

Логарифмический потенциал и учёт краевых эффектов в задаче о плоском конденсаторе

А.В. Курилин*

Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ) Россия, 111024, Москва, ул. Авиамоторная, 8А
(Поступила в редакцию 13.04.2026; подписана в печать 24.04.2026)

Анализируется решение уравнения Лапласа в двумерном случае для задачи о плоском конденсаторе. Получены аналитические формулы для потенциала и напряженности электростатического поля, соответствующего равномерному распределению зарядов по двум пластинам из диэлектриков конечной ширины. Рассмотрен также случай бесконечно тонкого двумерного слоя зарядов в пространстве двух измерений. По результатам численных расчётов в программе Mathcad построены графики и картины силовых линий, позволяющие учесть краевые эффекты в классической модели однородного электростатического поля.

PACS: 03.50.De, 01.40.-d, 02.30.Jr

УДК: 537.2

Ключевые слова: уравнение Лапласа, плоский конденсатор, краевые эффекты, теория двумерного потенциала, электростатика, компьютерные вычисления.

ВВЕДЕНИЕ

Задача об электрическом поле плоского заряженного конденсатора входит во все классические учебники по курсам общей физики [1–3]. В модели однородного электростатического поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью, которая входит в состав конденсатора, используется лишь та область пространства, что значительно удалена от его границ. В этом случае можно использовать далёкие расстояния как физическую бесконечность, упрощая тем самым решение задачи. В реальности все конденсаторы имеют конечные размеры и однородное электрическое поле не только искажается так называемыми краевыми эффектами, но и способно выходить за границы самого конденсатора. В данной работе предлагается уточнить модель бесконечных заряженных плоскостей и ограничить размеры конденсатора в одном из направлений, например, вдоль оси X . Такой подход позволит найти допустимые границы применимости модели однородного поля. По сути решается задача для потенциала электростатического поля, через уравнение Лапласа в двух измерениях в плоскости с двумя разрезами вдоль конечных отрезков $-\ell \leq x \leq \ell$, $y = 0$ и $-\ell \leq x \leq \ell$, $y = d$, на которых равномерно распределены электрические заряды. Примечательно, что принцип суперпозиции полей точечных зарядов, часто применяемый в физических задачах, в рамках университетского курса «Уравнения математической физики» [4] в двумерном случае называется теорией «логарифмического потенциала», поскольку фундаментальное решение уравнения Лапласа в пространстве двух измерений выражается через логарифмическую функцию. К сожалению, в известных учебниках по общей и теоретической физике [5, 6] теории логарифмического потенциала практически не уделяется никакого

внимания, что на наш взгляд является большим упущением. С физической точки зрения ситуацию можно пояснить так, что в двумерном случае поле заряженной полосы, составляющей одну из обкладок плоского конденсатора, складывается из полей бесконечно длинных заряженных нитей на которые её можно мысленно разделить, поэтому принцип суперпозиции полей нужно применять не к полям точечных зарядов, а к полям заряженных нитей, потенциалы которых выражаются через логарифмическую функцию.

1. МОДЕЛЬ ДВУМЕРНОГО КОНДЕНСАТОРА

Рассмотрим две бесконечно длинные в направлении оси Z полосы (обкладки конденсатора) конечной ширины 2ℓ ($-\ell \leq x \leq \ell$), бесконечно малой толщины, несущие на себе равномерно распределённые разноимённые электрические заряды с поверхностной плотностью $\sigma = \frac{\Delta q}{\Delta S}$ (Кл/м²). Нормаль к обкладкам конденсатора направим по оси OY , а начало выбранной системы декартовых координат поместим в произвольной точке на оси Z в центре отрицательно заряженной пластины симметрично по отношению к её краям. Положительно заряженную пластину конденсатора поместим параллельно на некотором расстоянии d в направлении вектора нормали (см. рис. 1).

