

Сингулярности электромагнитного поля волновода в окрестности особых точек

А. Н. Боголюбов* И. Е. Могилевский†

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Статья поступила 12.07.2017; Подписана в печать 12.07.2017)

В работе строится асимптотическое представление электромагнитного поля металлического волновода с диэлектрическим заполнением, неоднородным в поперечном сечении, в окрестности ребра металло-диэлектрического клина. Показано, что продольная компонента электрического поля ограничена в окрестности ребра, а ее производная имеет степенную особенность.

PACS: 02.60.Lj, 03.50.De, 41.20.-q

УДК: 519.634.

Ключевые слова: волноведущая система, сингулярность поля в окрестности ребра.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время волноводы сложного сечения (ВСС) находят широкое применение при конструировании различных СВЧ-устройств, таких как антенны, фильтры, поляризаторы, мультиплексоры и др. [1–5]. Применение ВСС позволяет создавать устройства, превосходящие по своим параметрам их аналоги на прямоугольных и круглых волноводах. Включение продольных металлических выступов в волновод позволило улучшить ряд его характеристик, в частности, существенно расширить полосу частот одномодового режима работы [2–5]. В последние два десятилетия наблюдается бурное развитие специализированных программных пакетов компьютерного моделирования различных высокочастотных радиотехнических задач прямыми численными методами, что позволяет на сегодняшний момент решить в строгой постановке практически любую задачу анализа многих волноводных элементов и устройств, в том числе и на волноводах со сложным поперечным сечением. Однако, как показывают многочисленные исследования [1–4], решение задач синтеза, особенно в случае наличия большого числа свободных параметров геометрии, оказывается практически невыполнимо в отсутствие хорошего начального приближения, поскольку либо требует огромного времени счета, либо вообще не приводит к конечному результату. Поэтому развитие базы численно-аналитических методов и поиск новых прототипов, позволяющих с достаточно высокой скоростью и точностью решать широкий круг задач, связанных с электродинамическим анализом и синтезом ряда ключевых радиотехнических устройств на волноводах сложного сечения, является важной и востребованной задачей для разработчиков аппаратуры сантиметрового и миллиметрового диапазонов [1]. Известно, что наличие ребер на границе и разрывов диэлектрической проницаемости приводит к появлению особенностей у электромагнитного поля в окрестности особой точки границы

или неоднородности заполнения [5–7]. Одним из способов преодоления этих проблем является выделение особенности решения в явном виде, то есть построение асимптотики по гладкости электромагнитного поля в окрестности ребра в волноводе [7]. При этом существенно используются результаты по асимптотике решения эллиптических краевых задач, представленные в работе В. А. Кондратьева [8], а также С. А. Назарова и Б. А. Пламеневского [9]. Здесь и далее под словом «асимптотическое представление» имеется в виду запись решения в виде суммы сингулярной и гладкой частей.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается металлический радиоволновод с диэлектрическим заполнением, неоднородным в поперечном сечении. Следуя работе [10], предполагается, что электромагнитное поле волновода имеет гармоническую зависимость от времени вида $e^{-i\omega t}$. Боковая поверхность считается идеально проводящей, волновод представляет собой цилиндр $Q = \{(x, y) \in \Omega, z \in (-\infty, \infty)\}$. Магнитная проницаемость среды, заполняющей волновод, равна $\mu(x, y) \equiv 1$. Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(x, y)$ — кусочно непрерывная скалярная вещественная функция. Исследуется случай, когда граница волновода имеет входящее ребро с двугранным углом ω_0 . Через ребро проходит плоскость разрыва диэлектрической проницаемости, составляющая двугранный угол β с границей волновода (рис. 1).

При указанных условиях для компонент электромагнитного поля $\mathbf{A} = \{H_x, H_y, E_z\}$ в работе [10] получена следующая математическая постановка задачи (для собственных векторов)

$$\begin{aligned} -\operatorname{grad} \operatorname{div} H_{\perp} - k^2 \varepsilon H_{\perp} - ik \varepsilon \operatorname{rot} E_z &= -\gamma^2 H_{\perp}, \\ -ik \operatorname{rot} \varepsilon H_{\perp} - \operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad} E_z &= -\gamma^2 \varepsilon E_z, \end{aligned} \quad (1)$$

где $k = \frac{\omega}{c}$ — волновое число, γ — спектральный параметр, предполагается, что все функции имеют зависимость от z вида $e^{i\gamma z}$. Граничные условия и условия

