

Волноводное распространение нелинейных акустических сигналов в среде с газовыми пузырьками

В.А. Гусев*

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра акустики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Статья поступила 14.11.2014; Подписана в печать 05.12.2014)

В работе исследована возможность формирования звукового канала за счет неоднородного распределения сильно сжимаемых включений — газовых пузырьков в однородной водоподобной среде. Предложен метод расчета акустического поля интенсивных волновых пучков вблизи оси звукового канала. Рассчитано поле интенсивного гауссовского пучка при несовпадении его оси с осью звукового канала. Разработанные методы могут быть применены для расчета интенсивных полей как в природных средах, например, придонном газонасыщенном осадочном слое, так и в искусственно созданных средах — метаматериалах, позволяющих управлять трансформацией пространственно-временной структуры поля.

PACS: 43.25.+y, 47.55.dd, 47.40.Nm, 43.30.+m

УДК: 534.222

Ключевые слова: жидкость с пузырьками, метаматериалы, звуковой канал, придонный волновод, нелинейные акустические пучки.

ВВЕДЕНИЕ

Наличие в среде сильно сжимаемых включений приводит к значительному изменению характера распространения акустических волн, их пространственно-временной структуры и перераспределения энергии в пространстве, нелинейного энергообмена между волнами различных частот и типов. Это связано, во-первых, с уменьшением локальной скорости звука в такой структурно-неоднородной среде. Во-вторых, за счет сжимаемых включений во много раз возрастает эффективный нелинейный параметр, так что даже при интенсивностях, сравнительно малых для однородных сред, в структурно-неоднородной могут наблюдаться гигантские нелинейности и ярко выраженные нелинейные эффекты [1]. Такие свойства сред с включениями могут быть использованы для управляемого воздействия на акустические поля, создания и передачи на дальние расстояния полей заданной конфигурации, а также решения ряда обратных задач дистанционной диагностики сред с внутренней структурой. Одним из типов сред с сильно сжимаемыми включениями являются водоподобные среды, в которых газовые пузырьки образуются за счет естественных процессов или создаются искусственно. Например, в придонном осадочном слое на морском дне достаточно распространены области с богатым содержанием пузырьков метана, образующихся за счет деятельности микроорганизмов [2–5]. Распределение пузырьков в слое складывается под влиянием динамики газообразования и движения пузырьков в слое. Пузырьки могут и искусственно генерироваться, например, с помощью электрического разряда, и образовывать заданное распределение. Аналогичные эффекты могут наблюдаться и в трещинах, частично

заполненных как жидкой, так и газообразной фракциями. Другим типом сред с сильно сжимаемыми включениями являются искусственно созданные материалы с внутренней структурой — метаматериалы — резиноподобные среды, полимеры, гели, в которых газовые пузырьки образуются в процессе формирования материала и остаются «вмороженными» после затвердевания. В этом случае распределение пузырьков может контролироваться в процессе подготовки образца.

1. АКУСТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В СРЕДЕ С ПУЗЫРЬКАМИ

Для наглядности рассмотрим двумерную задачу. Пусть ось x направлена горизонтально, ось z — вертикально вниз. В водоподобной среде распределены газовые пузырьки, вообще говоря с переменной концентрацией $\nu(x, z)$. Газонасыщенная среда моделируется однородной жидкостью с эффективными параметрами; влиянием твердых включений и их внутренним трением пренебрегается. Введем следующие обозначения параметров сред: ρ, c — скорость и плотность жидкой фракции в газосодержащем слое, ρ_g, c_g — скорость и плотность газа в газосодержащем слое, $\rho_{eff} = \rho(1 - \nu) + \rho_g\nu$ — эффективная плотность газосодержащей среды, ν — концентрация газовых пузырьков.