Электрический потенциал одной из пластин конденсатора, удовлетворяющий уравнению Лапласа, может быть найден по формуле:

$$\varphi(x, y) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\ell}^{\ell} \ln \left(\frac{\ell}{\sqrt{(\xi - x)^2 + y^2}} \right) d\xi + \varphi_0, \quad (1)$$

где $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная в системе СИ, $\varphi_0 = \text{const}$ — произвольная постоянная, определяющая нормировку потенциала.

Интеграл (1) вычисляется аналитически и после ин-

* kurilin@mail.ru

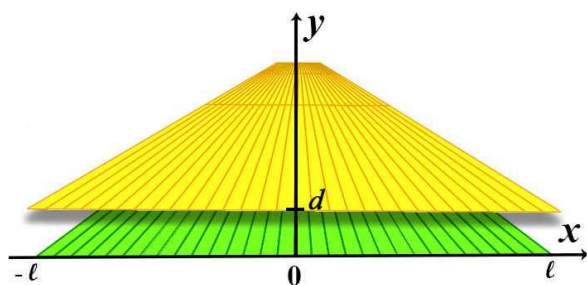


Рис. 1. Модель плоского конденсатора конечных размеров вдоль направления оси X

тегрирования приходим к следующей базовой формуле:

$$\varphi(x, y) = k\sigma \left\{ (x - \ell) \ln \left[\frac{(x - \ell)^2 + y^2}{\ell^2} \right] - (x + \ell) \ln \left[\frac{(x + \ell)^2 + y^2}{\ell^2} \right] + 2y \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{x - \ell}{y} \right) - 2y \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{x + \ell}{y} \right) \right\}. \quad (2)$$

где $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.99 \cdot 10^9$ (Н·м²/Кл²) — электрическая постоянная в законе Кулона.

Потенциал поля плоского конденсатора находим по принципу суперпозиции полей равномерно заряженных пластин разных знаков.

$$\Phi(x, y) = \varphi(x, y - d) - \varphi(x, y). \quad (3)$$

Нормировку потенциала выбираем, так чтобы в центре конденсатора на расстоянии, равноудалённом от его обкладок, потенциал электрического поля был равен нулю.

Несложно убедиться в том, потенциал (3) действительно удовлетворяет уравнению Лапласа во всей плоскости XY кроме тех отрезков, где расположены электрические заряды ($-\ell \leq x \leq \ell$, $y = 0$, $y = d$):

$$\Delta\Phi(x, y) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

Для численных оценок и построения графиков выберем следующие параметры задачи $\sigma = 10$ нКл/м², $\ell = 0.8$ м, $d = 0.1$ м. На рис. 2 показаны эквипотенциальные поверхности системы электрических зарядов плоского конденсатора конечной ширины ($-\ell \leq x \leq \ell$) и бесконечной длины ($-\infty < z < +\infty$) вычисляемые по формулам (2) и (3).

Как видно из графиков на самих обкладках конденсатора потенциал поля убывает по модулю в два раза при переходе от центра пластины к её краям. Например

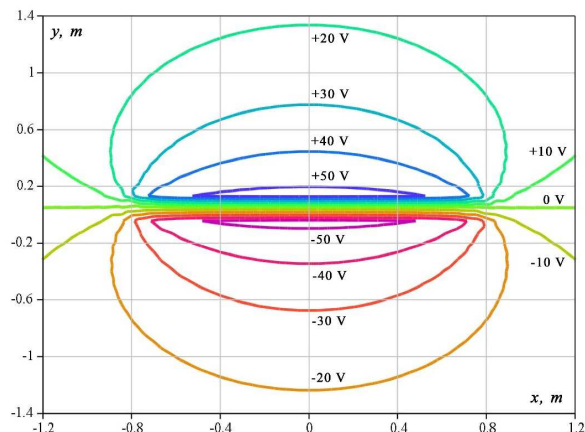


Рис. 2. Потенциал двумерной системы зарядов плоского конденсатора конечной ширины $-0.8 \leq x \leq 0.8$, равномерно распределённых по его обкладкам: $y = 0$ (отрицательные заряды), $y = 0.1$ (положительные заряды)

