Отметим, что для величины числа Кнудсена $Kn = 1$ имеем следующие значения коэффициентов: $\alpha = 3.333$, $\delta = 3$, $\varepsilon = 2$, $\kappa^2 = -1$, или $k_T = 5/3$, $k_b = 3/2$, $\tau = 1/2$, $\mu = -1/2$. Для $Kn = 0.1$ получаем $\alpha = 0.03333$, $\delta = 0.03$, $\varepsilon = 2$, $\kappa^2 = -1$, или $k_T = 0.01666$, $k_b = 0.015$, $\tau = 1/2$, $\mu = -1/2$. Это означает, что при $Kn = 1$ вклад всех механизмов переноса тепла в УГК примерно равен друг другу, а при $Kn = 0.1$ теплопроводность k_T и баллистическое слагаемое на два порядка меньше чем члены Каттанео, Фурье и линейное слагаемое. Рассмотрим эти два случая эволюции гармонической функции, а именно, с $Kn = 1$, т.е. $\lambda = L$, где L — толщина пленки, и с $Kn = 0.1$, с граничными условиями (26), где

$$F(x, 0) = e^{i3x}, \quad \partial F_t(x, 0) = -7e^{i3x} \quad (36)$$

Действительная часть $Re[F(x, t)]$ решения (29) с коэффициентами (33) для уравнения типа Гюера–Крумхансля (35) с условиями (36) для $n = 3$ показана для значений $Kn = 0.1$ и $Kn = 1$ на рис.15 соответственно слева и справа. При их сравнении видно, что для малого значения числа Кнудсена $Kn = 0.1$ (см. рис. 15 слева) решение похоже на то, что получается для телеграфного уравнения; оно достигает максимума внутри области, и не выполняется принцип

максимума. В случае когда баллистические эффекты играют существенную роль и $Kn = 1$ (см. рис. 15 справа), видна быстрая релаксация решения. При этом выполняется принцип максимума и восстанавливается соответствующее второму закону термодинамики поведение системы с распределением температуры, стремящимся к однородному.

Теперь рассмотрим распространение гармоник в зависимости от значения числа Кнудсена в случае затухающего решения когда выполняется принцип максимума. Рассмотрим начальную функцию $F(x, 0) = e^{i5x}$ и её производную $\partial F_t(x, 0) = 0$. При малом значении числа Кнудсена $Kn = 0.1$, т.е. когда толщина пленки значительно больше длины свободного пробега, имеем относительно медленно затухающее со временем решение на рис. 16 слева. При $Kn = 1$, т.е. в очень тонкой пленке, имеем решение на рис. 16 справа, которое затухает заметно быстрее чем на рис. 16 слева, что соответствует лучшей эффективной теплопередаче.

Сравнительный анализ решений на рис. 15, 16 показывает, что число Кнудсена оказывает очень значительное влияние на распространение тепла в тонких пленках. Баллистические эффекты в тонких плёнках демпфируют тепловые волны Каттанео и восстанавливают соответствующее второму закону термодинамики поведение системы.

При большем значении числа Кнудсена теплопроводность для баллистической компоненты значительно улучшается, в особенности для высших гармоник. Характерное время затухания для $n = 1$ слабо убывает при увеличении числа Кнудсена > 0.1 (соответствующий график не приводим), а для $n = 5$ соответствующие времена релаксации равны $\tau_{fade} \sim 1$ при $Kn = 1$ и $\tau_{fade} \sim 2$ при $Kn = 0.1$. Лучшая теплопроводность при $Kn = 1$ чем при $Kn = 0.1$ очевидна в особенности для высших гармоник: для $n = 5$ характерное время τ при $Kn = 1$ в ~ 2 раз меньше, чем при $Kn = 0.1$: $\tau_{fade Kn=0.1} / \tau_{fade Kn=1} \approx 2$. При $Kn = 1$ релаксация пятой гармоники происходит значительно быстрее, чем

первой, а при $Kn = 0.1$ релаксация пятой гармоники происходит почти такое же, как первой.

