Продольно-поперечная динамика импульсов обобщённого нелинейного уравнения Шрёдингера

В.А. Халяпин[1,2*]

[1]*Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта, физический факультет, кафедра телекоммуникаций Россия, 236041, Калининград, улица А.Невского, д. 14*

[2]*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Калининградский государственный технический университет», кафедра физики Россия, 236000, Калининград, Советский проспект, д.1*

На основе метода моментов получена система уравнений, описывающая динамику параметров электромагнитного импульса. Рассмотрена поперечная динамика импульсов, имеющих супергауссовый профиль.

PACS: 42.81. УДК: 621.372.
Ключевые слова: солитон, супергауссовый импульс, дифракция.

В настоящей работе рассматривается динамика импульсов, распространяющихся в области прозрачности диэлектрика. Анализ динамики параметров импульса проводится на основе метода моментов.

Обобщённое нелинейное уравнение Шрёдингера для огибающей электромагнитного импульса ψимеет вид

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}-\frac{\beta_3}{6}\frac{\partial^3\psi}{\partial\tau^3}-i\gamma\psi\left|\psi\right|^2+ +\frac{\gamma}{\omega_0}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\psi\left|\psi\right|^2\right)-\frac{i\mu}{2}\Delta_\perp\psi=0. \quad (1)$$

Здесь β_2 — коэффициент групповой дисперсии, β_3 определяет дисперсию третьего порядка, γ — коэффициент при кубической нелинейности, ω_0 — центральная частота спектра импульса, $\mu=-n/2c\Omega$, n — показатель преломления среды, $\tau=t-z/v_g$—время в сопутствующей системе координат, v_g — групповая скорость импульса, z — ось, вдоль которой распространяется сигнал.

Определим моменты импульса с помощью следующих выражений [1]

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\left|\psi\right|^2 rd\tau dr, \quad (2)$$

$$T=\frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\left|\psi\right|^2 \tau rd\tau dr, \quad (3)$$

$$\Omega=\frac{i}{2E}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial\tau}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial\tau}\right) rd\tau dr, \quad (4)$$

$$\widetilde{C}=\frac{i}{2E}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\tau-T\right)\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial\tau}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial\tau}\right) rd\tau dr, \quad (5)$$

$$\sigma^2=\frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\left(t-T\right)^2\left|\psi\right|^2 rd\tau dr, \quad (6)$$

$$\widetilde{R}^2=\frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\left|\psi\right|^2 r^3 d\tau dr, \quad (7)$$

$$\widetilde{\varepsilon}=\frac{i}{2E}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial\tau}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial\tau}\right) r^2 d\tau dr, \quad (8)$$

где E — энергия импульса, T — величина, пропорциональная добавке к групповой скорости, Ω — смещение центрально частоты сигнала, σ — его длительность, $\widetilde{C}$ — определяет модуляцию частоты, $\widetilde{R}$ — параметр, пропорциональный поперечному радиусу, $\widetilde{\varepsilon}$ — параметр, характеризующий кривизну импульса.

Огибающую поля запишем следующим образом

$$\psi=B\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}+ +i\left(\varphi+\Omega\left(\tau-T\right)+C\frac{\left(\tau-T\right)^2}{2\tau_p^2}-\frac{\varepsilon r^2}{2R^2}\right)\right]. \quad (9)$$

Здесь B — амплитуда сигнал, n — положительное целое числа. Из (2)–(8) с учётом (1) и (9) получаем систему уравнений на параметры импульса

$$E=B^2R^2\tau_p\frac{\Gamma\left(1/n\right)}{n}=const,$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}=\beta_2\Omega+\frac{\beta_3}{2}\left(\Omega^2+\left(1+\frac{\pi^2}{4}C^2\right)\frac{1}{3\tau_p^2}\right)+\frac{\gamma B^2}{\omega_0 2^{1/n}},$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z}=\frac{2\gamma B^2 C}{3\omega_0\tau_p^2 2^{1/n}},$$

