

## Динамика внутренних переходных слоев в начально-краевой задаче для обобщенного уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова

А. А. Быков,\* Н. Н. Нефедов,† А. С. Шарло‡

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,  
физический факультет, кафедра математики.  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

Исследуется дрейф внутреннего переходного слоя для псевдопараболического уравнения третьего порядка в неоднородной среде в случае, когда решение имеет вид контрастной структуры. Используется метод сингулярного разложения решения в ряд по степеням малого параметра. Найдены несколько первых членов ряда для скорости движения внутреннего переходного слоя.

PACS: 02.60.Lj

УДК: 517.958.226.

Ключевые слова: квазилинейные параболические уравнения, контрастная структура, асимптотические методы.

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается квазилинейное уравнение псевдопараболического типа, которое отличается от уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова [1] наличием дополнительного члена, содержащего производную по времени от оператора Лапласа. Это уравнение, которое далее будем называть обобщенным уравнением Колмогорова–Петровского–Пискунова (ОКПП), описывает квазистационарный процесс диффузии носителей заряда в полупроводниках в случае, когда среда обладает отрицательной дифференциальной проводимостью [2]. В трехмерном пространстве уравнение ОКПП имеет вид

$$(u - \mu \Delta u)_t + V \nabla u = k \Delta u - f(u, x) \quad (1)$$

в области  $\Omega$  с граничными условиями  $u|_{\partial\Omega} = \psi(x)$  и начальными условиями  $u(x, 0) = u^0(x)$ . Здесь  $\Omega$  — ограниченная область с гладкой границей,  $k > 0$ ,  $\mu > 0$ . Предполагаем, что плотность источников  $f(u, x)$  как функция от  $u$  имеет несколько корней,

$$f(u, x) = f_0(u, x) \prod_{j=1}^J (u - \varphi_j(x)), \quad (2)$$

причем  $f_0(u, x)$  непрерывна в  $\Omega$ ,  $f_0(u, x) \neq 0$ . Значения  $u = \varphi_j(x)$  будем называть положениями равновесия.

Уравнение ОКПП можно рассматривать как обобщение уравнения реакции–диффузии

$$u_t + V \nabla u = k \Delta u - f(u, x). \quad (3)$$

При некоторых начальных условиях уравнение (3) имеет решения типа контрастной структуры (КС), для которой характерны большие области (пятна),

в которых  $u$  имеет малый в некотором смысле градиент, разделяемые узкими областями с большим градиентом  $u$ . Например, если  $f(u, x) = \gamma(u - \varphi_1(x))(u - \varphi_2(x))(u - \varphi_3(x))$ ,  $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3$ ,  $\gamma > 0$ , то возможно решение, для которого в больших по сравнению с толщиной переходного слоя областях  $u \approx \varphi_1$  или  $u \approx \varphi_3$ , а внутри переходного слоя  $u$  пересекает значение  $\varphi_2$ . Условно припишем пятнам КС отрицательную ( $u \approx \varphi_1$ ) и положительную ( $u \approx \varphi_3$ ) полярности. Между пятнами разных полярностей образуется узкий слой, в пределах которого происходит переход от одного из устойчивых уровней насыщения к другому устойчивому, сопровождающийся переходом через неустойчивое состояние. Этот слой называют внутренним переходным слоем (ВПС). Мы предполагаем, что толщина ВПС много меньше диаметра области  $\Omega$ . На границах  $\Omega$  образуются узкие области, внутри которых концентрация изменяется от одного из уровней насыщения до значения, определяемого граничным условием (пограничные слои). На рис. 1 изображено решение вида КС с несколькими ВПС, левым и правым пограничными слоями.

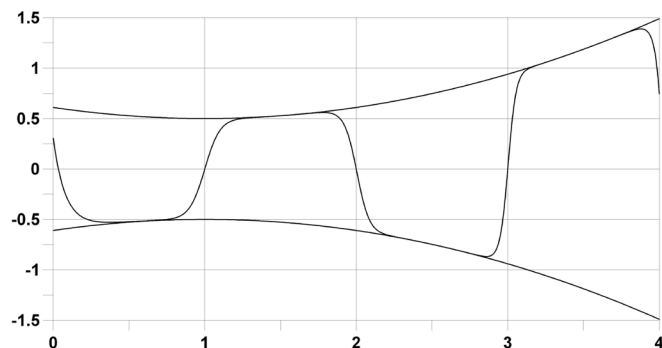


Рис. 1: Решение вида контрастной структуры

При определенных условиях ВПС может перемещаться. Дрейф ВПС для уравнения (1) определяется тремя факторами:

\*E-mail: abkov@yandex.ru

†E-mail: nefedov@phys.msu.ru

‡E-mail: sharlo@physics.msu.ru

1. Для двумерных и трехмерных задач — кривизной ВПС,
2. Для задач любой размерности — величиной асимметрии  $F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} f(u, x) du$ ,
3. При нулевой асимметрии,  $F(x) = 0$ , скорость дрейфа определяется градиентом функций  $\varphi_j(x)$ .

В данной работе мы рассматриваем именно последний случай, когда как дрейф кривизны, так и дрейф асимметрии отсутствуют, и перемещение ВПС обусловлено только градиентным дрейфом.

Исследование решений типа бегущих волн для квазилинейных и нелинейных уравнений различного вида является предметом интенсивного исследования [3–5]. Отличие нашего подхода состоит в том, что рассматривается решение типа бегущей волны для уравнения, в котором нелинейная часть явно зависит от координат. Поэтому скорость дрейфа волны также является функцией координат, причем рассматривается модель, для которой скорость можно представить в виде ряда по степеням малого параметра.

