

Гравитационное излучение заряда в электромагнитном поле

Ю. В. Грац*

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра теоретической физики.
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Статья поступила 25.12.2013; Подписана в печать 07.01.2014)

Показано, что в картине Фарри матричный элемент излучения гравитона электроном в поле произвольной плоской электромагнитной волны пропорционален матричному элементу излучения фотона. Коэффициент пропорциональности является чисто классической величиной и зависит только от направления распространения гравитона.

Обсуждается возможность перенесения полученных результатов на случай произвольного внешнего электромагнитного поля.

PACS: 03.70.+k, 04.30.-w

УДК:530.12, 530.145

Ключевые слова: гравитационное излучение, картина Фарри

ВВЕДЕНИЕ

Интерес к процессам излучения гравитационных волн зарядами во внешних электромагнитных полях различной конфигурации возник достаточно давно. Во многом это связано с возможными астрофизическими и космологическими приложениями (см., например, [1–5]). Параллельно было замечено, что поскольку источником гравитационного излучения является полный сохраняющийся тензор энергии-импульса излучающей системы, то гравитационное излучение несет более подробную информацию о природе поля, в котором движется частица, и его структуре, чем электромагнитное излучение при том же законе движения.

В ходе изучения взаимодействия гравитационных волн с электродинамическими системами был обнаружен целый ряд интересных особенностей. Отметим две. Во-первых, это эффект резонансной трансформации электромагнитного излучения в гравитационное в постоянном электромагнитном поле [6–9], возможные следствия которого продолжают обсуждаться в периодической литературе [5]. Во-вторых, пропорциональность спектров гравитационного и электромагнитного излучений заряженной частицы в поле плоской монохроматической электромагнитной волны, которая впервые была обнаружена нами [10, 11] и подтверждена впоследствии в работах других авторов [12, 13] (см. также [14]). Одним из преимуществ нашего подхода явилось то, что, работая в рамках квантовопалеовой картины Фарри, мы доказали указанную пропорциональность, не прибегая к громоздким вычислениям на самом первом их этапе. Другим — возможность получения результатов, пригодных как в классической, так и в квантовой области. При этом в последнем случае он позволяет учитывать нелинейные по электромагнитному полю многофотонные процессы.

Предлагаемая работа обобщает результаты работ [10, 11] на случай произвольной плоской электромагнитной волны.

В работе используется система единиц $\hbar = c = 1$ и метрика пространства-времени с сигнатурой $(+ - - -)$. Греческие индексы принимают значения $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$.

1. АМПЛИТУДА ИЗЛУЧЕНИЯ ГРАВИТОНА ЭЛЕКТРОНОМ В ПОЛЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Рассмотрим матричный элемент, соответствующий излучению гравитона электроном во внешнем классическом электромагнитном поле. В рамках линеаризованной квантовой гравитации лагранжиан взаимодействия представляет собой сумму двух членов

$$\mathcal{L}_{int} = \mathcal{L}_{gr} + \mathcal{L}_{em}, \text{ где } \mathcal{L}_{gr} = -\frac{1}{2} h_{\mu\nu} \mathcal{T}^{\mu\nu}$$

описывает взаимодействие возмущений гравитационного поля $h_{\mu\nu}$ со спинорным и электромагнитным полями ($\mathcal{T}_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса полей), а \mathcal{L}_{em} — лагранжиан взаимодействия квантовой электродинамики

$$\mathcal{L}_{em} = -e\bar{\psi}(x)\hat{A}(x)\psi(x).$$

Четыре-потенциал электромагнитного поля $A^\mu(x)$ предполагается состоящим из двух слагаемых — классического $A_{\text{вн}}^\mu$, описывающего внешнее электромагнитное поле, и квантованной части.

В картине Фарри [15] в низшем порядке теории возмущений по константе гравитационного взаимодействия матричный элемент рассматриваемого процесса имеет вид

$$S_{fi} = S_{fi}^{(1)} + S_{fi}^{(2)} + S_{fi}^{(3)},$$

где

$$\begin{aligned}
 S_{fi}^{(1)} &= \sqrt{\frac{\pi G}{\omega'}} e_{\mu\nu}^* \times \times \int d^4x e^{i(k'x)} (\bar{\psi}_{p'}(x) \gamma^\mu \psi_p^\nu(x) - \bar{\psi}_{p'}^{\nu}(x) \gamma^\mu \psi_p(x)), \\
 S_{fi}^{(2)} &= -i2e \sqrt{\frac{\pi G}{\omega'}} e_{\mu\nu}^* \int d^4x e^{i(k'x)} \bar{\psi}_{p'}(x) \gamma^\mu \psi_p(x) A_{\text{BH}}^\nu(x), \\
 S_{fi}^{(3)} &= -i4e \sqrt{\frac{\pi G}{\omega'}} e_{\mu\nu}^* \int d^4x \bar{\psi}_{p'}(x) J^{\mu\nu}(x) \psi_p(x).
 \end{aligned} \tag{1}$$