*E-mail: bogan7@yandex.ru

†E-mail: mogilev@phys.msu.ru

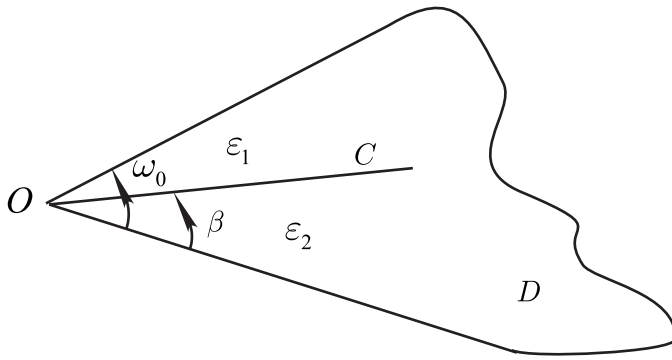


Рис. 1: Металло-диэлектрический клин

сопряжения имеют вид

$$\begin{aligned} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} &= 0, E_z|_{\partial\Omega} = 0, \\ [(\mathbf{H} \cdot \mathbf{n})]_C &= 0, [E_z]_C = 0, (\mathbf{H} \times \mathbf{n})|_C = 0, \\ [\operatorname{div} H_{\perp}]_C &= 0, [\varepsilon (\operatorname{grad} E_z + ik (\mathbf{H} \times \mathbf{i}_z)) \cdot \mathbf{n}]|_C = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь использованы следующие обозначения: $H_{\perp} = \{H_x, H_y\}$, C — линия разрыва диэлектрической проницаемости, \mathbf{n} — нормаль к границе области или линии разрыва, γ — постоянная распространения,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} H_{\perp} &= \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y}, \operatorname{rot} H_{\perp} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}, \\ \operatorname{grad} E_z &= \mathbf{i}_x \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial E_z}{\partial y}, \operatorname{rot} E_z = \mathbf{i}_x \frac{\partial E_z}{\partial y} - \mathbf{i}_y \frac{\partial E_z}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3)$$

В работе [10] рассмотрен вопрос о поиске слабых решений задачи (1)-(2) в гильбертовом пространстве

$$W = H_0(\operatorname{div}) \oplus \dot{H}^1,$$

где $\|\mathbf{A}\|_W^2 = \|H_{\perp}\|_{H_0(\operatorname{div})}^2 + \|E_z\|_{\dot{H}^1}^2,$

$$\begin{aligned} H_0(\operatorname{div}) &= \left\{ H_{\perp} | H_{\perp} \in (L_2(\Omega))^2, \right. \\ &\quad \left. \operatorname{div} H_{\perp} \in L_2(\Omega), (H_{\perp} \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \\ \dot{H}^1(\Omega) &= \left\{ \xi | \xi \in H^1(\Omega), \xi|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \\ \|H_{\perp}\|_{H_0(\operatorname{div})}^2 &= \|H_{\perp}\|_{(L_2(\Omega))^2}^2 + \|\operatorname{div} H_{\perp}\|_{L_2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Для слабой постановки задачи (1)-(2) показано, что данная задача порождает ограниченный оператор $T : (L_2(\Omega))^3 \rightarrow W$ компактный в подпространстве V пространства W , выделяемом дополнительным условием

$$\operatorname{rot} H_{\perp} = -ik\varepsilon E_z \quad (4)$$

которое понимается в смысле обобщенных функций. Таким образом, спектр задачи (1)-(2), рассматриваемой в указанном пространстве, состоит из счетного множества возрастающих по модулю собственных значений.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ, КОГДА ПОПЕРЕЧНОЕ СЕЧЕНИЕ ВОЛНОВОДА ВСЯ ПЛОСКОСТЬ

А. Вывод уравнений

Чтобы провести исследование поведения электромагнитного поля в окрестности ребра границы волновода, через которое проходит плоскость разрыва диэлектрической проницаемости, сначала данная задача рассматривается на всей плоскости вместо области Ω . В дальнейшем использование срезающей функции позволяет свести задачу в конечном поперечном сечении волновода к задаче на всей плоскости и использовать полученные результаты для асимптотического представления решения. Дополнительно предполагается, что диэлектрическая проницаемость является кусочно-постоянной (по крайней мере, в окрестности ребра). Для удобства описания в поперечном сечении вводится полярная система координат с центром на ребре волновода.