На основании этого можно предположить, что баллистические условия будут оказывать более значительное влияние на эффективную теплопроводность для начальной функции, в разложении которой в ряд Фурье присутствует большее содержание высших гармоник. Напротив, начальная функция с малым содержанием высших гармоник, по-видимому, будет нечувствительна к баллистическим условиям.

В решении (29) уравнения типа Гюера–Крумхансля (1), (2), (35) для эволюции гармонической функции или же его аналога — телеграфного уравнения с $\varepsilon \rightarrow \varepsilon + n^2\delta$ (32) — высшие гармоники затухают быстрее, чем основной тон $n = 1$; время релаксации для высших гармоник уменьшается с возрастанием номера гармоники (см. также [47]), а эффективная теплопроводность увеличивается.

6. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСОВ В УРАВНИИ ГЮЕРА–КРУМХАНСЛЯ В МОДЕЛИ ТОНКИХ ПЛЁНОК

Из полученных нами выше точных аналитических выражений (23), (19) легко написать решение, например, для начальной функции $f(x) = x^4 e^{-x}$; для краткости мы опустим громоздкое выражение в элементарных функциях и приведем его графическое представление при значении числа Кнудсена $Kn = 1$ на рис. 17. Удивительно, но при $Kn = 0.1$ решение мало отличается от изображенного на рис. 17. Значение решения при $Kn = 0.1$ превосходит значения при $Kn = 1$ только на несколько процентов: например, $F(x = 5, t = 1, Kn = 1) = 1.40998$ и $F(x = 5, t = 1, Kn = 0.1) = 1.52888$, поэтому мы не приводим рисунок при $Kn = 0.1$.

Из вышесказанного заключаем, что плавно меняющийся в пространстве тепловой импульс в модели типа Гюера–Крумхансля для тонких пленок слабо чувствителен к баллистическим условиям и его распространение лишь незначительно улучшается при больших значениях числа Кнудсена. Это согласуется с выводами проведенного нами выше исследования распространения гармоник.

Теперь проанализируем распространением мгновенного точечного импульса $\delta(x)$ в тонкой пленке, решая уравнение (35) при значениях числа Кнудсена $Kn = 1$ и $Kn = 0.1$. Воспользуемся полученным аналитическим выражением (17). Графическое представление решений при $t = 10^{-3}$ дано на рис. 18; сравнение с решениями при $t = 0.08$ продемонстрировано на рис. 19. Из рис. 18 и 19 очевидно, что решения для эволюции начального точечного импульса $f(x) = \delta(x)$ принимают отрицательные значения! Сравнение графиков на рис. 19 с рис. 18 выявляет и другие интересные особенности. В первую очередь, это значительно более быстрое распространение теплового импульса при