*E-mail: slavasxi@pochtamt.ru

$$\frac{\partial \tau_p}{\partial z} = \frac{\beta_2 C}{\tau_p} + \beta_3 \frac{C\Omega}{\tau_p},$$

$$\frac{\partial C}{\partial z} = \left(\frac{4}{\pi^2} + C^2\right)\frac{\beta_2}{\tau_p^2} + \frac{12}{\pi^2}\beta_2\Omega^2 + \\ + \frac{\beta_3\Omega}{2\tau_p^2}\left(\frac{4}{\pi^2} + 3C^2\right) + \frac{6}{\pi^2}\beta_3\Omega^3 + \\ + \frac{4\gamma B^2}{\pi^2 2^{1/2}} + \frac{16\gamma\Omega B^2}{\omega_0\pi^2 2^{1/2}},$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{\mu\varepsilon}{R},$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = \frac{n}{\Gamma(2/n)}\left[-\frac{\mu n}{R^2} - \frac{\Gamma(2/n) R^2 R'^2}{\mu} + \right. \\ + \frac{2\gamma B^2 \Gamma((1+n)/n)}{2^{1/n}3} - \\ \left. - \frac{2\gamma B^2\Omega}{2^{1/n}3\omega_0}\left[\Gamma((1+n)/n) - 2\Omega\right]\right].$$

Здесь $\tau_p^2 = K\sigma^2 = (12/\pi^2)\sigma^2$, $C = K\widetilde{C}$, $R^2 = D\widetilde{R}^2 = \widetilde{R}^2\Gamma(1/n)/\Gamma(2/n)$, $\varepsilon = D\widetilde{\varepsilon}$, $\Gamma(x)$ — гамма функция. Из двух последних уравнений системы находим уравнение, определяющее динамику поперечного радиуса импульса

$$\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} = \frac{\mu}{\Gamma(2/n) R}\left[\frac{\mu n^2}{R^2} - \frac{2\gamma B^2 \Gamma(1/n)}{2^{1/n}3} + \right. \\ \left. + \frac{2\gamma B^2\Omega}{2^{1/n}3\omega}\left(2n - \Gamma(1/n)\right)\right]. \quad (10)$$

Как видно из (10), импульс начинает расходиться благодаря дифракции, если $R''(0) > 0$. Если же нелинейность велика, то дифракционная расходимость начинает подавляться и начинается самофокусировка $R''(0) < 0$. Граничная ситуация $R''(0) = 0$ определяет пороговое условие самофокусировки. Из этого условия и (10) находим «критическую мощность» импульса [2]

$$B^2R^2 = \frac{2^{(1-n)/n}3n^2\mu}{\gamma\left(\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{\Omega}{\omega}\right) - \frac{2n\Omega}{\omega}\right)}. \quad (11)$$

В случае гауссовых импульсов ($n = 1$) из (11) находим

$$B^2R^2 = \frac{3\mu}{\gamma}\left(1 - \frac{\Omega}{\omega_0}\right)^{-1}. \quad (12)$$

Из (12) следует, что критическая мощность импульса увеличивается, если его частота сдвигается в красную область спектра

[1] *Santhanam J.* Opt.Commun. A. **222**. P. 413. (2003).
[2] *Карлов Н.В., Кириченко Н.А.* Колебания, волны, структуры. (М.: Физматлит, 2003).

Longitudinal–Transverse Dynamics of Pulses of Generalized Nonlinear Schrodinger Equation

V.A. Khalyapin[1,2]

[1]*Immanuel Kant Baltic Federal University, Department of Physic, Faculty of Telecommunications. Kaliningrad, 236041, Russia*
[2]*Kaliningrad State Technical University, Faculty of Physic. .Kaliningrad 236000 Russia*
E-mail: slavasxi@pochtamt.ru

Using the moment method the system of equations describing the dynamics of electromagnetic pulse parameters was obtained. The transversal dynamics of super-Gaussian shape pulses are considered.

PACS: 42.81

Keywords: soliton, super-Gaussian shape pulse, diffraction.

Сведения об авторах

Халяпин Вячеслав Анатольевич — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: 8(906)2165558, e-mail: slavasxi@pochtamt.ru.