Акустическое поле в среде с пузырьками описывается уравнениями (см., например, [6, 7]):

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\rho\nu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\delta \frac{\partial w}{\partial t} + \omega_0^2 w (1 - \varepsilon_g w) = -\omega_0^2 \frac{p}{\rho_g c_g^2}. \quad (2)$$

*E-mail: vgusev@bk.ru

Волновое уравнение (1) для акустического давления p учитывает генерацию поля за счет колебаний пузырьков, а уравнение (2) описывает колебания пузырьков, вызванные внешним акустическим полем. Здесь w — относительное изменение объема пузырька, $\omega_0^2 = 3c_g^2\rho_g/\rho R_0^2$ — собственная частота колебаний пузырька с радиусом R_0 , ε_g — нелинейный параметр газа внутри пузырька. Известно [1], что при сильном различии сжимаемостей жидкости вокруг пузырька и газа внутри него могут наблюдаться гигантские эффективные параметры нелинейности, во много раз превосходящие нелинейные параметры однородных сред, поэтому в уравнениях (1), (2) учтен только нелинейный параметр газа. Наибольшие нелинейности наблюдаются на низких частотах, много меньших собственной частоты колебаний пузырьков. Для воздушных пузырьков характерные значения собственной частоты $\omega_0/2\pi \sim 3$ кГц при $R_0 = 1$ мм и $\omega_0/2\pi \sim 30$ кГц при $R_0 = 0,1$ мм. В дальнейшем будут рассматриваться низкочастотные сигналы с характерными частотами 100–1000 Гц, относительно слабо затухающие за счет диссипации.

Основные механизмы диссипации в такой среде связаны с динамикой пузырьков — теплопроводностью, радиационными потерями и вязким затуханием. Потери, связанные с теплопроводностью, преобладают при размерах пузырька порядка длины тепловой волны $\lambda_t = \sqrt{2\chi/\omega}$, где χ — температуропроводность газа. В воздухе на частоте 100 Гц $\lambda_t \sim 0,25$ мм. Для маленьких пузырьков с радиусом много меньше λ_t преобладают вязкие потери, для пузырьков большого размера — потери на излучение звука [8].

Выражая из уравнения (2) переменную p и подставляя в (1), можно записать замкнутое уравнение для функции w :

$$\Delta w - \frac{1}{c_{\text{eff}}^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left[\frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2\delta}{\omega_0} \frac{\partial w}{\partial t} - \varepsilon_g w^2 \right] = 0. \quad (3)$$

В уравнении (3) формально введена эффективная скорость низкочастотной акустической волны в пузырьковой среде

$$c_{\text{eff}}^2 = \frac{c^2}{1 + \beta\nu}, \quad (4)$$

где $\beta = \rho c^2 / \rho_g c_g^2$ — отношение сжимаемостей жидкой и газовой сред. Параметр β оказывается большой величиной. Для газовых пузырьков в воде $\beta \approx 16000$, поэтому даже при малых концентрациях пузырьков скорость звука может значительно уменьшиться по сравнению с однородной средой. Например, уже при малой концентрации пузырьков $\nu = 10^{-3}$ скорость звука уменьшается в четыре раза.

2. ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СРЕДЫ С ПЕРЕМЕННОЙ КОНЦЕНТРАЦИЕЙ ПУЗЫРЬКОВ

Поскольку пузырьки могут существенно изменить скорость волны, то формирование определенных конфигураций пузырьков в объеме среды может быть полезно для пространственной локализации и концентрации акустического поля, создания условий для волнового распространения волны. Подобные неоднородные структуры могут формироваться в морском придонном осадочном слое. Для пространственного распределения пузырьков в таком слое можно предложить следующую качественную модель. На нижнем уровне слоя разтворенный газ начинает собираться в маленькие пузырьки, которые медленно продвигаются вверх. По мере уменьшения глубины концентрация пузырьков увеличивается. Пока силы сопротивления преобладают над силами плавучести, пузырьки надолго задерживаются, образуя область с нарастающей концентрацией. На более высоких горизонтах, где преобладают силы плавучести, пузырьки быстро всплывают. В этой области концентрация пузырьков уменьшается. В результате в слое формируется неоднородное распределение пузырьков с максимумом в средней части слоя, который соответствует минимуму локальной скорости звука, поэтому при таких условиях в слое формируется звуковой канал. Наибольшее влияние на структуру поля оказывает вертикальное распределение пузырьков. Поэтому будем считать, что концентрация пузырьков зависит только от вертикальной координаты $\nu = \nu(z)$, и, соответственно, уравнение (3) содержит переменную скорость звука $c_{\text{eff}}(z)$.