Наша цель состоит в аналитическом исследовании решений уравнения (1) в случае, когда толщина ВПС много меньше диаметра области  $\Omega$ . Поэтому мы введем в уравнение (1) параметр  $\varepsilon$ , который, как будет показано в дальнейшем, пропорционален толщине ВПС и предполагается малым. Мы построим несколько первых членов ряда по степеням параметра  $\varepsilon$ , который приближает решение уравнения по невязке. Уравнение (1) с малым параметром относится к классу сингулярно возмущенных. Это означает, что при  $\varepsilon = 0$  уравнение из дифференциального превращается в алгебраическое, имеющее несколько решений. Из этих решений, соответствующих устойчивым положениям равновесия, мы сконструируем так называемое регулярное приближение нулевого порядка, претерпевающее разрыв на поверхностях, вблизи которых располагается ВПС. Затем применим метод пограничных функций (ПФ), которые складываются с регулярным решением нулевого порядка и осуществляют сопряжение различных устойчивых уровней в единое решение во всей области. Метод ПФ основан на представлении формального асимптотического разложения решения в виде суммы функций, зависящих от координат разного масштаба.

Метод пограничных функций для нестационарных задач ранее использовался для построения формального разложения в асимптотический ряд решений с движущимся фронтом типа ступеньки или всплеска для уравнения реакции–диффузии [6, 7]. Таким образом, в данной работе метод обобщается на новый класс задач, включающих производную по времени от лапласиана.

## 1. ПОСТРОЕНИЕ ФОРМАЛЬНОГО АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЯДА

### 1.1. Постановка задачи

Введем в уравнение (1) малый параметр  $\varepsilon$ , который пропорционален отношению толщины ВПС к диаметру области  $\Omega$ . Наша цель состоит в том, чтобы сравнить эффекты, обусловленные влиянием специфического КПП члена  $\Delta u_t$  и совместного действия диффузионного члена и градиента функции плотности источников. Поэтому мы выберем такие степени малого параметра при различных членах уравнения (1), при которых эти эффекты будут сравнимы по величине, и ни один из них не будет являться малым по сравнению с другим. Рассмотрим начально-краевую задачу для одномерного случая:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 u_t + \varepsilon^2 V u_x - \varepsilon^4 \mu u_{xxt} &= \varepsilon^2 k u_{xx} - f(u, x, \varepsilon), \\ u(a, t, \varepsilon) &= u_a, \quad u(b, t, \varepsilon) = u_b, \\ u(x, 0, \varepsilon) &= u^0(x, \varepsilon), \end{aligned} \quad (4)$$

$x \in (a, b)$ ,  $t \in (0, T)$ . Коэффициент  $\varepsilon^2$  при  $u_t$  выбран только из соображений удобства построения асимптотического ряда.

### 1.2. Условия формирования ВПС

Пусть уравнение  $f(u, x, \varepsilon) = 0$  имеет ровно три корня,  $u_1 = \varphi^{(-)}(x, \varepsilon)$ ,  $u_2 = \varphi^{(0)}(x, \varepsilon)$ ,  $u_3 = \varphi^{(+)}(x, \varepsilon)$ , причем  $\varphi^{(-)}(x, \varepsilon) < \varphi^{(0)}(x, \varepsilon) < \varphi^{(+)}(x, \varepsilon)$ ,  $f_u(\varphi^{(\pm)}(x, 0), x, 0) > 0$ ,  $f_u(\varphi^{(0)}(x, 0), x, 0) < 0$  при  $x \in [a, b]$ . Таким образом, имеется два устойчивых состояния, разделенных неустойчивым, что и создает условия формирования ВПС [8]. Будем считать, что начальное условие  $u^0(x, \varepsilon)$  представляет собой сформировавшуюся КС. Это означает, что на интервале  $(a, b)$  указана точка  $x_{00}$ , такая, что  $u^0(x_{00}, 0, \varepsilon) = 0$ . Предположим также, что начальная функция такова, что  $u^0(x, \varepsilon) = \varphi^{(-)}(x, \varepsilon)$  при  $a + d < x < x_{00} - d$ ,  $u^0(x, \varepsilon) = \varphi^{(+)}(x, \varepsilon)$  при  $x_{00} + d < x < b - d$ , причем  $d \gg \theta$ , где  $\theta$ –толщина ВПС, которая будет найдена далее. На промежутке  $x_{00} - d < x < x_{00} + d$  функция  $u^0(x, \varepsilon)$  монотонно изменяется от  $\varphi^{(-)}(x_{00})$  до  $\varphi^{(+)}(x_{00})$ .

Пусть  $\varphi^*(x)$  — заданная гладкая функция, такая, что на отрезке  $[a, b]$  выполнено условие  $\varphi^{(-)}(x) < \varphi^*(x) < \varphi^{(+)}(x)$ . Будем называть «точкой перехода» координату  $x^*(t, \varepsilon)$ , в которой решение пересекает заданную величину  $\varphi^*(x)$ , так что  $u(x^*, t, \varepsilon) = \varphi^*(x^*)$ . В классических работах по построению формальных асимптотик для решений вида КС в качестве  $\varphi^*(x)$  выбирается  $\varphi^{(0)}(x)$ . В данной работе мы рассмотрим более общий подход и покажем, что асимптотический ряд не зависит от выбора  $\varphi^*(x)$ .

Мы предполагаем, что уравнение  $u(x^*, t) = \varphi^*(x^*)$  имеет единственное решение  $x^*(t, \varepsilon)$  такое, что

$a < x^*(t, \varepsilon) < b$ .

Значение  $x^*(t, \varepsilon)$  представим в виде ряда

$$x^*(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t), \quad (5)$$

первые два члена которого будут найдены, алгоритм построения последующих членов аналогичен.

Пусть выполнено условие баланса

$$\int_{\varphi^{(-)}(x)}^{\varphi^{(+)}(x)} f(u, x, \varepsilon) du = 0 \quad (6)$$

на всем промежутке  $[a, b]$ .

Потребуем, чтобы граничное условие  $u_a$  принадлежало области влияния  $\varphi^{(-)}(x)$  — промежутку  $(-\infty, \varphi^{(+)}(a))$ , правое граничное условие  $u_b$  находилось в области влияния  $\varphi^{(+)}(x) - (\varphi^{(-)}(b), \infty)$ . Более подробно вопрос об области влияния граничных условий изучен в [6], никакого отличия в рассматриваемом случае не будет.