потенциал положительно заряженной пластины конденсатора изменяется от значения $\varphi(0, 0.1) = 56.486$ В в центре до значения $\varphi(\pm 0.8, 0.1) = 28.243$ В. на границе. Это свидетельствует о том, что такое равномерное распределение заряда возможно только для диэлектриков, ибо для проводников вся поверхность одной из обкладок конденсатора должна иметь одинаковый потенциал. Зависимость потенциала от x-координаты внутри конденсатора показана на рис. 3 для разных значений координаты $0 \leq y \leq 0.1$ м. Потенциал электрического поля на больших расстояниях от границы конденсатора ведет себя практически также как и в модели однородного электрического поля, оставаясь неизменным при фиксированном значении координаты $y = \text{const}$. Отклонения от этой модели наблюдаются на расстояниях порядка $\Delta x = \frac{d}{2\pi} = 1.25$ см от края пластин конденсатора, где потенциал начинает быстро убывать. При выходе за границы конденсатора потенциал электрического поля резко стремится к нулю.

Снаружи конденсатора электрическое поле тоже существует, что можно понять из рис. 4 для трёх различных значений координаты удаленных от верхней и нижней обкладок конденсатора на расстояния $d = 10$ см, $4d = 40$ см, $9d = 90$ см. Вычисления показывают, что учёт конечных размеров плоского конденсатора приводит к тому, что электрическое поле выходит за его пределы и способно влиять на окружающее пространство, в области рядом с его границами. При этом не так важно само значение потенциала поля, как быстрота его изменения. На расстоянии $9d$ изменения потенциала уже происходят очень плавно и роль краевых эффектов совсем не значительна.

Поведение потенциала электрического поля вдоль нормали к пластинам плоского конденсатора показано на рис. 5. При движении по линии нормали вдоль

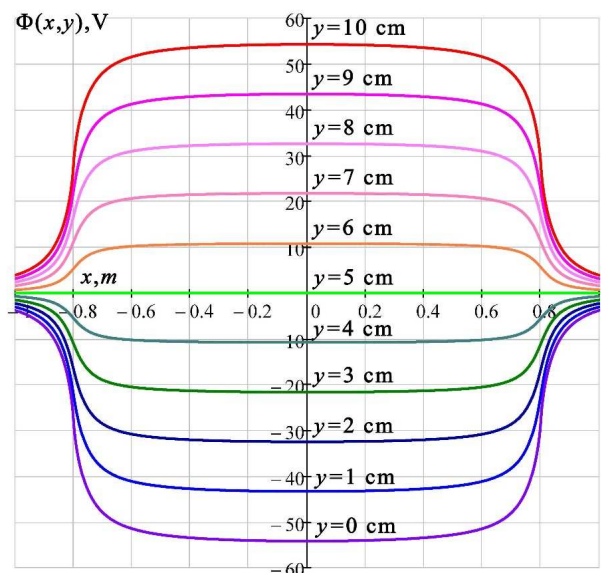
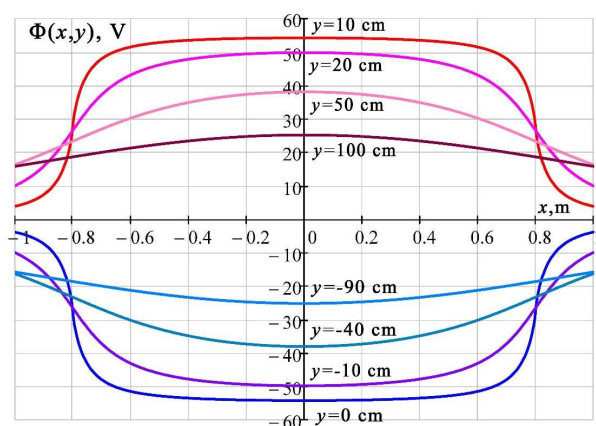