Определим относительные вклады слагаемых в квадратной скобке в уравнении (3), ответственных за нелинейность, дисперсию и диссипацию. В низкочастотном приближении $\omega \ll \omega_0$ первое слагаемое, ответственное за дисперсию, мало. Диссипативные и нелинейные эффекты также слабы в силу малости коэффициента δ и числа Маха. Это означает, что в низкочастотном диапазоне распространение волны описывается волновым уравнением с эффективной скоростью звука, а остальные слагаемые приводят к медленному изменению профиля волны. При таких условиях уравнение (3) может быть упрощено в приближении квазиоптики, согласно которому решение отыскивается в следующем виде:

$$w = w(\tau = t - x/c_{\text{eff}0}, \mu x, \sqrt{\mu} z),$$

где $c_{\text{eff}0} = c/\sqrt{1 + \beta\nu_0}$ — некоторая характерная скорость звука в среде с концентрацией пузырьков ν_0 , $\mu \ll 1$. Подставим это решение в (3), пренебрегая членами порядка μ^2 (считаем формально нелинейные члены малыми и $\omega_0^{-2} \sim \mu$). Для того чтобы записать уравнение для акустического давления, используем приближенное соотношение $w \approx -p/\rho_g c_g^2$, следующее из (2) в низкочастотном приближении. Учет следующих членов этого разложения приводит к величинам более высокого порядка, превышающим принятую точ-

ность. В результате получим эволюционное уравнение для давления в среде с пузырьками:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\Delta n(x, z)}{c_{\text{eff}0}} \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{\varepsilon}{\rho_{\text{eff}0} c_{\text{eff}0}^3} p \frac{\partial p}{\partial \tau} - b \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} - B \frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3} \right) = \frac{c_{\text{eff}0}}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}. \quad (5)$$

Здесь введены величины $\Delta n(x, z) = \frac{1}{2} (c_{\text{eff}0}^2/c_{\text{eff}}^2 - 1) = \frac{1}{2} (\nu - \nu_0) (1 + \beta \nu_0)$ — переменная часть показателя преломления, $\rho_{\text{eff}0} = \rho(1 - \nu_0) + \rho_g \nu_0$, эффективный нелинейный параметр

$$\varepsilon = \rho_{\text{eff}0} c_{\text{eff}0}^4 \frac{\varepsilon_g}{\rho_g c_g^2} \left(\frac{1}{c_{\text{eff}0}^2} - \frac{1}{c^2} \right) = \frac{1 - (1 - \rho_g/\rho) \nu_0}{(1 + \beta \nu_0)^2} \varepsilon_g \beta^2 \nu_0, \quad (6)$$

параметр дисперсии

$$B = \frac{c_{\text{eff}0}}{2\omega_0^2} \left(\frac{1}{c_{\text{eff}0}^2} - \frac{1}{c^2} \right) = \frac{\beta \nu_0}{2\omega_0^2 A \sqrt{1 + \beta \nu_0}}$$

и коэффициент затухания

$$b = \delta \frac{c_{\text{eff}0}}{\omega_0^2} \left(\frac{1}{c_{\text{eff}0}^2} - \frac{1}{c^2} \right) = \frac{\delta \beta \nu_0}{\omega_0^2 A \sqrt{1 + \beta \nu_0}}.$$

Определение нелинейного параметра в виде (6) обусловлено записью нелинейного слагаемого в уравнении (5) в стандартной форме [6]. Нелинейный параметр (6) при $\nu = \beta^{-1}$ равен $\varepsilon \approx 4000 \varepsilon_g = 4800$. Параметр дисперсии и коэффициент затухания также растут с увеличением концентрации пузырьков.

Уравнение (5) обобщает уравнения Хохлова–Заболотской и Кортвега–де Вриза и учитывает нелинейные и дисперсионные искажения профиля, а также влияние рефракционных неоднородностей среды и переменной концентрации пузырьков.

3. АКУСТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ВБЛИЗИ ОСИ ЗВУКОВОГО КАНАЛА

Пусть неоднородное по высоте распределение пузырьков образует за счет изменения локальной скорости звука звуковой канал. Ограничиваясь рассмотрением акустического поля вблизи оси канала при $z = 0$, аппроксимируем показатель преломления параболической функцией $\Delta n(z) = \Delta n_0 - z^2/2a^2$ с характерным масштабом a . Предположим, что параллельно этой оси распространяется ограниченный волновой пучок с характерной поперечной шириной d . Пусть ось акустического пучка расположена при $z = z_0$ (предполагается,

что $z_0 \ll a$, чтобы параболическая аппроксимация была справедлива). В общем случае будем считать, что оси пучка и звукового канала не совпадают. Это позволит проанализировать влияние неточности расположения излучателя на структуру акустического поля. Выведем эволюционное уравнение для поля на оси пучка, исходя из уравнения (5).