### 1.3. Построение формальной асимптотики

Для построения асимптотического ряда, сходящегося к точному решению задачи, используем метод сшивания асимптотических представлений решения в области отрицательного и положительного пятен КС. Этот метод пригоден для любого числа ВПС, но в рамках данной работы мы рассмотрим КС, включающую ровно два пятна, разделенных одним ВПС.

На промежутке  $a < x < x^*(t, \varepsilon)$  решение задачи (4) найдем из системы

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 u_t + \varepsilon^2 V(x) u_x &= \varepsilon^4 \mu u_{xxt} + \varepsilon^2 k u_{xx} - f(u, x, \varepsilon), \\ u(a, t, \varepsilon) &= u_a, \quad u(x^*(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = \varphi^{(*)}(x^*(t, \varepsilon)), \\ u(x, 0, \varepsilon) &= u^0(x, \varepsilon), \end{aligned} \quad (7)$$

а при  $x^*(t, \varepsilon) < x < b$  — из системы

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 u_t + \varepsilon^2 V(x) u_x &= \varepsilon^4 \mu u_{xxt} + \varepsilon^2 k u_{xx} - f(u, x, \varepsilon), \\ u(b, t, \varepsilon) &= u_b, \quad u(x^*(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = \varphi^{(*)}(x^*(t, \varepsilon)), \\ u(x, 0, \varepsilon) &= u^0(x, \varepsilon). \end{aligned} \quad (8)$$

Решения задач (7) и (8) отметим индексами  $(-)$  и  $(+)$  соответственно. Положение ВПС определяется из условия сшивания решения задач (1.1.3) и (1.1.3) в точке перехода:

$$u^{(-)}(x^*(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = u^{(+)}(x^*(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \quad (9)$$

$$u_x^{(-)}(x^*(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = u_x^{(+)}(x^*(t, \varepsilon), t, \varepsilon). \quad (10)$$

Задачи (7) и (8) относятся к классу сингулярно возмущенных [8]. В самом деле, если положить  $\varepsilon = 0$ , получим вместо дифференциального алгебраическое уравнение

$$f(u, x, \varepsilon) = 0. \quad (11)$$

Из решения уравнения (11) найдем так называемые регулярные функции:

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(-)} &= \varphi^{(-)}(x, \varepsilon), \quad x < x^*(t, \varepsilon), \\ \bar{u}^{(+)} &= \varphi^{(+)}(x, \varepsilon), \quad x > x^*(t, \varepsilon). \end{aligned}$$

Предположим, что  $\frac{dx_0}{dt} = W_0$ ,  $\frac{dx_1}{dt} = W_1$  и т.д. Тогда

$$\frac{dx^*}{dt} = W_0 + \varepsilon W_1 + \dots \quad (12)$$

Выполнив в (4) растяжение координаты  $x$  в  $\varepsilon$  раз в окрестности точки  $x^*$ , получим уравнение

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 u_t - \varepsilon(W_0 + \varepsilon W_1 + \dots) u_\xi + \varepsilon V(x^*) u_\xi - \varepsilon^2 \mu u_{\xi\xi t} + \\ + \varepsilon \mu(W_0 + \varepsilon W_1 + \dots) u_{\xi\xi\xi} - k u_{\xi\xi} = -f(u, x(\xi), \varepsilon), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\xi = \frac{x - x^*}{\varepsilon}$ . Снова положим в этом уравнении  $\varepsilon = 0$  и получим уравнение для определения функций переходного слоя в нулевом приближении:

$$k u_{\xi\xi} = f(u, x(\xi), 0). \quad (14)$$

Далее будет показано, что при условии  $U_x > 0$  решение типа КС может существовать только при выполнении условия  $W_0 < 0$ , при  $U_x < 0$  для существования решения типа КС необходимо  $W_0 > 0$ . Таким образом, выражения для растянутых переменных имеют вид:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x - x^*(t, \varepsilon)}{\varepsilon}, \quad \zeta = \zeta_a = \frac{a - x}{\varepsilon} \leq 0, \\ \zeta &= \zeta_b = \frac{b - x}{\varepsilon} \geq 0, \end{aligned} \quad (15)$$

Асимптотическое разложение справа от точки перехода представимо в виде суммы регулярных функций, функций внутреннего переходного слоя и пограничных функций:

$$\begin{aligned} U^{(+)}(x, t, \varepsilon) &= \bar{u}^{(+)}(x, \varepsilon) + Q^{(+)}(\xi, t, \varepsilon) + \Pi^{(b)}(\zeta_b, \varepsilon), \\ x^* &< x < x_b, \end{aligned} \quad (16)$$

слева от точки перехода имеем представление

$$\begin{aligned} U^{(-)}(x, t, \varepsilon) &= \bar{u}^{(-)}(x, \varepsilon) + Q^{(-)}(\xi, t, \varepsilon) + \Pi^{(a)}(\zeta_a, \varepsilon), \\ x_a &< x < x^*, \end{aligned} \quad (17)$$

$\bar{u}^{(\pm)}(x, \varepsilon)$  — регулярная часть,  $Q^{(\pm)}(\xi, t, \varepsilon)$  — функции переходного слоя,  $\Pi^{(a)}$ ,  $\Pi^{(b)}$  — пограничные функции. Слагаемые в (16), (17) раскладываются в ряд по степеням  $\varepsilon$ :

$$\bar{u}^{(\pm)}(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{u}_k^{(\pm)}(x), \quad (18)$$

$$Q^{(\pm)}(\xi, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q_k^{(\pm)}(\xi, t), \quad (19)$$

1.4. Нулевое приближение

$$\Pi^{(b)}(\zeta_b, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Pi_k^{(b)}(\zeta_b), \quad (20)$$

$$\Pi^{(a)}(\zeta_a, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Pi_k^{(a)}(\zeta_a). \quad (21)$$

Подставим (16), (17) в уравнение (4), тогда  $f(u, x, \varepsilon)$  можно представить в виде следующей суммы:

$$f(u(x, t, \varepsilon), x, \varepsilon) = \bar{f}(x, \varepsilon) + Qf(\xi, \varepsilon) + \Pi f(\zeta, \varepsilon), \quad (22)$$