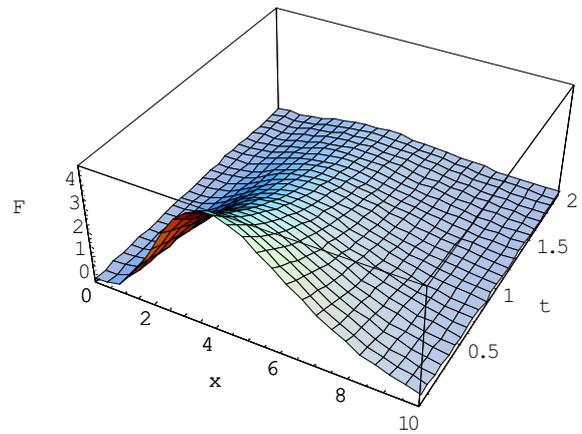


Рис. 17: Распространение плавной тепловой волны $f(x) = x^4 e^{-x}$ при $Kn = 1$

$Kn = 1$, чем при $Kn = 0.1$! Действительно, значения решений в одинаковый момент времени в одной и той же точке при $Kn = 1$ в ≈ 10 раз меньше, чем при $Kn = 0.1$, т. е. при небольшом значении числа Кнудсена $Kn = 0.1$ форма импульса сохраняется существенно дольше во времени. Например, в точке $x = 0$ при $Kn = 0.1$ решение принимает значение $F \approx 1.5$ в момент $t = 0.08$, а при $Kn = 1$ решение принимает это значение $F \approx 1.5$ гораздо раньше: в момент времени $t = 10^{-3}$: сравним $F(Kn = 1, x = 0, t = 10^{-3}) \cong 1.5 \cong F(Kn = 0.1, x = 0, t = 10^{-1})$. Это продемонстрировано на рис. 19, где соответствующая $t = 0.08$, $Kn = 0.1$ зеленая линия практически совпадает с красной линией, отвечающей $t = 10^{-3}$, $Kn = 1$. Более того, импульс при $Kn = 1$ в момент времени $t = 10^{-5}$ повторяет форму и значения импульса при $Kn = 0.1$ в момент $t = 10^{-3}$ и т. д. (соответствующие графики не приводятся для краткости).

Таким образом, приходим к выводу, что большие числа Кнудсена, отвечающие наличию баллистических условий, когда характерный масштаб, например, толщина пленки или нановолокна, оказываются порядка или меньше средней длины свободного пробега фононов в массиве, где происходит перенос тепла, оказывают очень значительное влияние на распространение мгновенного начального импульса. Большое число Кнудсена приводит к лучшей теплопроводности для коротких точечных импульсов. Плавно меняющаяся в пространстве тепловая волна не чувствительна к таким условиям, что вполне соответствует выводам исследованного выше распространения гармоник периодической функции. Действительно, гармонический состав короткого импульса содержит намного больше высших гармоник, чем их содержит плавная волна. Лучшее распространение высших гармоник в баллистических условиях, продемонстрированное нами, согласуется с показанным выше лучшим распространением короткого импульса. Для плавной тепловой вол-

ны это не так, и число Кнудсена, характеризующее баллистические условия, имеет меньшее значение.

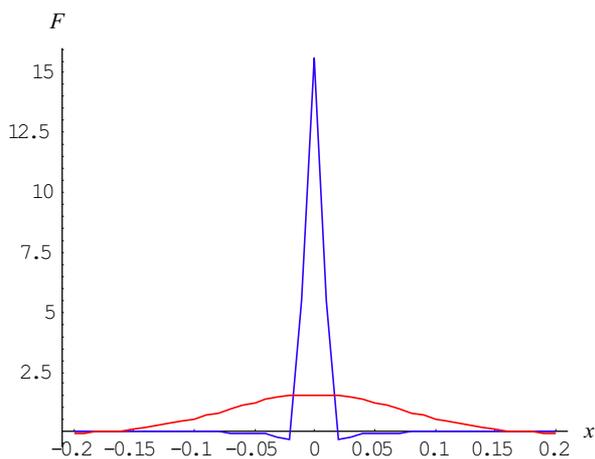


Рис. 18: Эволюция начального импульса $f(x) = \delta(x)$ в уравнении (35) в момент $t = 10^{-3}$: $Kn = 0.1$ — синяя линия, $Kn = 1$ — красная линия

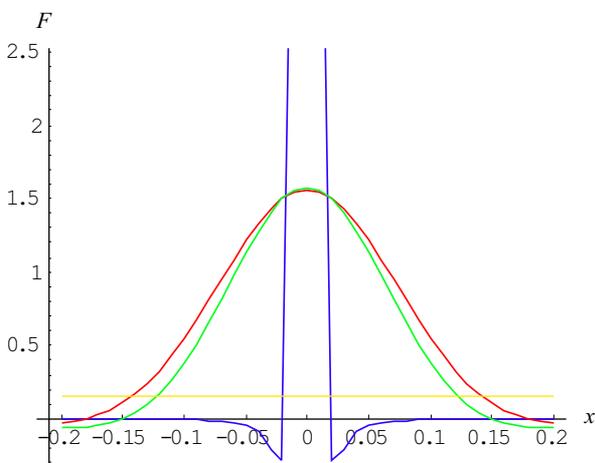


Рис. 19: Эволюция начального импульса $f(x) = \delta(x)$ в уравнении (35) в момент $t = 0.08$: $Kn = 0.1$ — зеленая линия, $Kn = 1$ — желтая линия; тот же импульс в момент $t = 10^{-3}$: $Kn = 0.1$ — синяя линия, $Kn = 1$ — красная линия