Поскольку неоднородность коэффициента преломления ведет, прежде всего, к изменению фазы волны и к формированию областей фокусировок, целесообразно действовать по аналогии с методом нелинейной геометрической акустики (НГА). Отыскиваем решение уравнения (5) вида $p = p(x, z, T) = \tau - \psi(x, z)/c_{\text{eff}0}$ и после подстановки получаем уравнение

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{c_{\text{eff}0}} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 - \Delta n_0 + \frac{z_0^2}{2a^2} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} + \\ & + \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{\rho_{\text{eff}0} c_{\text{eff}0}^3} p \frac{\partial p}{\partial T} - b \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} - \right. \\ & \left. - B \frac{\partial^3 p}{\partial T^3} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \frac{p}{2} \right) = \frac{c_{\text{eff}0}}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}. \quad (7) \end{aligned}$$

Фаза ψ здесь пока не определена. Для ее определения возможны различные подходы. Самый простой вариант — в соответствии с приближением НГА наложить условие равенства нулю выражения в первой скобке в (7). Однако при наличии фокусировки это приведет к сингулярности в фокусах коэффициентов при остающихся в (7) слагаемых. Поэтому продуктивным является следующий подход. По аналогии с работой [9] наложим на ψ условие

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 - \Delta n_0 + \frac{z^2}{2a^2} = Q(x, z). \quad (8)$$

Выбор функции Q достаточно произволен, основное требование, чтобы соответствующая фаза не приводила к сингулярности коэффициентов уравнения (7). Эту функцию можно определить, например, так, чтобы функция ψ являлась фазой решения соответствующей линейной задачи

$$\frac{\partial P}{\partial x} - ik \Delta n_0 P + ik \frac{z^2}{2a^2} P = \frac{i}{2k} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}, \quad (9)$$

где $p = P(x, z) e^{-i\omega \tau}$, $k = \omega/c_{\text{eff}0}$ — характерное волновое число. Такой выбор ψ связан с тем, что в приближении геометрической акустики уравнения эйконала для линейной и нелинейной задач имеют одинаковый вид.

Пусть при $x = 0$ излучается гауссовский пучок $P(x = 0, z) = A_0 \exp\left(-\frac{(z - z_0)^2}{d^2}\right)$. Решение уравнения (9) для этого граничного условия имеет вид $P = A(x, z) \exp(ik\psi(x, z))$, где

$$\begin{aligned}
A(x) &= A_0 \left(\frac{(1-C)^2}{1+C^2-2C \cos(2x/a)} \right)^{1/4} \exp \left(-\frac{z_0^2}{d^2} - \frac{z_0}{4C} \frac{C+1}{C-1} + \frac{1-C^2}{1+C^2-2C \cos(2x/a)} \frac{kz^2}{2a} \right) \times \\
&\times \exp \left(C_2 \frac{\cos \frac{x}{a} - C \cos \frac{x}{a} \cos \frac{2x}{a} - \sin \frac{x}{a} \sin \frac{2x}{a}}{1+C^2-2C \cos(2x/a)} z_0 z + \frac{C_2 a z_0}{C} \frac{1-C \cos \frac{2x}{a}}{4k} \frac{1-C^2-2C \cos(2x/a)}{1+C^2-2C \cos(2x/a)} \right), \\
\psi(x, z) &= \Delta n_0 x + \frac{x}{2ka} - \frac{1}{2k} \arctan \frac{C \sin(2x/a)}{1-C \cos(2x/a)} + \frac{C_2 a z_0}{C} \frac{\sin(2x/a)}{4k} \frac{1-C^2-2C \cos(2x/a)}{1+C^2-2C \cos(2x/a)} + \\
&+ C_2 \frac{\sin \frac{x}{a} + \cos \frac{x}{a} \sin \frac{2x}{a} - C \sin \frac{x}{a} \cos \frac{2x}{a}}{1+C^2-2C \cos(2x/a)} z_0 z + \frac{C}{a} \frac{\sin \frac{2x}{a}}{1+C^2-2C \cos(2x/a)} z^2.
\end{aligned} \tag{10}$$

Константа

$$C = \frac{1 + kd^2/2a}{1 - kd^2/2a}$$

характеризует относительные вклады фокусировки за счет неоднородности и дифракционного расплывания: $C \geq 1$, если преобладает дифракция, и $C \leq -1$, если преобладает рефракция. Когда эффекты сравнимы по величине, $C \rightarrow \pm\infty$. Константа $C_2 = 2(1-C)/d^2$.