где

$$\bar{f}(x, \varepsilon) = f(\bar{u}(x, \varepsilon), x, \varepsilon), \quad (23)$$

$$Qf(\xi, t, \varepsilon) = f(\bar{u}(x(\xi), \varepsilon) + Q(\xi, t, \varepsilon), x(\xi), \varepsilon) - f(\bar{u}(x(\xi), \varepsilon), x(\xi), \varepsilon), \quad (24)$$

$$\Pi^{(a)} f(\zeta_a, \varepsilon) = f(\bar{u}(x(\zeta_a), \varepsilon) + \Pi^{(a)}(\zeta_a, \varepsilon), x(\zeta_a), \varepsilon) - f(\bar{u}(x(\zeta_a), \varepsilon), x(\zeta_a), \varepsilon), \quad (25)$$

$$\Pi^{(b)} f(\zeta_b, \varepsilon) = f(\bar{u}(x(\zeta_b), \varepsilon) + \Pi^{(b)}(\zeta_b, \varepsilon), x(\zeta_b), \varepsilon) - f(\bar{u}(x(\zeta_b), \varepsilon), x(\zeta_b), \varepsilon). \quad (26)$$

Выражения  $x(\xi)$ ,  $x(\zeta_a)$ ,  $x(\zeta_b)$  задаются с учетом определения растянутых переменных (15). Приравнявая по отдельности слагаемые, зависящие от переменных  $x, \xi, \zeta_a, \zeta_b$ , получим следующие уравнения для определения членов асимптотического разложения (16) и (17):

$$\left( \varepsilon^2 k \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \varepsilon^2 V(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) \bar{u}(x, \varepsilon) = \bar{f}(x, \varepsilon), \quad (27)$$

$$\left( \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial x^*}{\partial t} + \varepsilon V(x^*) \frac{\partial}{\partial \xi} - \varepsilon^2 \mu \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \mu \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \frac{\partial x^*}{\partial t} - k \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) Q(\xi, t, \varepsilon) = -Qf(\xi, t, \varepsilon), \quad (28)$$

$$\left( k \frac{\partial^2}{\partial \zeta_a^2} - \varepsilon V(a) \frac{\partial}{\partial \zeta_a} \right) \Pi^{(a)}(\zeta_a, \varepsilon) = \Pi^{(a)} f(\zeta_a, \varepsilon), \quad (29)$$

$$\left( k \frac{\partial^2}{\partial \zeta_b^2} - \varepsilon V(b) \frac{\partial}{\partial \zeta_b} \right) \Pi^{(b)}(\zeta_b, \varepsilon) = \Pi^{(b)} f(\zeta_b, \varepsilon). \quad (30)$$

В каждом приближении для функций переходного слоя будем сначала решать задачу слева от точки перехода, а затем — справа, считая известными значения самой функции и ее производной слева от точки перехода. Затем проведем процедуру сшивания решения в точке перехода.

Пограничные функции стационарны, не влияют на движение ВПС, определяются стандартным образом из уравнения второго порядка, поэтому выражения  $\Pi^{(a)}$ ,  $\Pi^{(b)}$ , такие же, как в работе [7]. Не будем их рассматривать.

Уравнение для определения регулярной функции нулевого приближения имеет вид  $f(\bar{u}, x, 0) = 0$ . Решением этого уравнения является разрывная функция  $\bar{u}^{(-)}(x) = \varphi^{(-)}(x)$ ,  $\bar{u}^{(+)}(x) = \varphi^{(+)}(x)$ .

Функции переходного слоя в нулевом приближении слева от точки перехода определяется из уравнения

$$kQ_{0\xi\xi}^{(-)} = f(\bar{u}_0^{(-)}(x_0) + Q_0^{(-)}, x_0, 0) - f(\bar{u}_0^{(-)}(x_0), x_0, 0). \quad (31)$$

Граничные условия сшивания и условия убывания на бесконечности имеют вид

$$Q_0^{(-)}(0, t) + \bar{u}_0^{(-)}(x_0) = \varphi^{(*)}(x_0), \quad Q_0^{(-)}(-\infty) = 0. \quad (32)$$

Используя метод понижения порядка, получим уравнение первого порядка

$$\frac{dQ_0^{(-)}}{d\xi} = \sqrt{\frac{2}{k}} \left( \int_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{\bar{u}^{(-)}} f(u, x_0, 0) du \right)^{1/2},$$

где  $\tilde{u}^{(-)}(\xi) = \bar{u}_0^{(-)}(x_0) + Q_0^{(-)}(\xi, t)$ .

Функцию переходного слоя справа от точки перехода найдем из краевой задачи

$$kQ_{0\xi\xi}^{(+)} = f(\bar{u}^{(+)}, x_0, 0) - f(\bar{u}_0^{(+)}(x_0), x_0, 0), \\ Q_0^{(+)}(0, t) + \bar{u}_0^{(+)}(x_0) = \varphi^{(*)}(x_0), \quad Q_0^{(+)}(+\infty) = 0,$$

решение которой имеет вид

$$\frac{dQ_0^{(+)}}{d\xi} = \sqrt{\frac{2}{k}} \left( \int_{\varphi^{(+)}(x_0)}^{\bar{u}^{(+)}} f(u, x_0, 0) du \right)^{1/2},$$

где введено аналогичное обозначение  $\tilde{u}^{(+)}(\xi) = \bar{u}_0^{(+)}(x_0) + Q_0^{(+)}(\xi, t)$ .