В (1)

$$J^{\mu\nu} = \int dx' e^{i(k'x')} (\gamma^\lambda \partial^\nu - \gamma^\nu \partial^\lambda) D_c(x-x') F_{\text{BH}\lambda}^\mu(x'), \tag{2}$$

$$D_c(x-x') = - \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq(x-x')}}{q^2 + i\varepsilon},$$

$\psi_p(x)$ — точное решение уравнения Дирака во внешнем поле, p — коллективный индекс, обозначающий набор квантовых чисел состояния частицы, k' — 4-импульс, а $e_{\mu\nu}(k')$ — тензор поляризации гравитона,

$$e_{\mu\nu} = e_{\nu\mu}, \quad e_{\mu\nu} k'^\nu = 0 = e_\mu^\mu, \quad e_{\mu\nu}^* e^{\mu\nu} = 1. \tag{3}$$

Если внешнее поле представляет собой поле плоской электромагнитной волны, то 4-потенциал A_{BH}^μ и тензор поля $F_{\text{BH}}^{\mu\nu}$ зависят от координат и времени только через величину $\varphi = (kx)$, где k — изотропный вектор. В этом случае ψ_p — это хорошо известные решения Волкова [16], при этом p имеет смысл импульсной переменной, $p^2 = m^2$.

Как известно, соотношения (3) не фиксируют однозначно калибровку поля гравитона. Поэтому относительный вклад каждого из трех слагаемых в (1) зависит от выбора калибровки.

В качестве дополнительных фиксирующих калибровку условий выберем

$$e_{\mu\nu}(k') k'^\nu = 0. \tag{4}$$

Соответствующие тензоры поляризации легко построить. Действительно, рассмотрим два пространственноподобных 4-вектора

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_\lambda^{(1)} &= \frac{1}{(kk')} e_{\lambda\mu\nu\rho} \varepsilon^{(2)\mu} k'^\nu k^\rho \quad \text{и} \\
 \varepsilon_\lambda^{(2)} &= \frac{e_{\lambda\mu\nu\rho} k'^\mu k^\nu p^\rho}{(kk') \left[2(kp)(k'p)/(kk') - m^2 \right]^{1/2}}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Как нетрудно проверить, они обладают следующими свойствами

$$(\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(1)}) = (\varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(2)}) = -1, \quad (\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}) = 0,$$

$$(\varepsilon^{(a)}, k) = (\varepsilon^{(a)}, k') = 0 \quad a = 1, 2,$$

$$(\varepsilon^{(2)}, p) = 0, \quad (\varepsilon^{(1)}, p) = \left[2(kp)(k'p)/(kk') - m^2 \right]^{1/2}.$$

Это позволяет в качестве двух независимых состояний поляризации гравитона выбрать состояния, задаваемые тензорами поляризации

$$\begin{aligned}
 e_{\mu\nu}^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varepsilon_\mu^{(1)} \varepsilon_\nu^{(1)} - \varepsilon_\mu^{(2)} \varepsilon_\nu^{(2)} \right), \\
 e_{\mu\nu}^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varepsilon_\mu^{(1)} \varepsilon_\nu^{(2)} + \varepsilon_\mu^{(2)} \varepsilon_\nu^{(1)} \right).
 \end{aligned} \tag{6}$$

При этом требования (3) и (4) будут удовлетворены.

Далее, представим поле волны в виде

$$A_{ext}^\mu(\varphi) = \int ds A_{\text{BH}}^\mu(s) e^{-is\varphi}. \tag{7}$$

Подставляя соответствующее (7) выражение для тензора электромагнитного поля $F_{\text{BH}}^{\mu\nu}$ в (2) и отбрасывая члены, которые при свертывании с тензорами поляризации (6) в силу условий калибровки дают нулевой вклад в матричный элемент (1), получаем

$$J^{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{2} e^{ik'x} \gamma^\nu A_{\text{BH}}^\mu(\varphi).$$

Откуда следует, что в выбранной калибровке

$$S_{fi}^{(3)} = -S_{fi}^{(2)}$$

и их суммарный вклад равен нулю.

Рассмотрим $S_{fi}^{(1)}$. Для этого нам достаточно знать только общую структуру волковского решения. Она такова

$$\psi_p(x) = e^{-i(px)} F_p(\varphi) = \int ds e^{-i(px) - is\varphi} F_p(s). \quad (8)$$

Откуда и из (4) следует, что дифференцирование решения Волкова в $S_{fi}^{(1)}$ эквивалентно замене $\psi_p^\nu = -ip^\nu \psi_p$. В результате мы получаем, что рассматриваемый матричный элемент (1) может быть приведен к виду

$$S_{fi}^{(P)} = -i\sqrt{2\pi G} e_{\mu\nu}^{(P)*} (p + p')^\nu \times \int d^4x \frac{e^{i(k'x)}}{\sqrt{2\omega'}} \bar{\psi}_{p'}(x) \gamma^\mu \psi_p(x), \quad P = 1, 2, \quad (9)$$

что с точностью до общего множителя формально совпадает с матричным элементом излучения фотона с соответствующей поляризацией

Далее, из (8) следует, что стоящий в (9) интеграл можно представить в виде двойного интеграла по $ds ds'$ от выражения, содержащего дельта-функцию $\delta^4(p + sk - s'k - p' - k')$. Учитывая этот закон сохранения, свойства тензоров поляризации (3) и условие (4), мы получаем, что в предынтегральном множителе в (9) 4-импульс p' может быть заменен на p .