В полярной системе координат формулы (3) примут вид: $H_{\perp} = \{H_r, H_{\varphi}\}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} H_{\perp} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial H_{\varphi}}{\partial \varphi}, \\ \operatorname{rot} H_{\perp} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_{\varphi}) - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi}, \\ \operatorname{grad} E_z &= \mathbf{i}_r \frac{\partial E_z}{\partial r} + \mathbf{i}_{\varphi} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi}, \\ \operatorname{rot} E_z &= \mathbf{i}_r \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \mathbf{i}_{\varphi} \frac{\partial E_z}{\partial r}. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим второе уравнение системы (1), домножим его на $\frac{1}{\varepsilon}$ и вычислим производные (в смысле обобщенных функций), после преобразований получим

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} E_z &= -\frac{2\alpha}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} (r, \beta) \delta(\varphi - \beta) + \\ &\quad + \gamma^2 E_z - \frac{ik}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_{\varphi}) + \frac{ik}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\alpha = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}, \frac{\partial u}{\partial \varphi} \equiv \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - ikrH_r.$

Первое векторное уравнение системы (1) после умножения на r дает два скалярных уравнения

$$\begin{cases} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_r) \right) + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial (rH_{\varphi})}{\partial \varphi} \right) = \\ \quad = -k^2 \varepsilon (rH_r) - ik\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + \gamma^2 (rH_r), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} (rH_r) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (rH_{\varphi})}{\partial \varphi^2} = \\ \quad = -k^2 \varepsilon (rH_{\varphi}) + ik\varepsilon r \frac{\partial E_z}{\partial r} + \gamma^2 (rH_{\varphi}), \end{cases} \quad (7)$$

дополнительное условие (4) примет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_{\varphi}) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial (rH_r)}{\partial \varphi} = -ik\varepsilon E_z.$$

Введем дополнительные обозначения

$$\begin{aligned} f(r, \varphi) &\equiv \gamma^2 E_z, \\ f_r(r, \varphi) &= -ik\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \gamma^2 v(r, \varphi), \\ f_\varphi(r, \varphi) &= -k^2 \varepsilon w(r, \varphi) + ik\varepsilon r \frac{\partial E_z}{\partial r} + \gamma^2 w(r, \varphi), \\ p_z(r, \varphi) &= -ikE_z. \end{aligned}$$

Система (7) преобразуется в следующую

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} = f_r(r, \varphi), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = f_\varphi(r, \varphi), \end{cases} \quad (8)$$

с дополнительным условием

$$\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = \varepsilon p_z(r, \varphi). \quad (9)$$

Из условия (9) следует

$$-\frac{ik}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{ik}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = -ik\varepsilon p_z(r, \varphi).$$

Подставляя в (6), получаем

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} E_z = -\frac{2\alpha}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi}(r, \beta) \delta(\varphi - \beta) + f(r, \varphi). \quad (10)$$

Таким образом, для компоненты электрического поля E_z получено уравнение, учитывающее с помощью обобщенных функций условия сопряжения электромагнитного поля на линиях разрывах диэлектрической проницаемости.

В. Построение решения

Следуя В.А. Кондратьеву [8], введем пространство функций V_γ^l с нормой

$$\|u\|_{V_\gamma^l}^2 = \sum_{j+k \leq l} \left[\int_0^\beta d\varphi \int_0^\infty r^{2(\gamma-l+j)} \left| \frac{\partial^{j+k} u}{\partial r^j \partial \varphi^k} \right|^2 r dr + \int_\beta^{\omega_0} d\varphi \int_0^\infty r^{2(\gamma-l+j)} \left| \frac{\partial^{j+k} u}{\partial r^j \partial \varphi^k} \right|^2 r dr \right],$$

где $l \geq 0$ — целое, γ — действительное число. Пусть $f(M) \in V_\gamma^l$, $(f(M) \in L_2 \iff f(M) \in V_0^0)$.