1.5. Первое приближение

Регулярная функция первого приближения определяется из уравнения  $f_u(\bar{u}_0, x, 0)\bar{u}_1(x) + f_\varepsilon(\bar{u}_0, x, 0) = 0$ , которое получается из (27) после собирания членов порядка  $\varepsilon$  в представлении всех слагаемых в виде рядов Тейлора по степеням малого параметра. Решение в силу наложенных условий существует и выражается следующим образом:

$$\bar{u}_1(x) = -\frac{f_\varepsilon(\bar{u}_0, x, 0)}{f_u(\bar{u}_0, x, 0)}. \quad (33)$$

Для функции переходного слоя слева от точки перехода из (28) получим уравнение

$$\left(k \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - f_u(\tilde{u}_0^{(-)}(\xi), x_0, 0)\right) Q_1^{(-)}(\xi, t) = q_1^{(-)}(\xi, t), \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} q_1^{(-)}(\xi, t) = & (-W_0 + V(x_0))Q_{0\xi}^{(-)} + \mu W_0 Q_{0\xi\xi\xi}^{(-)} + \\ & + (f_u(\tilde{u}^{(-)}(\xi), x_0, 0) - f_u(\bar{u}_0^{(-)}(x_0), x_0, 0))(\bar{u}_1^{(-)}(x_0) + \bar{u}_{0x}^{(-)}(x_0)(x_1 + \xi)) + \\ & + (f_x(\tilde{u}^{(-)}(\xi), x_0, 0) - f_x(\bar{u}_0^{(-)}(x_0), x_0, 0))(x_1 + \xi) + f_\varepsilon(\tilde{u}^{(-)}(\xi), x_0, 0) - f_\varepsilon(\bar{u}_0^{(-)}(x_0), x_0, 0), \end{aligned}$$

введено обозначение  $W_0(t) = x'_0(t)$ . Граничные условия

$$Q_1^{(-)}(0, t) = -\bar{u}_1^{(-)}(x_0) - \bar{u}_{0x}^{(-)}(x_0)x_1 + \varphi_x^*(x_0)x_1, \quad Q_1^{(-)}(-\infty, t) = 0. \quad (35)$$

Выпишем решение для  $Q_1^{(-)}(\xi, t)$  в явном виде:

$$Q_1^{(-)}(\xi, t) = Q_1^{(-)}(0, t) \frac{\tilde{\Phi}^{(-)}(\xi)}{\tilde{\Phi}^{(-)}(0)} - \frac{\tilde{\Phi}^{(-)}(\xi)}{k} \int_0^\xi (\tilde{\Phi}^{(-)}(\eta))^{-2} \int_\eta^{-\infty} \tilde{\Phi}^{(-)}(\sigma) q_1^{(-)}(\sigma, t) d\sigma d\eta, \quad (36)$$

где  $\tilde{\Phi}^{(-)}(\xi) = \frac{d(\bar{u}_0^{(-)}(x_0) + Q_0^{(-)})}{d\xi}$ .

Для функции переходного слоя справа от точки перехода получим уравнение

$$\left(k \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - f_u(\tilde{u}_0^{(+)}(\xi), x_0, 0)\right) Q_1^{(+)}(\xi, t) = q_1^{(+)}(\xi, t), \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} q_1^{(+)}(\xi, t) = & (-W_0 + V(x_0))Q_{0\xi}^{(+)} + \mu W_0 Q_{0\xi\xi\xi}^{(+)} + \\ & + (f_u(\tilde{u}^{(+)}(\xi), x_0, 0) - f_u(\bar{u}_0^{(+)}(x_0), x_0, 0))(\bar{u}_1^{(+)}(x_0) + \bar{u}_{0x}^{(+)}(x_0)(x_1 + \xi)) + \\ & + (f_x(\tilde{u}^{(+)}(\xi), x_0, 0) - f_x(\bar{u}_0^{(+)}(x_0), x_0, 0))(x_1 + \xi) + f_\varepsilon(\tilde{u}^{(+)}(\xi), x_0, 0) - f_\varepsilon(\bar{u}_0^{(+)}(x_0), x_0, 0). \end{aligned}$$

Уравнение (37) следует дополнить условиями сшивания решения в точке перехода и условием убывания функции переходного слоя при  $\xi \rightarrow +\infty$ ,

$$Q_1^{(+)}(0, t) = -\bar{u}_1^{(+)}(x_0) - \bar{u}_{0x}^{(+)}(x_0)x_1 + \varphi_x^*(x_0)x_1, \quad Q_1^{(+)}(+\infty, t) = 0. \quad (38)$$

Решение этой краевой задачи также можно найти в квадратурах:

$$Q_1^{(+)}(\xi, t) = Q_1^{(+)}(0, t) \frac{\tilde{\Phi}^{(+)}(\xi)}{\tilde{\Phi}^{(+)}(0)} - \frac{1}{k} \tilde{\Phi}^{(+)}(\xi) \int_0^\xi (\tilde{\Phi}^{(+)}(\eta))^{-2} \int_\eta^{+\infty} \tilde{\Phi}^{(+)}(\sigma) q_1^{(+)}(\sigma, t) d\sigma d\eta, \quad (39)$$

где  $\tilde{\Phi}^{(+)}(\xi) = \frac{d(\bar{u}_0^{(+)}(x_0) + Q_0^{(+)})}{d\xi}$ .

В силу условия баланса  $\tilde{\Phi}^{(+)}(0) = \tilde{\Phi}^{(-)}(0) = \tilde{\Phi}(0)$ .

Условие сшивания первых производных для функции ВПС первого приближения имеет вид

$$Q_{1\xi}^{(-)'}(0, t) + \varphi_x^{(-)'}(x_0) = Q_{1\xi}^{(+)'(0, t) + \varphi_x^{(+)'(x_0)}. \quad (40)$$

После подстановки (36) и (39) получим

$$\begin{aligned} Q_{1\xi}^{(-)'}(0, t) - Q_{1\xi}^{(+)'(0, t) = & \left( \frac{\tilde{\Phi}_\xi^{(-)'}(0)}{\tilde{\Phi}(0)} Q_1^{(-)}(0, t) - \frac{\tilde{\Phi}_\xi^{(+)'(0)}(0)}{\tilde{\Phi}(0)} Q_1^{(+)}(0, t) \right) + \\ & + \frac{1}{k\tilde{\Phi}(0)} \int_{-\infty}^0 \tilde{\Phi}^{(-)}(\xi) q_1^{(-)}(\xi, t) d\xi + \frac{1}{k\tilde{\Phi}(0)} \int_0^{+\infty} \tilde{\Phi}^{(+)}(\xi) q_1^{(+)}(\xi, t) d\xi. \end{aligned}$$