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью операторного метода, интегральных преобразований, расширенных форм ортогональных полиномов и специальных функций построены и исследованы точные аналитические решения уравнения теплопроводности в модели Гюера–Крумхансля. Исследовано распространение нескольких типов начальных функций: периодической, степенной, экспоненциально-степенной и δ -функции Дирака. На основе полученных

точных решений исследовано распространение импульсов тепла различной формы, моделирующих реальные экспериментальные условия, такие как изолированная тепловая волна, лазерный импульс, пространственно-периодический нагрев. Решения исследованы для широкого спектра условий, включая баллистические условия в сочетании с фоновым механизмом теплопередачи и диффузией тепла. Справедливость полученных аналитических решений проверена прямой подстановкой в уравнение, а также численно.

Изучено пространственно-временное решение для начальной функции в виде ряда $f(x) = \sum_{n,\gamma} c_n e^{-\gamma x^n}$, позволяющего моделировать разнообразные симметричные и асимметричные импульсы. Рассмотрен пример функции $F(x, 0) = (|x| + 2)^2 e^{-|x|}$. При равных друг другу вкладах компонент переноса тепла, решение имеет вид затухающей волны, как в случае диффузии Фурье, которая реализуется при значениях параметров уравнения равных $\alpha/\delta = \varepsilon$. Вторая производная по времени при этом положительна. Малое значение члена Гюера–Крумхансля $\sim \delta$ в уравнении ускоряет релаксацию решения и противодействует члену Каттанео $\sim \varepsilon$; последний отвечает за волновое распространение тепла и помогает сохранить начальную форму функции гораздо дольше, чем при диффузии Фурье.

В сверх-диффузивном режиме, когда $\delta > \alpha/\varepsilon$ и преобладает член с третьей смешанной производной в уравнении, поведение решения может сильно отличаться от Фурье. Возможен даже рост решения и медленный последующий спад, например при $\delta = 10$, $\alpha = \varepsilon = 1$ и $\kappa^2 = -0.5$. В этом случае максимум решения достигается внутри рассматриваемой области и принцип максимума не выполняется! В уравнении Гюера–Крумхансля с $\alpha = \varepsilon = 1$, $\delta = 10$ и $\kappa = 0$, а также при $\kappa^2 > 0$, соответствующее решение быстро убывает до отрицательных значений и затем спадает до нуля с отрицательной стороны. Минимум достигается внутри области и положительность решения не сохраняется! При относительно малом вкладе второй производной по времени в сверх-диффузивном режиме $\delta > \alpha/\varepsilon$, например, при $\alpha = \varepsilon = \delta = 10$, независимо от линейного слагаемого решение ведёт себя ещё более интересно: оно быстро убывает до существенно меньших нуля значений и затем медленно возвращается с отрицательных значений до нуля везде, кроме окрестности начального максимума $x = 0$, где оно вновь становится положительным и спадает до нуля уже с положительных значений. Минимум достигается внутри области и положительность решения не сохраняется!

Если в уравнении преобладает член, соответствующий диффузии Фурье, то решение ожидаемо быстро затухает; фоновый способ теплопередачи при этом подавлен. Условия на границе среды, ответственные за баллистический способ передачи тепла, в этом случае также не играют роли, а линейное слагаемое даёт незначительный вклад.

Отметим, что даже когда вклады всех компонент переноса тепла по величине сравнимы друг с другом, минимум решения может достигаться внутри области и положительность решения может не сохраняться, как показано на рис. 4.

Наконец, при $\delta = \alpha/\varepsilon$ реализуется случай Фурье даже при $\delta \gg \alpha$, $\delta \gg \varepsilon$ и решение соответствующего уравнения Фурье удовлетворяет также уравнению Гюера–Крумхансля.

На рассмотренных примерах мы показали, что для уравнения типа Гюера–Крумхансля принцип максимума не выполняется, например, при сильных баллистических условиях, и положительность решений уравнения Гюера–Крумхансля также не соблюдается.