Рис. 3. Изменение потенциала поля внутри плоского конденсатора

оси OY , пересекающей обкладки конденсатора ($|x| < 0.8$ м), происходит излом графика электрического потенциала, что соответствует скачку y -компоненты вектора напряженности электрического поля (6) в полном согласии с граничными условиями, вытекающими из уравнений Максвелла. Во внешней области $|x| > 0.8$ м

Рис. 4. Изменение потенциала вдоль оси OX снаружи плоского конденсатора

излом графика потенциала вдоль линии нормали, не наблюдается (см. рис. 5), поскольку электрические заряды там отсутствуют.

Интересно также проследить как изменяется напряжённость электрического поля в различных точках пространства внутри и снаружи плоского конденсатора конечной ширины. Компоненты вектора напряженности электростатического поля находим как градиент потенциала $\vec{E}(x, y) = -\vec{\nabla}\Phi(x, y)$ и вычисляем через

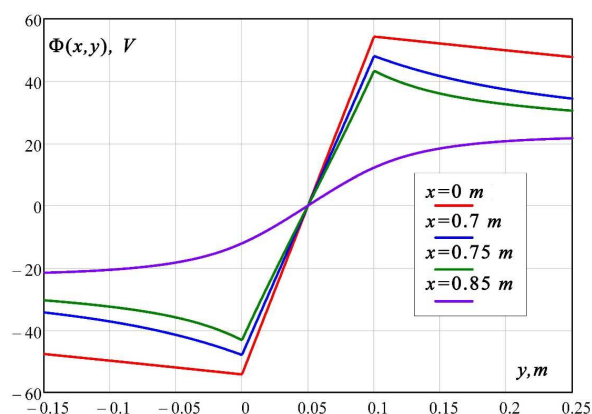


Рис. 5. Изменение потенциала поля вдоль нормали, к пластинам конденсатора

частные производные:

$$E_x = -\frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial y}. \quad (5)$$

Получаем после дифференцирования и упрощения следующие соотношения:

$$E_x = k\sigma \cdot \ln \left[\frac{(x + \ell)^2 + (y - d)^2}{(x - \ell)^2 + (y - d)^2} \right] - k\sigma \cdot \ln \left[\frac{(x + \ell)^2 + y^2}{(x - \ell)^2 + y^2} \right] \quad (6)$$

$$E_y = 2k\sigma \cdot \left\{ \arctg \left(\frac{x + \ell}{y - d} \right) - \arctg \left(\frac{x - \ell}{y - d} \right) - \arctg \left(\frac{x + \ell}{y} \right) + \arctg \left(\frac{x - \ell}{y} \right) \right\}. \quad (7)$$

По мере приближения к краям плоского конденсатора напряжённость электростатического поля неограниченно возрастает и имеет логарифмическую расходимость на границах ($|x| \rightarrow \ell$, $y = 0$, $y = d$), что обусловлено выбором модели бесконечно малой толщины обкладок конденсатора. Физически разумное максимальное значение на границах можно было бы оценить по формуле, включающей толщину заряженной пластины конденсатора ($\delta \ll d$):

$$E_{\max} \approx k\sigma \cdot \ln \left(\frac{4\ell^2}{\delta^2} \right) \quad (8)$$

Данную расходимость можно проследить по графикам на рис. 6, где показаны изменения продольной E_x -компоненты (6) вектора напряженности электрического поля внутри конденсатора. При выборе толщины пластин конденсатора порядка $\delta \approx 1$ мм значения вектора напряженности на его границах могут достигать значений порядка $E_x \approx 800$ В/м, что вполне сравнимо с напряжённостью поля внутри самого конденсатора.