Фаза ψ (10) имеет структуру $\psi(x, z) = \psi_0(x) + \psi_1(x)z + \Psi(x)z^2$, где функция Ψ связана с фокусировкой в звуковом канале и дифракционным расплыванием, а функция ψ_1 — со сдвигом положения максимума пучка (его оси) относительно оси звукового канала. При совпадении осей $z_0 = 0$ и $\psi_1 = 0$. Отметим, что функции A и ψ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 &= \Delta n_0 - \frac{z^2}{2a^2} + \frac{1}{2k^2 A} \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}, \\
\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \frac{A}{2} &= 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Соответственно, функция Q в уравнении (8) равна $Q(x, z) = (2k^2 A)^{-1} \partial^2 A / \partial z^2$.

Уравнение (7) с учетом (11) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{\rho_{\text{eff}0} c_{\text{eff}0}^3} p \frac{\partial p}{\partial T} - b \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} - B \frac{\partial^3 p}{\partial T^3} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} p \right) &= \frac{c_{\text{eff}0}}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{1}{k^2 c_{\text{eff}0}^2 A} \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} \right).
\end{aligned}$$

Правая часть этого уравнения связана с различием поперечной структуры пучка в линейном и нелинейном случаях. Пренебрегая этим различием, приходим к нелинейному уравнению переноса

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{\rho_{\text{eff}0} c_{\text{eff}0}^3} p \frac{\partial p}{\partial T} - b \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} - B \frac{\partial^3 p}{\partial T^3} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} p &= 0. \tag{12}
\end{aligned}$$

Формально уравнение (12) совпадает с уравнением переноса в приближении НГА. Однако функция ψ в (12) найдена из более точного уравнения (11) и не содержит сингулярностей в фокальных областях. Учитывая структуру фазы (10), из уравнения (12) получаем:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{\rho_{\text{eff}0} c_{\text{eff}0}^3} p \frac{\partial p}{\partial T} - b \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} - B \frac{\partial^3 p}{\partial T^3} + (\psi_1 + 2\Psi z) \frac{\partial p}{\partial z} + \Psi p &= 0.
\end{aligned}$$

Из этого уравнения видно, что на амплитудные характеристики влияет только функция Ψ , а функция ψ_1 связана только с поворотом траекторий лучей. Таким образом, в общем случае на оси звукового канала поле изменяется за счет конкуренции фокусировки и дифракции, а также за счет прихода различных лучей. Введением лучевой поперечной координаты $z_1 = z - \int \psi_1 dx$ слагаемое, содержащее ψ_1 , можно исключить. После этого для поля на оси звукового канала при $z = 0$ удастся записать замкнутое уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{\rho_{\text{eff}0} c_{\text{eff}0}^3} p \frac{\partial p}{\partial T} - b \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} - B \frac{\partial^3 p}{\partial T^3} + \Psi(x) p = 0. \tag{13}$$

Преобразованием $p = f(x) V(x, T)$, где

$$f = \exp \left(- \int_0^x \Psi dx \right) = \left((1-C)^2 + 4C \sin^2 x/a \right)^{1/4},$$

можно исключить последнее слагаемое, а затем, вводя эффективное расстояние $s = \int_0^x f dx$, привести уравнение (13) к виду

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial s} - \frac{\varepsilon}{\rho_{\text{eff}0} c_{\text{eff}0}^3} V \frac{\partial V}{\partial T} - F(s) \left(b \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} + B \frac{\partial^3 V}{\partial T^3} \right) &= 0, \\
F(s) &= \frac{1}{f(x(s))}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Уравнение (14) можно назвать обобщенным уравнением Кортевега–де Вриза–Бюргера (КдВБ) по аналогии с обобщенным уравнением Бюргера [10].