Проведем замену переменной $\tau = \ln \frac{1}{r}$, умножим полученные уравнения на $e^{-2\tau}$ и сделаем преобразование Фурье по τ . Уравнение (10) преобразуется к

$$\begin{aligned} -\lambda^2 \widehat{E}_z(\lambda, \varphi) + \frac{\partial^2 \widehat{E}_z}{\partial \varphi^2} &= -2\alpha \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \varphi}(\lambda, \beta) \delta(\varphi - \beta) - \\ &- ik\varepsilon \widehat{P}_z(\lambda, \varphi) + \widehat{F}(\lambda, \varphi), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{F}(\lambda, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau, \varphi) e^{-i\lambda\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(r, \varphi) r^{-i\lambda+1} dr. \end{aligned}$$

Из свойств преобразования Фурье для функций $\widehat{F}(\lambda, \varphi)$ и $\widehat{P}_z(\lambda, \varphi)$ имеем

$$\sum_{k=0}^l \int_{-\infty+i\hbar}^{\infty+i\hbar} |\lambda|^{2k} \left\| \widehat{F}(\lambda, \varphi) \right\|_{H^{l-k}(0, \omega_0)}^2 d\lambda \leq C \|f\|_{V_\gamma^l}^2, \quad (12)$$

$$h = l + 1 - \gamma.$$

Решение уравнения (11) может быть построено с помощью функции Грина

$$G(\varphi, \xi) = \frac{1}{2\lambda \operatorname{sh} \lambda \omega_0} [\operatorname{ch}(\lambda(\xi - \omega_0) + \lambda\varphi) - \operatorname{ch}(\lambda\omega_0 - \lambda|\xi - \varphi|)], \quad (13)$$

представляющей решение задачи

$$\begin{cases} -\lambda^2 G(\varphi, \xi) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} G(\varphi, \xi) = \delta(\varphi - \xi), & 0 < \varphi, \xi < \omega_0, \\ G(0, \xi) = G(\omega_0, \xi) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Тогда решение уравнения (11)

$$\begin{aligned} \widehat{E}_z(\lambda, \varphi) &= -2\alpha \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \varphi}(\lambda, \beta) G(\varphi, \beta) + \\ &+ \int_0^{\omega_0} G(\varphi, \xi) \left(-ik\varepsilon \widehat{P}_z(\lambda, \xi) + \widehat{F}(\lambda, \xi) \right) d\xi. \end{aligned} \quad (15)$$

Продифференцируем (15) по φ в точках $\varphi = \beta \pm 0$. Получим уравнение для производной $\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \varphi}(\lambda, \beta)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \varphi}(\lambda, \beta) &= -\alpha \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \varphi}(\lambda, \beta) \frac{\operatorname{sh}(2\beta\lambda - \lambda\omega_0)}{\operatorname{sh} \lambda \omega_0} - ik\widehat{v}(\lambda, \beta) + \\ &+ \int_0^{\omega_0} G'_\varphi(\omega_0, \xi) \left(-ik\varepsilon \widehat{P}_z(\lambda, \xi) + \widehat{F}(\lambda, \xi) \right) d\xi. \end{aligned} \quad (16)$$

Решив его, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \varphi}(\lambda, \beta) &= \frac{\operatorname{sh} \lambda \omega_0}{\operatorname{sh} \lambda \omega_0 + \alpha \operatorname{sh}(2\beta\lambda - \lambda\omega_0)} \times \\ &\times \left[\int_0^{\omega_0} G'_\varphi(0, \xi) \left(-ik\varepsilon \widehat{P}_z(\lambda, \xi) + \widehat{F}(\lambda, \xi) \right) d\xi - \right. \\ &\left. - ik\widehat{v}(\lambda, \beta) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставив (17) в (15), получим

$$\widehat{E}_z(\lambda, \varphi) = -\frac{2\alpha \operatorname{sh} \lambda \omega_0}{\operatorname{sh} \lambda \omega_0 - \alpha \operatorname{sh}(2\beta\lambda - \lambda \omega_0)} G(\varphi, \beta) \times \left[\int_0^{\omega_0} G'_\varphi(\omega_0, \xi) \left(-ik\varepsilon \widehat{P}_z(\lambda, \xi) + \widehat{F}(\lambda, \xi) \right) d\xi - ik\widehat{v}(\lambda, \beta) \right]. \quad (18)$$