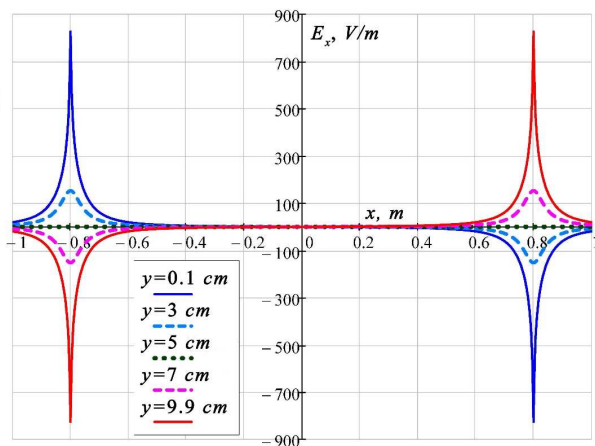


Рис. 6. Продольная компонента (E_x) вектора напряженности электрического поля внутри конденсатора

Что касается нормальной составляющей компоненты электрического поля E_y (7), то её поведение напоминает модель однородного электростатического поля плоского конденсатора бесконечных размеров. Внутри кон-

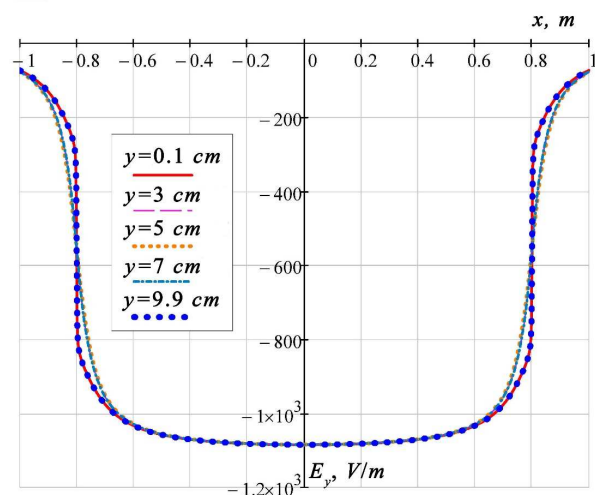


Рис. 7. Нормальная компонента (E_y) вектора напряженности электрического поля внутри конденсатора

денсатора, $-0.8\text{ м} < x < 0.8\text{ м}$, $0 < y < 0.1\text{ м}$, не слишком близко к его границам электрическое поле практически постоянно и продольная составляющая вектора напряженности равна нулю ($E_x \approx 0\text{ В/м}$). Что касается нормальной составляющей (E_y), то в полном согласии с моделью однородного поля она может быть найдена по известной формуле:

$$E_y = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \approx 1.13\text{ кВ/м}. \quad (9)$$

Данное обстоятельство иллюстрируется графиками на рис. 6 и рис. 7. По мере приближения к границам конденсатора продольная E_x -компонента электрического

поля увеличивается, а нормальная E_y -компонента поля уменьшается и отклонения от модели однородного электрического поля становятся все более заметными. Во внешней области по отношению к обкладкам плос-

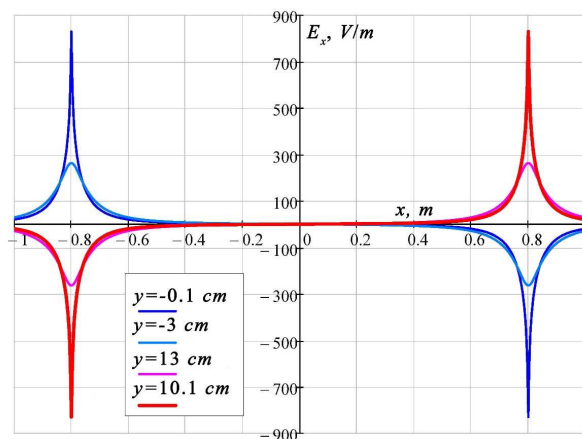


Рис. 8. E_x -компонента вектора напряжённости электрического поля снаружи конденсатора

кого конденсатора $y < 0$ или $y > 0.1\text{ м}$ электрическое поле наиболее заметно себя проявляет у границ заряженных плоскостей, что наглядно видно из графиков на рис. 8 и рис. 9. При этом нормальная составляющая вектора напряженности электрического поля (E_y), доминирует в области $-0.8\text{ м} < x < 0.8\text{ м}$, а продольная компонента (E_x) наиболее заметно проявляет себя непосредственно у края заряженных пластин ($|x| \approx 0.8\text{ м}$). Картина силовых линий внутри конденсатора, рассчитанная по формулам (6), (7) около его правой границы $x \approx 0.8\text{ м}$, показана на рис. 10.