Проведенное исследование показало, что эффективная теплопроводность в уравнении типа Гюера–Крумхансля сильно зависит от формы начального импульса. Короткие точечные импульсы распространяются гораздо быстрее, чем пологие тепловые волны. Это важно для экспериментальных измерений теплопроводности, где устоявшейся практикой являются чувствительные эксперименты с тепловыми импульсами. Источниками последних обычно являются импульсные лазеры. Мы продемонстрировали, что форма начального импульса имеет первостепенное значение для определения того, является ли баллистическим перенос тепла в каждом конкретном случае или нет. Это необходимо учитывать при экспериментальных измерениях.

Применение исследования к моделированию распространения тепла в тонких пленках выявило влияние числа Кнудсена на теплопередачу. Построены и проанализированы точные аналитические решения для распространения мгновенного точечного лазерного импульса $F(x, 0) = \delta(x)$ и распространения плавной тепловой волны $F(x, 0) = x^4 e^{-x}$. Поведение полученных решений кардинально отличается друг от друга. Решение $F(x, t)$ для плавной начальной пространственной тепловой волны $F(x, 0) = x^4 e^{-x}$ при $Kn=1$ превосходит значения $F(x, t)$ при $Kn=0.1$ только на несколько процентов. Таким образом, распространение тепловой волны в тонкой плёнке слабо ($< 10\%$) зависит от числа Кнудсена. Для начального точечного импульса $f(x) = \delta(x)$ напротив получаем решение, сильно зависящее от числа Кнудсена. Его значения при $Kn = 1$ на один порядок больше, чем при $Kn = 0.1$ в той же пространственно-временной точке. Более того, соответствующее время релаксации этого решения при $Kn = 0.1$ превосходит время релаксации при $Kn = 1$

на два порядка: $\tau_{Kn=0.1}/\tau_{Kn=1} \cong 100$. Таким образом, распространение мгновенного точечного импульса очень сильно зависит от числа Кнудсена.

Это подтверждается исследованием распространения гармоник периодической функции $f(x) = \exp(ix)$. Большее значение числа Кнудсена улучшает теплопроводность, в особенности для высших гармоник. Так, продемонстрирована лучшая теплопроводность при $Kn = 1$ чем при $Kn = 0.1$ в особенности для высших гармоник.

Мы выяснили, что для гармонической функции $\exp(ix)$ решение телеграфного уравнения (5) с зависимым от номера гармоники коэффициентом при первой производной по времени $\partial/\partial t$: $(\varepsilon + n^2\delta)\partial/\partial t$ (см. (32)), является также решением уравнения теплопроводности типа Гюера–Крумхансля (1), (2) с постоянным членом $\kappa \neq 0$. Для решения собственно уравнения Гюера–Крумхансля тогда достаточно решить значительно более простое уравнение Каттанео с $\varepsilon \rightarrow \varepsilon + n^2\delta$, что существенно меняет поведение решения. В решении (29) уравнения типа Гюера–Крумхансля (1), (2) и соответствующего телеграфного уравнения с $\varepsilon \rightarrow \varepsilon + n^2\delta$, (32), высшие гармоники затухают значительно быстрее, чем основная с $n = 1$; время релаксации уменьшается с возрастанием номера гармоники. Таким образом, эффективная теплопроводность, определённая в контексте второго закона термодинамики в отсутствие локальных максимумов решения, в уравнении Каттанео практически постоянна, а в уравнении Гюера–Крумхансля эффективная теплопроводность увеличивается с ростом номера гармоники.

Для гиперболического уравнения типа Каттанео не выполняется принцип максимума, что возможно математически, но в контексте переноса тепла это не соответствует второму закону термодинамики. Уравнение типа Гюера–Крумхансля, реализующееся, например, в модели для тонких плёнок, также нарушает принцип максимума (см. рис. 15 слева, а также [47]). В результате сложения волн возникают локальные максимумы, однако, при физически разумных значениях параметров они могут быть подавлены дополнительным демпфирующим членом δ , соответствующим вкладу баллистических эффектов в теплопроводность. Это слагаемое с δ в уравнении типа Гюера–Крумхансля демпфирует тепловые волны Каттанео и максимумы температуры, восстанавливая соответствие поведения системы второму закону термодинамики. Эффективная теплопередача увеличивается с ростом номера гармоники.