Для функций $\widehat{v}(\lambda, \varphi)$ и $\widehat{w}(\lambda, \varphi)$ имеем

$$\widehat{v}(\lambda, \varphi) = -(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \widehat{P}_z(\lambda, \beta) G(\varphi, \beta) + \int_0^{\omega_0} \left[\varepsilon \frac{\partial \widehat{P}_z}{\partial \xi}(\lambda, \xi) + \frac{\lambda}{\lambda + 2i} \widehat{F}_r(\lambda, \xi) \right] G(\varphi, \xi) d\xi, \quad (19)$$

$$\widehat{w}(\lambda, \varphi) = -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{i\lambda} \widehat{P}_z(\lambda, \beta) G'_\varphi(\varphi, \beta) + \frac{\varepsilon}{i\lambda} \widehat{P}_z(\lambda, \varphi) + \frac{1}{i\lambda} \int_0^{\omega_0} \left[\varepsilon \frac{\partial \widehat{P}_z}{\partial \xi}(\lambda, \xi) + \frac{\lambda}{\lambda + 2i} \widehat{F}_r(\lambda, \xi) \right] G'_\varphi(\varphi, \xi) d\xi. \quad (20)$$

Если функции $\widehat{E}_z(\lambda, \varphi)$, $\widehat{v}(\lambda, \varphi)$ и $\widehat{w}(\lambda, \varphi)$ не имеют полюсов на прямой $\operatorname{Im} \lambda = h = l + 1 - \gamma$, обратное преобразование Фурье позволяет получить решение исходной задачи, для которого справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|E_z(r, \varphi)\|_{V_\gamma^{l+1}} &\leq C \left(\|f(r, \varphi)\|_{V_\gamma^l} + \|p_z(r, \varphi)\|_{V_\gamma^l} \right), \\ \|v(r, \varphi)\|_{V_\gamma^{l+1}} &\leq C \left(\|f_r(r, \varphi)\|_{V_\gamma^l} + \|p_z(r, \varphi)\|_{V_\gamma^l} \right), \\ \|w(r, \varphi)\|_{V_\gamma^{l+1}} &\leq C \left(\|f_r(r, \varphi)\|_{V_\gamma^l} + \|p_z(r, \varphi)\|_{V_\gamma^l} \right), \end{aligned}$$

С. Построение асимптотического представления

Пока построенное в пространстве Фурье-образов решение (18), (19), (20) определено лишь на прямой $\operatorname{Im} \lambda = h = -\gamma + l + 1$. Для построения его асимптотики, то есть представления решения в виде суммы функций, описывающих особенность, и гладкой части необходимо, чтобы функции (18), (19), (20) были определены в некоторой полосе $h_1 < \operatorname{Im} \lambda < h_2$, а для этого потребуется, чтобы функции $f(r, \varphi)$, $f_r(r, \varphi)$, $f_\varphi(r, \varphi)$ и $p_z(r, \varphi)$, входящие в правую часть (8), (9) и (10), принадлежали пересечению пространств V_γ^l с разными индексами l и (или) γ .

Пусть $f(r, \varphi)$, $f_r(r, \varphi)$, $f_\varphi(r, \varphi)$ и $p_z(r, \varphi) \in V_{\gamma_1}^{l_1} \cap V_{\gamma_2}^{l_2}$, $\gamma_1 > \gamma_2$, l_1 и l_2 такие, что $h_1 = l_1 + 1 - \gamma_1$ и $h_2 = l_2 + 1 - \gamma_2$ удовлетворяют условию $h_2 > h_1$, функции $\widehat{E}_z(\lambda, \varphi)$, $\widehat{v}(\lambda, \varphi)$ и $\widehat{w}(\lambda, \varphi)$ из (18)-(20) не имеют полюсов на прямых $\operatorname{Im} \lambda = h_1$ и $\operatorname{Im} \lambda = h_2$.

В силу указанных условий функции $\widehat{F}(\lambda, \varphi)$, $\widehat{F}_r(\lambda, \varphi)$, $\widehat{F}_\varphi(\lambda, \varphi)$, $\widehat{P}_z(\lambda, \varphi)$ — аналитические функции в полосе $h_1 \leq \operatorname{Im} \lambda \leq h_2$, а $\widehat{E}_z(\lambda, \varphi)$, $\widehat{v}(\lambda, \varphi)$ и $\widehat{w}(\lambda, \varphi)$ — мероморфные функции. Теорема о вычетах позволяет перейти от интегрирования по прямой $\operatorname{Im} \lambda = h_1$ к прямой $\operatorname{Im} \lambda = h_2$. Тогда находящиеся между ними полюсы λ_k функций $\widehat{E}_z(\lambda, \varphi)$, $\widehat{v}(\lambda, \varphi)$ и $\widehat{w}(\lambda, \varphi)$, и дадут сингулярную часть решения (см. рис. 2). Применяя теорему о вычетах для прямоугольного контура, ограниченного прямыми $\operatorname{Im} \lambda = h_1$, $\operatorname{Im} \lambda = h_2$ и $\operatorname{Re} \lambda = \pm N$ и, переходя к пределу при $N \rightarrow +\infty$, окончательно получаем следующее представление решения