Выделим в выражении  $q_1^{(\pm)}(\xi, t)$  слагаемые, содержащие  $W_0$ ,

$$q_1^{(\pm)}(\xi, t) = -W_0 Q_{0\xi}^{(\pm)} + \mu W_0 Q_{0\xi\xi\xi}^{(\pm)} + K_1^{(\pm)}(\xi, t),$$

причем в  $K_1^{(\pm)}(\xi, t)$  отсутствуют  $x'_0, x'_1$ :

$$K_1^{(\pm)}(\xi, t) = V(x_0)Q_{0\xi}^{(\pm)} + (f_u(\tilde{u}^{(\pm)}(\xi), x_0, 0) - f_u(\bar{u}_0^{(\pm)}(x_0), x_0, 0))(\bar{u}^{(\pm)}(x_0) + \bar{u}_{0x}^{(\pm)}(x_0)(x_1 + \xi)) + (f_x(\tilde{u}^{(\pm)}(\xi), x_0, 0) - f_x(\bar{u}_0^{(\pm)}(x_0), x_0, 0))(x_1 + \xi) + f_\varepsilon(\tilde{u}^{(\pm)}(\xi), x_0, 0) - f_\varepsilon(\bar{u}_0^{(\pm)}(x_0), x_0, 0).$$

Тогда условие сшивания можно представить в виде:

$$\frac{\tilde{\Phi}'_\xi(0)}{\tilde{\Phi}(0)}(Q_1^{(-)}(0, t) - Q_1^{(+)}(0, t)) + \frac{1}{k\tilde{\Phi}(0)} \int_{-\infty}^0 \tilde{\Phi}^{(-)}(\xi)(-W_0 Q_{0\xi}^{(-)} + \mu W_0 Q_{0\xi\xi\xi}^{(-)} + K_1^{(-)}(\xi))d\xi + \frac{1}{k\tilde{\Phi}(0)} \int_0^{\infty} \tilde{\Phi}^{(+)}(\xi)(-W_0 Q_{0\xi}^{(+)} + \mu W_0 Q_{0\xi\xi\xi}^{(+)} + K_1^{(+)}(\xi))d\xi + (\varphi_x^{(-)'}(x_0) - \varphi_x^{(+)'}(x_0)) = 0.$$

Учтем, что  $\tilde{\Phi}^{(\pm)}(\xi) = Q_{0\xi}^{(\pm)}$  и введем следующие обозначения:

$$T_1^{(\pm)} = \int_0^{\pm\infty} (Q_{0\xi}^{(\pm)})^2 d\xi, \\ T_{K_1}^{(\pm)} = \int_0^{\pm\infty} Q_{0\xi}^{(\pm)} K_1^{(\pm)}(\xi) d\xi. \\ T_3^{(\pm)} = \int_0^{\pm\infty} Q_{0\xi}^{(\pm)} Q_{0\xi\xi\xi}^{(\pm)} d\xi = Q_{0\xi}^{(\pm)} Q_{0\xi\xi\xi}^{(\pm)} \Big|_0^{\pm\infty} - \int_0^{\pm\infty} (Q_{0\xi\xi}^{(\pm)})^2 d\xi,$$

Из условия сшивания первых производных найдем выражение для скорости дрейфа ВПС в нулевом приближении:

$$W_0 = \frac{k\tilde{\Phi}(0)}{\left( (T_1^{(-)} - T_1^{(+)}) - \mu(T_3^{(-)} - T_3^{(+)}) \right)} \times \left( \frac{\tilde{\Phi}'_\xi(0)}{\tilde{\Phi}(0)}(-Q_1^{(-)}(0, t) + Q_1^{(+)}(0, t)) + \frac{1}{k\tilde{\Phi}(0)}(T_{K_1}^{(-)} - T_{K_1}^{(+)}) - (\varphi_x^{(-)'}(x_0) - \varphi_x^{(+)'}(x_0)) \right). \quad (41)$$

Таким образом, координата точки перехода в нулевом приближении  $x_0(t)$  определяется из задачи Коши:

$$\frac{dx_0}{dt} = W_0(x_0), \quad x_0(0) = x_{00},$$

где  $x_{00}$  — начальное положение фронта,  $x_{00} \in (a, b)$ .

Приведенные формулы справедливы для любой функции  $f(u, x, \varepsilon)$ , удовлетворяющей сформулированным ранее условиям. Однако, для расчета скорости дрейфа первого приближения в аналитической форме необходимо найти функции переходного слоя нулевого приближения. В общем виде, для произвольной  $f(u, x, \varepsilon)$ , указанные функции получаются из решения нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Существует несколько примеров, для которых интегралы можно найти

аналитически. Пусть  $f(u, x, \varepsilon) = \gamma u(u^2 - U^2(x))$ , тогда

$$Q_0^{(+)}(\xi, t) = -\frac{2U(x_0)}{C e^{\frac{2\xi}{\theta}} + 1}, \quad Q_0^{(-)}(\xi, t) = \frac{2U(x_0)}{C^{-1} e^{-\frac{2\xi}{\theta}} + 1}, \quad (42)$$

где

$$\theta = \sqrt{\frac{2k}{U^2(x_0)\gamma}}, \quad C = \frac{U(x_0) + \varphi^{(*)}(x_0)}{U(x_0) - \varphi^{(*)}(x_0)}. \quad (43)$$

После вычисления интегралов, входящих в (1.1.5), найдем явное выражение скорости дрейфа ВПС:

$$W_0(x_0) = \frac{V - 3k \frac{U_x(x_0)}{U(x_0)}}{\mu \frac{4}{5\theta^2} + 1}, \quad \frac{dx_0}{dt} = W_0(x_0). \quad (44)$$

Задача Коши (44) определяет скорость фронта в момент времени  $t$  с учетом начального условия  $x_0(0) = x_{00}$  для случая  $f(u, x, \varepsilon) = \gamma u(u^2 - U^2(x))$ .

Из уравнения (44) следует, что скорость фронта волны не зависит от точки сшивания и определяется только значением  $x_0$  координаты фронта ВПС. Этот результат является физически оправданным и ожидаемым.