- [1] *Fourier J. P. J.* The Analytical Theory of Heat. Cambridge University Press, London, 1878.
 [2] *Onsager L.* Phys. Rev. 1931. **37**. P. 119.
 [3] *Peshkov V. J.* Phys. (Moscow). 1944. **8**. P. 381.
 [4] *Ackerman C. C., Guyer R. A.* Annals of Physics. 1968. **50**(1). P. 128.
 [5] *Ackerman C. C., Overton W. C.* Phys. Rev. Lett. 1969. **22**,

N 15 P. 764.

- [6] *McNelly T. F., Rogers S. J., Channin D. J., Rollefson R., Goubau W. M., Schmidt G. E., Krumhansl J. A., Pohl R. O.* Phys. Rev. Lett. 1970. **24**, N 3. P. 100.
 [7] *Narayanamurti V., Dynes R. D.* Phys. Rev. Lett. 1972. **26**. P. 1461.
 [8] *Cattaneo C.* Comptes Rendus de l'Acad. Sc. Paris. 1958.

247. P. 431.
- [9] *Bright T. J., Zhang Z. M.* J. Thermophys. Heat Transfer 2009. **23**. P. 601.
- [10] *Shiomi J., Maruyama S.* Phys. Rev. B. 2006. **73**. P. 205420.
- [11] *Bai C., Lavine A. S. J.* Heat Transfer. 1995. **117**. P. 256.
- [12] *Porra J. M., Masoliver J., Weiss G. H.* Phys. Rev. E. 1997. **55**. P. 7771.
- [13] *Kürner C., Bergmann H. W.* itAppl. Phys. A. 1998. **67**. P. 397.
- [14] *Guyer R. A., Krumhansl J. A.* Phys. Rev. 1966. **148**. P. 778.
- [15] *Guyer R. A., Krumhansl J. A.* Phys. Rev. 1966. **148**. P. 766.
- [16] *Lebon G., Machrafi H., Gremela M., Dubois Ch.* Proc. R. Soc. A. 2011. **467**. P. 3241.
- [17] *Minnich J., Johnson J. A., Schmidt A. J., Esfarjani K., Dresselhaus M. S., Nelson K. A., Chen G.* Phys. Rev. Lett. 2011. **107**. P. 095901.
- [18] *Casimir H. B. G.* Physica. 1938. **5**. P. 495.
- [19] *Chen Gang* Phys. Rev. Lett. 2001. **86**, N 11. P. 2297.
- [20] *Hsiao Tzu-Kan, Chang Hsu-Kai, Liou Sz-Chian, Chu Ming-Wen, Lee Si-Chen, Chang Chih-Wei* Nature Nanotechnology. 2013. **8**. P. 534.
- [21] *Zhang Yujie, Ye Wenjing* Int. J. of Heat and Mass Transfer. 2015. **83**. P. 51.
- [22] *Baringhaus J., Ruan M., Edler F. et. al.* Nature. 2014. **506**. P. 349. doi:10.1038/nature12952.
- [23] *Hochbaum A. I., Chen R., Delgado R. D., Liang W., Garnett E. C., Najarian M., Majumdar A., Yang P.* Nature.(London). 2008. **451**. P. 163.
- [24] *Boukai A. I., Bunimovich Y., Tahir-Kheli J., Yu J.-K., Goddard W. A., Heath J. R.* Nature. (London). 2008. **451**. P. 168.
- [25] *Paddock C. A., Eesley G. L.* J. Appl. Phys. 1986. **60**. P. 285.
- [26] *Maldovan M.* Appl. Phys. Lett. 2012. **101**. P. 113110. doi: 10.1063/1.4752234.
- [27] *Cahill D. G.* Rev. Sci. Instrum. 1990. **61**. P. 802.
- [28] *Both S., Czül B., Fьльц T., Gryf Gy., Gyenis B., Kovacs R., Vьн P. and Verhьs J. J.* Non-Equilibrium Thermodynamics. Online first. 2016. (arXiv:1506.05764).
- [29] *Tang D. W., Araki N.* Materials Science and Engineering: A. 2000. **292**, N 2. P. 173.
- [30] *Kaminski W. J.* Heat Transfer. 1990. **112**. P. 555.
- [31] *Mitra K., Kumar S., Vedavarz A., Moallemi M. K. J.* Heat Transfer. 1995. **117**. P. 568.
- [32] *Herwig H., Beckert K. J.* Heat Transfer. 2000. **122**, N 2. P. 363.
- [33] *Roetzel W., Putra N., Das S. K.* Int. J. Thermal Sc.. 2003. **42**, N 6. P. 541.
- [34] *Scott E. P., Tilahun M., Vick B. J.* Biomechanical Eng. 2009. **131**. P. 074518.
- [35] *Kovacs R., Van P.* Int. J. Heat and Mass transfer. 2015. **83**. P. 613.
- [36] *Van P., Fulop T.* Annalen der Physik. 2012. **524**. P. 470.
- [37] *Dattoli G., Srivastava H. M., Zhukovsky K. V.* Appl. Math. Comput. 2007. **184**. P. 979.
- [38] *Zhukovsky K. V.* Sci. World J. 2014. 2014. article ID 454865, P. 1.
- [39] *Zhukovsky K. V.* Mosc. Univ. Phys. Bull. 2015. **70**, N 2. P. 93.
- [40] *Dattoli G., Srivastava H. M., Zhukovsky K.* Integral Transform. Spec. Funct. 2006. **17**, N 1. P. 31.
- [41] *Соколов А. А., Тернов И. М., Жуковский В. Ч., Боровов А. В.* Калибровочные поля. М.: издательство МГУ, 1986.
- [42] *Parker W. J., Jenkins R. J., Butler C. P., Abbott G. L. J.* Appl. Phys. 1961. **32**, N 9. P. 1679.
- [43] *Dattoli G., Srivastava H. M., Zhukovsky K. J.* Comput. Appl. Math. 2005. **182**, N 1. P. 165.
- [44] *Gould H. W., Hopper A. T.* Duke Math. J. 1962. **29**. P. 51.
- [45] *Zhukovsky K. V., Srivastava H. M.* Appl Math. Comput. 2017. **293**. P. 423.
- [46] *Zhukovsky K. V.* Moscow Univ. Phys. Bull. 2016. **71**, N 3. P. 237.
- [47] *Zhukovsky K. V.* Int. J. Heat Mass Transfer. 2016. **96**. P. 132. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.01.005.
- [48] *Жуковский К. В.* Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. № 3. С. 49.