Искажение силовых линий становятся уже заметными на расстоянии $\frac{d}{2\pi} \approx 1.6\text{ см}$ от края конденсатора. По мере приближения к границе заряженной пластины вектор напряженности электрического поля все больше поворачивается в продольном направлении и у самого края при $y = 0$, $y = 0.1\text{ м}$, $x \rightarrow 0.8\text{ м}$ нормальная компонента вектора напряженности стремится к нулю $E_y \approx 0\text{ В/м}$. Внутри конденсатора для оценки так называемых “краевых эффектов” можно использовать формулу вытекающую из (7) при условии $0 < \ell - |x| \ll \frac{d}{2\pi}$:

$$E_y = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\pi} \frac{\ell d}{\ell^2 - x^2} \right). \quad (10)$$

Данное соотношение даёт точность вычисления порядка 1.4% для значений $-0.6\text{ м} \leq x \leq 0.6\text{ м}$.

Во внешней области в том случае, когда ширина самого конденсатора много больше расстояния между его пластинами $d \ll \ell$ можно использовать асимптотические формулы для потенциала и напряженности поля двойного слоя зарядов, вытекающие из (2), (3) и (6), (7) при $d \rightarrow 0$.

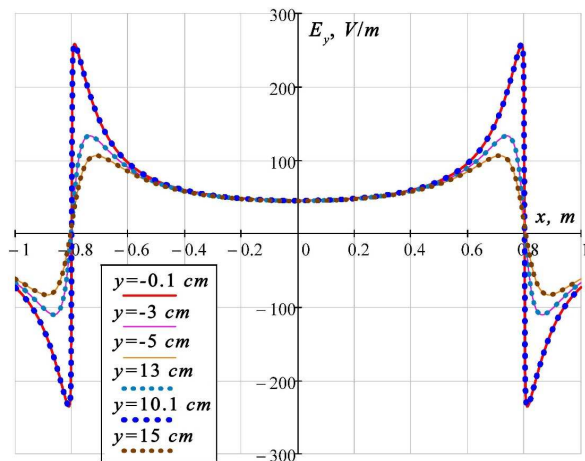


Рис. 9. E_y -компонента вектора напряжённости электрического поля нормальная к полосе зарядов.

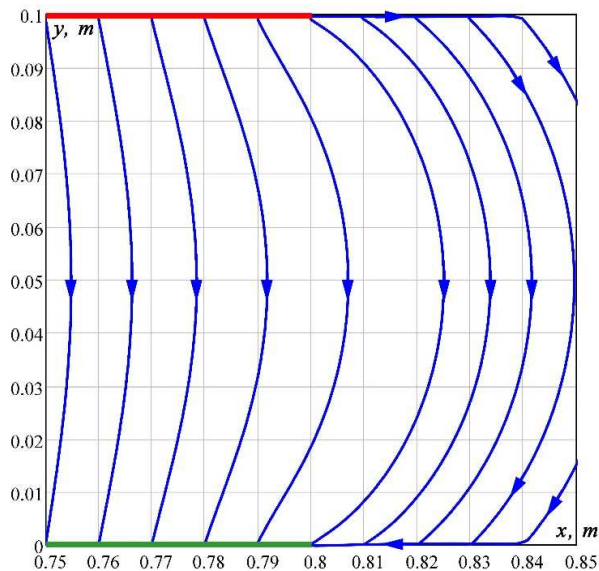


Рис. 10. Картина силовых линий вектора напряжённости электростатического поля около правой границы плоского конденсатора