При пренебрежении диссипацией и дисперсией можно записать точное решение уравнения (14) для произвольного исходного профиля:

$$V = V_0 \left(T + \frac{\varepsilon}{\rho_{\text{eff}} c_{\text{eff}}^3} V s \right),$$

где $V_0 = V(s=0) = p(x=0, z=0, T)$, или в исходных переменных

$$p = f(x) p_0 \left(T + \frac{\varepsilon}{\rho_{\text{eff}} c_{\text{eff}}^3} \frac{p}{f(x)} s(x) \right). \quad (15)$$

Неявное решение (15) справедливо до расстояния образования разрыва s_{sh} , далее в профиле необходимо проводить разрыв по правилу равенства площадей. Для исходного синусоидального сигнала $p_0(T) = \sin T$ разрыв формируется при $s=1$, а на расстояниях $s > 2$ профиль становится пилообразным.

В безразмерных переменных

$$U = V/p_0, S = s/x_{\text{nl}}, x_{\text{nl}} = \rho_{\text{eff}} c_{\text{eff}}^3 / \varepsilon \omega p_0, \Theta = \omega T$$

уравнение (14) запишется в виде

$$\frac{\partial U}{\partial S} - U \frac{\partial U}{\partial \Theta} - b_1 F(s(S)) \frac{\partial^2 U}{\partial \Theta^2} - B_1 F(s(S)) \frac{\partial^3 U}{\partial \Theta^3} = 0,$$

$$b_1 = \frac{\delta \omega}{\omega_0^2} \frac{\rho_g c_g^2}{\varepsilon_g p_0}, \quad B_1 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \frac{\rho_g c_g^2}{2 \varepsilon_g p_0}. \quad (16)$$

Коэффициент B_1 при дисперсионном слагаемом состоит из множителя ω^2/ω_0^2 , малого в силу рассматриваемого низкочастотного приближения, и величины $\rho_g c_g^2 / 2 \varepsilon_g p_0$ — отношения внутреннего давления газа и амплитуды волны. Коэффициент затухания b_1 определяется потерями при движении пузырьков и диссипацией звука за счет вязкости. Однако отношение вкладов первого и второго механизмов, например, для пузырьков радиуса $R_0 = 0,1$ мм при концентрации $\nu = \beta^{-1}$ имеет порядок $\beta \rho / \rho_g \gg 1$, поэтому основным механизмом затухания являются потери, связанные с динамикой пузырьков. Относительная роль диссипативного и дисперсионного членов определяется отношением $2\delta/\omega$ и слабо зависит от размера пузырьков. Например, для воздушных пузырьков радиуса $R_0 = 0,1$ мм в воде преобладает вязкое затухание. Тогда для волны, число Маха в воде для которой составляет 10^{-3} , на частоте 100 Гц $b_1 \sim 8 \cdot 10^{-6}$, $B_1 \sim 3 \cdot 10^{-7}$. При тех же условиях, но для пузырьков радиуса $R_0 = 1$ мм преобладают радиационные потери и $b_1 \sim 2 \cdot 10^{-5}$, $B_1 \sim 3 \cdot 10^{-5}$. Видно, на низких частотах и для пузырьков маленького размера эффекты выражены относительно слабо и возрастают с увеличением частоты и размера пузырька; с увеличением частоты роль дисперсии возрастает.

В низкочастотном приближении (при $B_1 = 0$) на стадии развитых ударных фронтов профиль одного периода исходного синусоидального сигнала описывается модифицированным решением Хохлова обобщенного уравнения Бюргера [11] с произвольным переменным коэффициентом $\sqrt{F(S)}$:

$$U(\Theta, S) = \frac{1}{1+S} \left(-\Theta + \pi th \left[\frac{\pi \Theta}{4b_1 \sqrt{F}(1+S)} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8b_1}{\pi^2} (1+S)^2 \frac{d\sqrt{F}}{dS}} \right) \right] \right). \quad (17)$$

Решение (17) описывает профиль пилообразной волны с ударным конечной ширины. Второе слагаемое в аргументе тангенса описывает поправку к ширине ударного фронта, связанную с переменной эффективной вязкостью, и особенно важно на больших расстояниях.