Теперь можно указать промежуток времени, для которого решение имеет вид КС с одним ВПС. Это будет иметь место до тех пор, пока центральная точка ВПС, определяемая из задачи Коши для уравнения (44) удалена от левого и правого концов промежутка  $(a, b)$  на расстояние  $d \gg \theta$ , где  $\theta$  есть толщина ВПС, определенная в (43).

### 1.6. Приближения высших порядков

Заметим, что начиная с первого приближения все последующие получаются из решения линейных краевых задач такого же вида как (34) и (37). Соответственно, явные выражения для функций переходного слоя очередного приближения находятся в явном виде, так же как (36) и (39). Легко доказать, что для вычисления координаты точки перехода получится задача Коши такого же вида, как (44). Таким образом, для уравнения КПП со сбалансированной неоднородностью в  $m$ -м порядке аппроксимации сначала находятся функции переходного слоя  $m$ -го порядка из линейной краевой задачи, причем на этом этапе скорость  $W_m$  не определяется, так как эта краевая задача данную величину не включает. Затем определяется  $W_{m-1}$ , причем эта величина определяется как функционал от  $Q_m^{(\pm)}$ . Можно показать (но это доказательство выходит за рамки данной работы), что все указанные линейные краевые задачи разрешимы, причем все интегралы в явном представлении решения равномерно сходятся.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рассмотрим несколько примеров численного моделирования движения ВПС. На рис. 2 представлено движение ВПС для уравнения реакции-диффузии в среде со сбалансированной неоднородностью. Функции  $\varphi^{(\pm)}(x), \varphi^{(0)}(x)$  выбраны следующим образом:  $\varphi^{(-)}(x) = -0.5 - 0.125(x - 1)^2, \varphi^{(0)}(x) = 0, \varphi^{(+)}(x) = 0.5 + 0.125(x - 1)^2, k = 0.001$ . Параметры подобраны так, чтобы в точке  $x = 1$  скорость дрейфа была равна нулю. Рассчитанная по формуле (44) скорость дрейфа в точке  $x = 3$  равна  $W_0 = 0.0015$ , измеренная в численном эксперименте скорость дрейфа в той же точке равна  $\tilde{W}_0 = 0.001507$ .

Рассмотрим движение ВПС для уравнения ОКПП в неоднородной среде со сбалансированной неоднородностью, рис. 3. Параметр  $\mu = 0.0025$  выбран так, чтобы в соответствии с (44) скорость дрейфа в точке  $x = 3$  была ровно в два раза меньше, чем для уравнения реакции-диффузии. Измеренная в численном

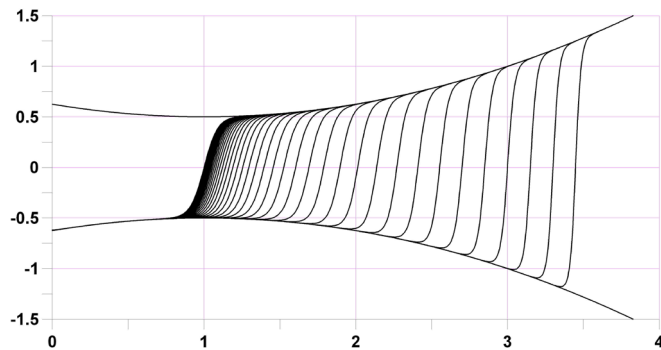


Рис. 2: Дрейф ВПС для уравнения реакция-диффузия в среде со сбалансированной неоднородностью

эксперименте скорость дрейфа в точке  $x = 3$  равна  $\tilde{W}_0 = 0.000753$ . Более подробный анализ показывает, что отличие от точного значения обусловлено слагаемым  $\epsilon W_1$  ряда (12). На рис. 4 показана эволюция

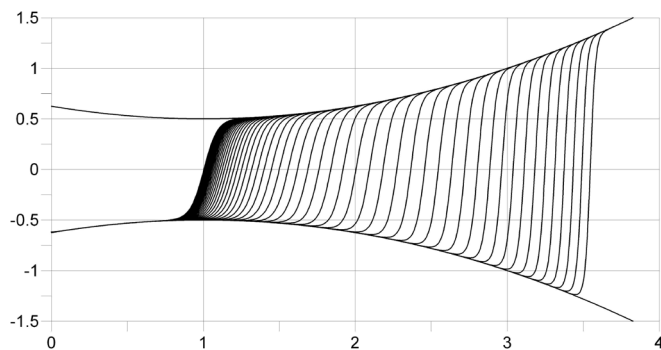


Рис. 3: Дрейф ВПС для уравнения КПП в среде со сбалансированной неоднородностью

КС для уравнения ОКПП в неоднородной среде с точкой нулевой скорости,  $\varphi^{(+)}(x) = 0.5 + 0.125(x - 2)^2 = -\varphi^{(-)}(x)$ . В первом приближении скорость дрейфа в точке  $x = x_0 = 2$  равна нулю, решение уравнения движения ВПС имеет вид  $x^*(t) - x_c = (x_0^* - x_c)e^{-(t-t_0)/\delta t}$ , где  $x^*(t)$  есть координата центральной точки ВПС,  $x_0^*$  — начальное условие, т. е. координата центральной точки ВПС в заданный момент времени  $t_0, x_c$  — координата точки экстремума функции  $\varphi^{(+)}(x)$ . Таким образом, время жизни КС в первом приближении в данном случае бесконечно велико. Можно показать, что во втором приближении для скорости дрейфа время имеет конечное значение, так что время жизни КС конечно, как и показывает рис. 4. После того, как два ВПС противоположной полярности сближаются на расстояние, сравнимое с толщиной ВПС, происходит взаимное уничтожение двух ВПС, после чего решение перестает быть контрастной структурой. На рис. 5 изображена эволюция сложной КС с двумя ВПС, в которой происходит структурная перестройка КС за счет сближения ВПС на расстояние, сравнимое с толщиной ВПС.