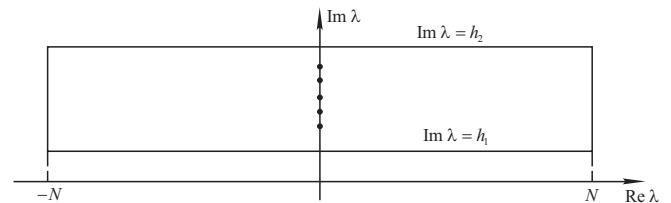


Рис. 2: Применение теоремы о вычетах

$$\begin{aligned} E_z(r, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty + ih_2}^{\infty + ih_2} e^{i\lambda\tau} \widehat{E}_z(\lambda, \varphi) d\lambda \Bigg|_{\tau = \ln \frac{1}{r}} + \\ &+ \sqrt{2\pi} i \sum_{h_1 < \operatorname{Im} \lambda_k < h_2} \operatorname{Res} e^{i\lambda_n \tau} \widehat{E}_z(\lambda, \varphi) \Bigg|_{\tau = \ln \frac{1}{r}} = \\ &= \Re(r, \varphi) + \sqrt{2\pi} i \sum_{h_1 < \operatorname{Im} \lambda_n < h_2} \operatorname{Res} e^{i\lambda_n \tau} \widehat{E}_z(\lambda, \varphi) \Bigg|_{\tau = \ln \frac{1}{r}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Для гладкой части $\Re(r, \varphi)$ функции $E_z(r, \varphi)$ имеем следующую оценку:

$$\|\Re(r, \varphi)\|_{V_{\gamma_2}^{l_2+1}} \leq C \|f(r, \varphi)\|_{V_{\gamma_2}^{l_2}}. \quad (22)$$

Особые точки функции $\widehat{E}_z(\lambda, \varphi)$, из (18): полюсы первого порядка $\lambda_k = i\nu_k$, определяемые уравнением

$$\alpha \sin[\nu_k(2\beta - \omega_0)] + \sin(\nu_k \omega_0) = 0, \quad (23)$$

(исключая $\nu = 0$).

Асимптотическое представление решения имеет вид

$$E_z(r, \varphi) = \sum_{h_1 < \nu_k < h_2} C_k r^{\nu_k} \{ \cos[\nu_k(\beta - \omega_0 + \varphi)] - \cos[\nu_k(|\beta - \varphi| - \omega_0)] \} + \Re(r, \varphi).$$

где ν_k — корни уравнения (23), C_k — постоянные.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В КОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

Следуя В.А. Кондратьеву, введем срезающую функцию

Вернемся к задаче в конечной области Ω , представляющей собой поперечное сечение волновода. Граница области $\partial\Omega$ вне окрестности металло-диэлектрического ребра предполагается гладкой. Рассмотрим систему (1) с условиями (2) и (4)

$$\chi(r) = \begin{cases} 1, & r \leq d/2, \\ 0, & r > d, \end{cases} \quad \chi(r) \in C^\infty,$$

$$\begin{aligned} -\text{graddiv}H_\perp - k^2\varepsilon H_\perp - ik\varepsilon\text{rot}E_z &= -\gamma^2 H_\perp, \\ -ik\text{rot}\varepsilon H_\perp - \text{div}\varepsilon\text{grad}E_z &= -\gamma^2\varepsilon E_z, \end{aligned}$$

и рассмотрим вектор-функцию $\chi\mathbf{A} = \{\chi E_z, \chi H_\perp\}$.