В результате мы находим, что элемент матрицы рассеяния, соответствующий излучению гравитона с 4-импульсом k' и поляризацией P , которая задается тензорами поляризации (6), пропорционален матричному элементу излучения фотона с тем-же 4-импульсом и поляризацией, которая определяется вектором (5) с тем же индексом P :

$$S_{gr}^{(P)} = \frac{\sqrt{G}\Gamma}{e} S_{em}^{(P)}, \quad (10)$$

где фактор Γ имеет следующий вид

$$\Gamma = \left[2 \frac{(kp)(k'p)}{(kk')} - m^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

Обращает на себя внимание тот факт, что коэффициент пропорциональности (11) в выражении (10) является чисто классической величиной и из величин, определяющих конечное состояние системы, зависит только от направления вылета гравитона. Это означает, что все дифференциальные величины, которые могут быть получены после квадрирования матричного элемента (10) и усреднения (суммирования) по начальным (конечным) состояниям, исключая интегрирование по углам вылета гравитона, будут пропорциональны соответствующим величинам, относящимся к случаю излучения фотона с тем же 4-импульсом и соответствующей поляризацией.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Возникает вопрос, в какой мере полученные в предыдущем разделе результаты могут быть перенесены на общий случай произвольного внешнего электромагнитного поля.

Постоянные и однородные поля должны быть рассмотрены отдельно, поскольку здесь процесс гравитационного излучения будет в основном определяться эффектом прямой трансформации электромагнитного излучения частицы в гравитационное [6]. В других случаях определенные упрощения могут быть достигнуты при релятивистских энергиях частицы. Действительно, в системе покоя релятивистской частицы почти любое внешнее электромагнитное поле выглядит как плосковолновое. Поэтому в области релятивистских энергий частицы обнаруженная пропорциональность спектрально-угловых распределений должна по-прежнему иметь место, по крайней мере приближенно.

Благодарности

Автор выражает благодарность проф. А. В. Борису за интерес к работе и обсуждение полученных результатов.

[1] Зельдович Я. Б. ЖЭТФ. **65**. С.1311. (1973).
 [2] Papini G., Valluri S.R. Phys. Repts. **33**. P. 51. (1977).
 [3] Magueijo J. C. R. Phys. Rev. D **49**. 671. (1994).
 [4] Chen P. Phys. Rev. Lett. **74**. 634. (1995).
 [5] Dolgov A. D., Ejlli D. Phys. Rev. D **87**. 104007. (2013). ArXiv: 1211.0500v2 [gr-qc].
 [6] Герценштейн М. Е. ЖЭТФ. **41**. С. 113. (1961).

[7] Пустовойт В. И., Герценштейн М. Е. ЖЭТФ. **42**. С. 163. (1962).
 [8] Boccaletti D., de Sabbata V., Fortini P., Gualdi C. Nuovo Cim. B. **70**. P. 129. (1971).
 [9] Papini G., Valluri S.R. Can. J. Phys. **53**. №20. P. 2306. (1975).
 [10] Гальцов Д. В., Грац Ю. В. ЖЭТФ. **41**. С. 387. (1976).

- [11] Гальцов Д. В., Грац Ю. В., Петухов В. И. Излучение гравитационных волн электродинамическими системами. М.: Изд. МГУ. 1984.
- [12] Никишов А. И., Ритус В. И. ЖЭТФ. **96**. С. 1547. (1989).
- [13] Сангуэса М. ЖЭТФ. **99**. С. 1649. (1991).
- [14] Никишов А. И., Ритус В. И. УФН. **180**. №11. С. 1135. (2010).
- [15] Furry W. H. Phys. Rev. Second Series. **81**. P. 115. (1951).
- [16] Волков Д. М. ЖЭТФ. **7**. С. 1286. (1937).

Gravitational radiation from a charge in electromagnetic field

Yu. V. Grats

*Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University,
Moscow 119991, Russia
E-mail: grats@phys.msu.ru*

It is shown that in the Furry representation matrix element for a graviton emission by an electron in the field of a plane electromagnetic wave is proportional to the matrix element for the emission of a photon. The proportionality coefficient is a pure classical and depends on the direction of graviton propagation only.

Possibility to transfer the results for the case of an arbitrary external electromagnetic field is discussed.

PACS:03.70.+k, 04.30.-w

Keywords: gravitational radiation, Furry representation.

Received 25.12.2013

Сведения об авторах

Грац Юрий Владимирович — докт. физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-53-89, e-mail: grats@phys.msu.ru.