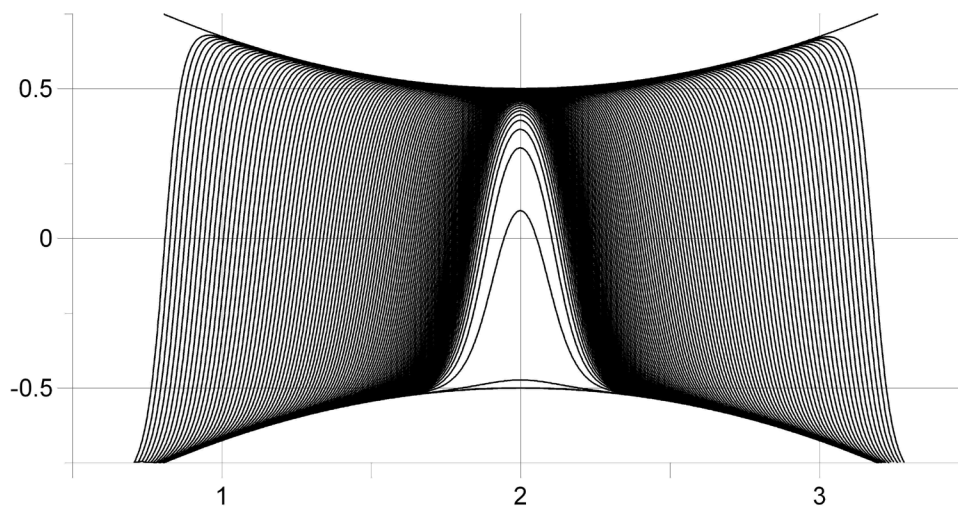


Рис. 4: Эволюция КС для уравнения КПШ в неоднородной среде с точкой нулевой скорости

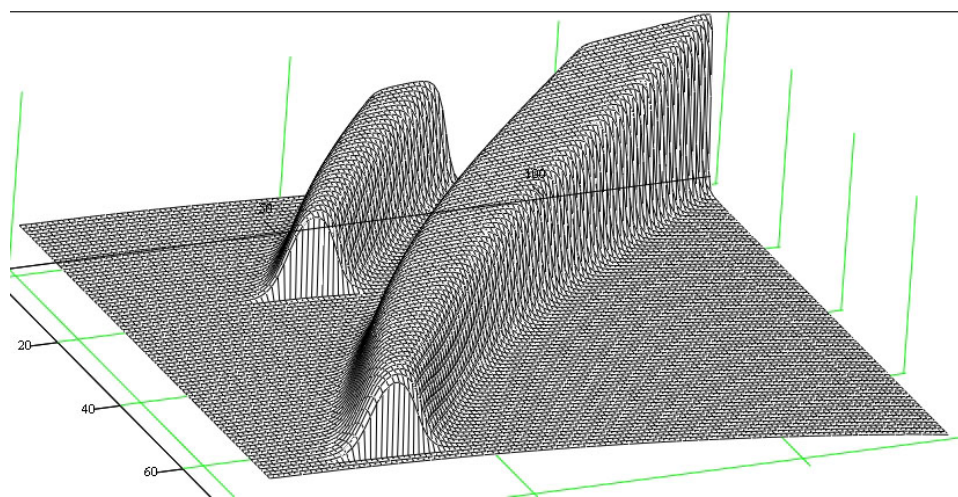


Рис. 5: Эволюция сложной КС с двумя ВПС

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе с помощью метода погранфункций было построено асимптотическое разложение решения нестационарного уравнения псевдопараболического типа вида КС, найдена скорость движения фронта

в нулевом и первом приближении.

Авторы выражают благодарность В. Ф. Бутузову, А. Г. Никитину за обсуждение результатов и ценные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 10-01-00319-а и 12-01-00387-а).

- [1] Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. (Физматлит. 2007).
- [2] Корпусов М. О., Свешников А. Г. Журнал вычислительной математики и математической физики. **45**, №. 2. С. 272-286. (2005).
- [3] Benguria R. D., Depassier M. C. Science Direct. Physica A. **356**. P. 61-65. (2005).
- [4] Кожанов А. И. Математические заметки. **65**, вып. 1.

- С. 70-75. (1999).
- [5] Гладков А. Л. Математические заметки. **60**, вып. 3. С. 356-362. (1996).
- [6] Нефедов Н. Н. Математическое моделирование. **4**, №. 8. С. 58-65. (1992).
- [7] Журнал вычислительной математики и математической физики. **50**, №. 2. С. 276-285. (2010).
- [8] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н. Фундаментальная и прикладная математика. **4**, №. 3.



С. 799-851. (1998).

[9] Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. Магнитные поля в астрофизике. (Ин-т хаотич. динам. М.-Ижевск, 2006).

[10] Быков А. А., Попов В. Ю. Журнал вычислительной математики и математической физики. **309**, №.2. С. 280-288. (1999).

---

## Dynamics of internal transition layers in the initial–boundary value problem for the extended Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation

A. A. Bykov<sup>a</sup>, N. N. Nefedov<sup>b</sup>, A. S. Sharlo<sup>c</sup>

*Department of Mathematics, Faculty of Physics, M.V.Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*

*E-mail: <sup>a</sup>abkov@yandex.ru, <sup>b</sup>nefedov@phys.msu.ru, <sup>c</sup>sharlo@physics.msu.ru*

Drift of the internal transition layer is investigated for the pseudo-parabolic third order equation in the heterogeneous medium in case of the contrast structure like solution. Method of the singular expansion of the decision into the series by powers of the small parameter is used. Several basic terms of the series for the velocity of internal transition layer movement are found.

PACS: 02.60.Lj.

*Keywords:* internal transition layer, contrast structure, asymptotic methods.

*Received 29 July 2012.*

### Сведения об авторах

1. Быков Алексей Александрович — докт. физ.-мат. наук, профессор, e-mail: abkov@yandex.ru.
  2. Неведов Николай Николаевич — докт. физ.-мат. наук, профессор, e-mail: nefedov@phys.msu.ru.
  3. Шарло Алена Станиславовна — аспирант; e-mail: sharlo@physics.msu.ru.
-