$$\text{rot}H_\perp = -ik\varepsilon E_z.$$

Для вектор-функции $\{\chi E_z, \chi H_r, \chi H_\varphi\}$ имеем следующие уравнения

$$\begin{aligned} \text{divgrad}(\chi E_z) &= -\frac{2\alpha}{r^2} \frac{\partial(\chi u)}{\partial\varphi}(r, \beta)\delta(\varphi - \beta) + \gamma^2 \chi E_z - \\ &- \frac{ik}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\chi r H_\varphi) + \frac{ik}{r} \frac{\partial(\chi H_r)}{\partial\varphi} + 2\frac{\partial\chi}{\partial r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial r} + E_z \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\chi}{\partial r} \right) + ik \frac{\partial\chi}{\partial r} H_\varphi. \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{cases} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\chi r H_r) \right) + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial(\chi r H_\varphi)}{\partial\varphi} \right) = -k^2\varepsilon(\chi r H_r) - ik\varepsilon \frac{\partial\chi E_z}{\partial\varphi} + \\ + \gamma^2(\chi r H_r) + r \frac{\partial\chi}{\partial r} \text{div}H_\perp + r \frac{\partial}{\partial r} \left(H_r \frac{\partial\chi}{\partial r} \right), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial\varphi}(\chi r H_r) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(\chi r H_\varphi)}{\partial\varphi^2} = -k^2\varepsilon(\chi r H_\varphi) + ik\varepsilon r \frac{\partial(\chi E_z)}{\partial r} - ik\varepsilon r E_z \frac{\partial\chi}{\partial r} + \\ + \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(H_r \frac{\partial\chi}{\partial r} \right) + \gamma^2(\chi r H_\varphi). \end{cases} \tag{25}$$

Дополнительное условие принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\chi r H_\varphi) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\chi r H_r)}{\partial\varphi} = -ik\varepsilon\chi E_z + \frac{\partial\chi}{\partial r} H_\varphi.$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} v &= rH_r, \quad w = rH_\varphi, \\ f^x(r, \varphi) &= \gamma^2 \chi E_z + 2\frac{\partial\chi}{\partial r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial r} + E_z \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\chi}{\partial r} \right) + \frac{ik}{r} \frac{\partial\chi}{\partial r} w, \\ f_r^x(r, \varphi) &= -ik\varepsilon \frac{\partial(\chi u)}{\partial\varphi} + \gamma^2 \chi v + r \frac{\partial\chi}{\partial r} \text{div}H_\perp + r \frac{\partial}{\partial r} \left(H_r \frac{\partial\chi}{\partial r} \right), \\ f_\varphi^x(r, \varphi) &= -k^2\varepsilon\chi w + ik\varepsilon r \frac{\partial(\chi E_z)}{\partial r} + \gamma^2(\chi w) + ik\varepsilon r E_z \frac{\partial\chi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(H_r \frac{\partial\chi}{\partial r} \right), \\ p_z^x(r, \varphi) &= -ik\varepsilon\chi E_z + \frac{\partial\chi}{\partial r} H_\varphi. \end{aligned}$$

Система (24)-(25) примет вид

$$\begin{aligned} \text{divgrad}(\chi E_z) &= -\frac{2\alpha}{r^2} \frac{\partial(\chi u)}{\partial\varphi}(r, \beta)\delta(\varphi - \beta) - \\ &- ikp_z^x(r, \varphi) + f^x(r, \varphi), \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2(\chi v)}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial(\chi v)}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial(\chi w)}{\partial\varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2(\chi w)}{\partial r \partial\varphi} = f_r^x(r, \varphi), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial\varphi}(\chi w) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(\chi w)}{\partial\varphi^2} = f_\varphi^x(r, \varphi), \end{cases} \tag{27}$$

Дополнительное условие:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\chi w) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\chi v)}{\partial \varphi} = p_z^x(r, \varphi).$$

Поскольку $f^x(r, \varphi) \in V_{l+1-\delta}^l$, $f_{\perp}^x \in (V_{l+1-\delta}^l)^2$, $p_z^x(r, \varphi) \in V_{l+2-\delta}^{l+1}$, где $\delta > 0$ достаточно малое и функции $\widehat{\chi E_z}$, $\widehat{\chi v}$ и $\widehat{\chi w}$ не имеют полюсов на прямой $\text{Im} \lambda = \delta$, тогда существует единственное решение $\mathbf{Q} = \{\chi E_z, \chi v, \chi w\}$ такое, что $\chi E_z \in V_{l+1-\delta}^{l+2} \subset V_{-\delta}^1$, $\chi v \in (V_{l+1-\delta}^{l+2}) \subset (V_{-\delta-1}^0)$, $\chi w \in (V_{l+1-\delta}^{l+2}) \subset (V_{-\delta-1}^0)$. В нашем случае

$$f_r^x(r, \varphi) \in V_{-\delta}^0 \cap V_{-\delta+1}^0, f_{\varphi}^x(r, \varphi) \in V_{-\delta}^0 \cap V_{-\delta+1}^0, \\ f^x \in V_{-\delta}^0 \cap V_{-\delta+1}^0,$$