Графики, иллюстрирующие решение (15) для исходного гауссовского пучка и синусоидального временного профиля $p_0(T) = \sin T$, приведены на рис. 1, 2, 3. Рис. 1а, 2а, 3а построены при соотношении масштабов неоднородности и дифракции $L_{\text{dif}}/L_{\text{inh}} = kd^2/2a = 5$, рис. 1б, 2б, 3б — $L_{\text{dif}}/L_{\text{inh}} = kd^2/2a = 50$. На рис. 1 и 2 построены лучи, определенные из уравнения $dz/dx = \partial \psi / \partial z$. На рис. 1 представлены лучи в случае совпадения осей акустического пучка и звукового канала, $z_0 = 0$. За счет фокуси-

ровки в звуковом канале образуются области сгущения лучей, соответствующие областям фокусировки. Видно, что при уменьшении роли дифракции ($L_{\text{dif}} \gg L_{\text{inh}}$, рис. 1б) лучи сильнее сгущаются в области фокусировки. На рис. 2 представлены лучи для случая несовпадения осей пучка и звукового канала, $z_0 \neq 0$. В этом случае пространственная структура оказывается более сложной. С одной стороны, в областях дефокусировки лучи расходятся сильнее. С другой стороны, появляются области дополнительной фокусировки. На рис. 3 построена зависимость пиковой амплитуды p_{peak} от расстояния для случая совпадения осей пучка и звукового канала. До расстояния образования разрыва пиковая амплитуда совпадает с амплитудой синусоидального сиг-

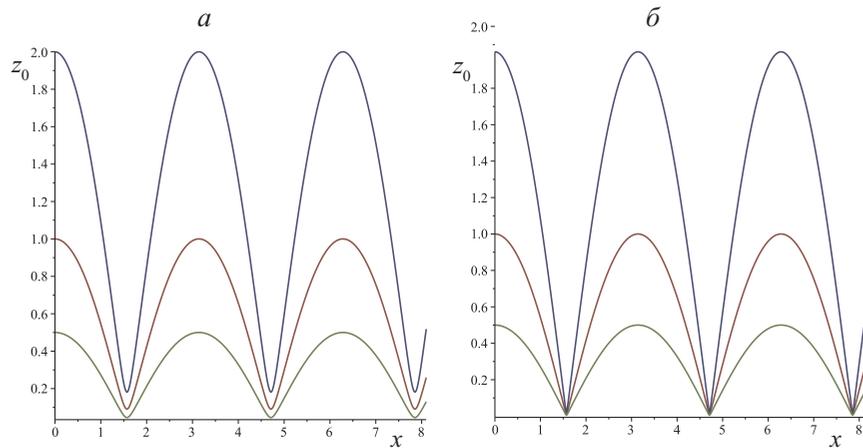


Рис. 1: Траектории лучей при совпадении осей акустического пучка и звукового канала, а — $L_{diff}/L_{inh} = kd^2/2a = 5$, б — $L_{diff}/L_{inh} = kd^2/2a = 50$

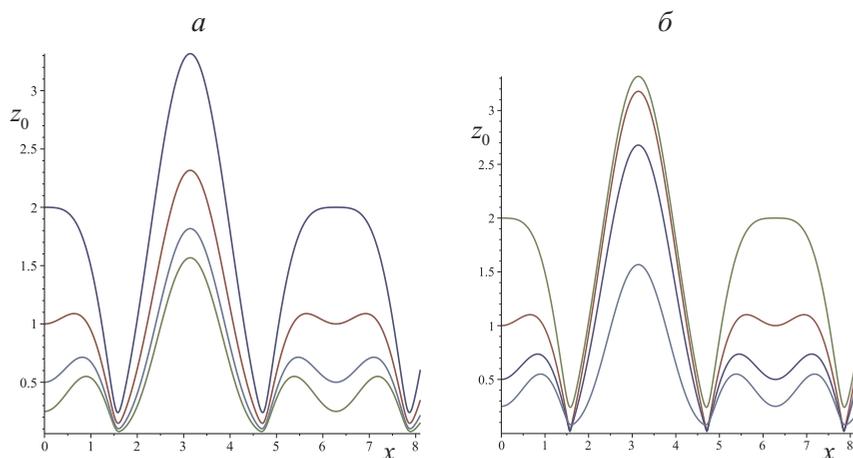


Рис. 2: Траектории лучей при несовпадении осей акустического пучка и звукового канала, а — $L_{diff}/L_{inh} = kd^2/2a = 5$, б — $L_{diff}/L_{inh} = kd^2/2a = 50$