Exact solution for hyperbolic heat equation and for Guyer–Krumhansl type equation

K. Zhukovsky

*Department of theoretical physics, Faculty of physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia*

E-mail: zhukovsk@physics.msu.ru

The heat transfer in the mathematical framework of the Guyer–Krumhansl model is studied. Exact analytical one-dimensional solution for Guyer–Krumhansl equation is obtained. The operational approach is employed. With its help the propagation of various pulses of heat in the medium is studied with account for phonon and ballistic heat transport. The obtained results are used for modelling heat transfer in ultra-thin films with account for molecular effects in systems with reduced dimensions. We model propagation of ultra short laser heat pulses and propagation of isolated smooth spatial heat waves with account for the Knudsen number. The solution for periodic function is obtained. The exact solutions of the above problems are studied in the model of thin films; the maximum principle and the non-negativity of the solutions are discussed in the context of heat conduction.

PACS: 02.30 -f, Gp, Hq, Jr, Mv, Nw, Tb, Uu, Vv, Zz; 44.05+e, 41.85.Ja, 03.65.Db, 05.60.Cd.

Keywords: Guyer–Krumhansl equation, heat conduction, thin films, Knudsen number, maximum principle.

Received 21 June 2017.

Сведения об авторе

Жуковский Константин Владимирович — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-31-77, e-mail: zhukovsk@physics.msu.ru.