поэтому

$$E_z(r, \varphi) = \sum_{0 < \nu_k < 1} C_k r^{\nu_k} \{ \cos[\nu_k(\beta - \omega_0 + \varphi)] - \\ - \cos[\nu_k(|\beta - \varphi| - \omega_0)] \} + \mathfrak{R}(r, \varphi).$$

где ν_k — корни уравнения

$$\alpha \sin[\nu_k(2\beta - \omega_0)] + \sin(\nu_k \omega_0) = 0,$$

C_k — постоянные.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построено асимптотическое представление электромагнитного поля в окрестности металло-

диэлектрического ребра в виде суммы сингулярной и гладкой частей. Для гладкой части получена оценка в соответствующей норме.

Предложенный метод легко распространяется на случай области с конечным числом ребер. Данный подход может быть также применен в случае, когда на ребре сходятся две или более плоскостей разрыва диэлектрической проницаемости.

Исследование показало, что главную особенность имеет именно электрическое поле. Сама продольная компонента электрического поля ограничена в окрестности металло-диэлектрического ребра, а ее производная имеет степенную особенность, причем вид функции, описывающей особенность, и показатели степени соответствуют полученным ранее для скалярного случая [11].

При построении численного решения знание точного вида сингулярности позволяет в пространство пробных функций ввести функции, имеющие сингулярности данного вида, и тем самым точно аппроксимировать сингулярную часть решения. Это дает возможность получить скорость сходимости приближенного решения к точному, соответствующую гладкому случаю [12].

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 15-01-03524 и 16-01-00690).

-
- [1] Земляков В. В., Заргано Г. Ф. Известия ЮФУ. Технические науки. 2016. №5(178). С. 126.
 - [2] Заргано Г. Ф., Земляков В. В., Кривошустенко В. В. Физика волновых процессов и радиотехнические системы 2012. **15**, №1.
 - [3] Заргано Г. Ф., Земляков В. В. Антенны. 2011, Вып. 7 (170). С. 64.
 - [4] Гадзиева А. А., Земляков В. В., Крутиев С. В. Инженерный вестник Дона. 2013. **24**, №1. С. 24.
 - [5] Заргано Г. Ф., Земляков В. В., Кривошустенко В. В. Радиотехника и электроника. 2011. **56**, №3. С. 285.
 - [6] Боголюбов А. Н., Могилевский И. Е., Свешников А. Г. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. **55**, №. 3. С. 446.
 - [7] Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Могилевский И. Е., Свешников А. Г. Радиотехника и электроника. 2003. **48**, №7. С. 787.
 - [8] Кондратьев В. А. Труды Московского Математического Общества. 1967. **16**. С. 227.
 - [9] Назаров С. А., Пламеневский Б. А. «Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей». М.: Наука, 1991.
 - [10] Делицын А. Л. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. **39**, №2. С. 315.
 - [11] Боголюбов А. Н., Могилевский И. Е. Труды российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи имени А. С. Попова, серия Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации. **9**. С. 33.
 - [12] Боголюбов А. Н., Ерохин А. И., Могилевский И. Е., Светкин М. И. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2017. №. 1. С. 17. (Bogolyubov A. N., Erokhin A. I., Mogilevsky I. E., Svetkin M. I. (Mosc. Univ. Phys. Bull. 2017. **72**, №. 1. С. 16.)

Singularities waveguide electromagnetic field in vicinities of silent points**A. N. Bogolyubov^a, I. E. Mogilevskiy^b***Department of mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia
E-mail: ^abogan7@yandex.ru, ^bmogilev@phys.msu.ru*

An asymptotic representation of the inhomogeneous in cross-section waveguide system electromagnetic field in the vicinity of metal-dielectric wedge edge is constructed. It is shown that the longitudinal component is bounded in the neighborhood of the corner point, and its derivative has a power singularity.

PACS: 02.60.Lj, 03.50.De, 41.20.-q

Keywords: waveguide system, singularity in vicinity of edge.*Received 12 July 2017.***Сведения об авторах****Сведения об авторах**

1. Боголюбов Александр Николаевич — доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: bogan7@yandex.ru.
 2. Могилевский Илья Ефимович — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-13-51, e-mail: mogilev@phys.msu.ru.
-