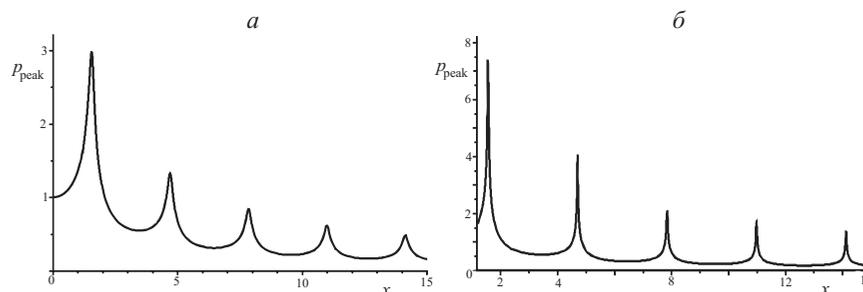


Рис. 3: Поле вдоль оси волновода при совпадении осей пучка и звукового канала, а — $L_{diff}/L_{inh} = kd^2/2a = 5$, б — $L_{diff}/L_{inh} = kd^2/2a = 50$

нала, после образования разрыва — со значением на разрыве. Видны последовательно расположенные области фокусировки за счет неоднородности распределения пузырьков. Конечность поля в фокусах обеспечивается учетом дифракционных эффектов, при этом

пики тем более резкие, чем меньше относительная роль дифракции. Убывание максимальной пиковой амплитуды связано с процессами нелинейного затухания на ударных фронтах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе показана возможность формирования волновода в структурно-неоднородной среде, содержащей сильно сжимаемые включения — газовые пузырьки. Подобные ситуации могут складываться как в природных средах — придонном осадочном слое, так

и создаваться специально при конструировании искусственных сред и метаматериалов. Такие среды позволяют управлять трансформацией пространственно-временной структуры акустической волны.

Работа поддержана грантом Российского Научного Фонда № 14-22-00042.

-
- [1] Руденко О.В. УФН. **176**. С. 77. (2006).
 [2] Голубев В.Н., Петухов Ю.В., Шаронов Г.А. / Акуст. журн. **34**, № 1. С. 200. (1988).
 [3] Комиссарова Н.Н., Фурдуев А.В. Акуст. журн. **50**, № 5. С. 666. (2004).
 [4] Кононов В.А., Доманов М.М. Океанология. **39**, № 3. С. 370. (1999).
 [5] Григорьев В.А., Луньков А.А., Петников В.Г. Акуст. журн. **61**, № 1. С. 90. (2015).
 [6] Руденко О.В., Гурбатов С.Н., Хедберг К.М. Нелинейная акустика в задачах и примерах. (М.: Физматлит, 2007).
 [7] Руденко О.В., Соляян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. (М.: Наука, 1975).
 [8] Красильников В.А., Крылов В.В. Введение в физическую акустику. (М.: Наука, 1984).
 [9] Гамильтон М.Ф., Руденко О.В., Хохлова В.А. Акуст. журн. **43**, № 1. С. 48. (1997).
 [10] Enflo V.O., Rudenko O.V. Acta acustica. **88**. P. 155. (2002).
 [11] Гусев В.А., Жостков Р.А., Преснов Д.А. Эволюция интенсивных акустических волн в неоднородных средах в рамках обобщенного уравнения Бюргерса. Сборник трудов Научной конференции «Сессия Научного совета РАН по акустике и XXV сессия Российского акустического общества». **1**. С. 129. (М.: ГЕОС, 2012).

Waveguide propagation of intensive acoustic signals in the medium with gas bubbles

V.A. Gusev

Department of Acoustics, Faculty of Physics, M.V.Lomonosov Moscow State University,
 Moscow 119991, Russia
 E-mail: vgusev@bk.ru

In this paper the possibility of the sound channel forming by the inhomogeneous distribution of strongly compressible inclusions — gas bubbles in homogeneous water-like media is investigated. The method of calculation of the acoustic field of intense wave beams near the axis of the sound channel is proposed. Field of the intense Gaussian beam is calculated for the case of the mismatch of its axis with the axis of the sound channel. The methods developed can be applied to calculate the intense fields in natural media, such as gas-saturated bottom sediments, and in the built media — metamaterials that let to control the transformation of space-time structure of the field.

PACS: 43.25.+y, 47.55.dd, 47.40.Nm, 43.30.+m

Keywords: liquid with bubbles, metamaterials, sound channel, benthic waveguide, nonlinear acoustic beams.

Received 14.11.2014.

Сведения об авторе

Гусев Владимир Андреевич — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник; тел.: (495) 939-29-43, e-mail: vgusev@bk.ru.