Потенциал электростатического поля для двойного заряженного слоя очень малой толщины $d \ll \ell$ и конечной ширины $-\ell \leq x \leq \ell$ можно записать в следующем виде:

$$\Phi(x, y) = 2k\sigma d \left\{ \arctg\left(\frac{x+\ell}{y}\right) - \arctg\left(\frac{x-\ell}{y}\right) \right\} \quad (11)$$

Также, как и в случае с конденсатором произвольной толщины можно убедиться в том, что потенциал (11) удовлетворяет уравнению Лапласа (4) для двумерного случая во всей плоскости (x, y) , кроме тех точек, где расположены электрические заряды $-\ell \leq x \leq \ell$, $y = 0$. Компоненты вектора напряжённости электриче-

ского поля находим по формулам (5) и теперь они заметно упрощаются:

$$E_x(x, y) = \frac{8k\sigma\ell d \cdot xy}{[(x-\ell)^2 + y^2][(x+\ell)^2 + y^2]} \quad (12)$$

$$E_y(x, y) = \frac{4k\sigma\ell d \cdot (y^2 - x^2 + \ell^2)}{[(x-\ell)^2 + y^2][(x+\ell)^2 + y^2]} \quad (13)$$

Анализ формулы (11) показывает, что эквипотенциальные линии в этом случае имеют вид похожий на рис. 2 и состоят из дуг окружностей, радиусы и положения центров которых зависят от значения потенциала $\Phi(x, y)$ (11) на заданной линии:

$$x^2 + (y - R_\phi)^2 = R_\phi^2 + \ell^2, \quad (14)$$

где $R_\phi = \ell \operatorname{ctg}\left(\frac{\Phi}{2k\sigma d}\right)$, $\Phi(x, y) > 0$ при $y > 0$ и $\Phi(x, y) < 0$ при $y < 0$. На самой границе $\Phi(x, y) = 0$ при $y = 0, |x| > \ell$. В области $-\ell \leq x \leq \ell$ функция потенциала двойного слоя зарядов имеет линию разрыва первого рода. Потенциал верхней положительной обкладки равен $\Phi(x, +0) = 2\pi k\sigma d$, а потенциал нижней отрицательной обкладки $\Phi(x, -0) = -2\pi k\sigma d$.

Этот скачок потенциала можно понять из графиков на рис. 5, когда внутренняя часть конденсатора ($0 < y < d = 0.1$ м) вырождается в вертикальную линию при $d \rightarrow 0$. С математической точки зрения формулу (11) можно преобразовать к следующему виду:

$$\Phi(x, y) = 2k\sigma d \left[\pi \operatorname{sgn}(y) - \arctg\left(\frac{2y\ell}{\ell^2 - x^2 - y^2}\right) \right], \quad \text{при } x^2 + y^2 < \ell^2, \quad (15)$$

где знаковая функция

$$\operatorname{sgn}(y) = \begin{cases} +1, & y > 0 \\ -1, & y < 0 \end{cases}$$

как раз отвечает за разрыв потенциала на границе двойного слоя зарядов.

Картина силовых линий векторного электростатического поля в данном случае показана на рис. 11 и она состоит из окружностей переменного радиуса и смещённого центра. Двойной заряженный слой (конденсатор) показан на этом рисунке в виде двухцветной узкой полосы, расположенной на оси абсцисс в области $-0.8 \text{ м} < x < 0.8 \text{ м}$

Формулы для силовых линий электростатического поля получаются из решения дифференциального уравнения, включающего компоненты вектора напряжённости электрического поля (12) и (13).

$$\frac{dx}{E_x(x, y)} = \frac{dy}{E_y(x, y)} \Rightarrow (x - R)^2 + y^2 = R^2 - \ell^2, \quad R = \text{const}, |R| > \ell. \quad (16)$$

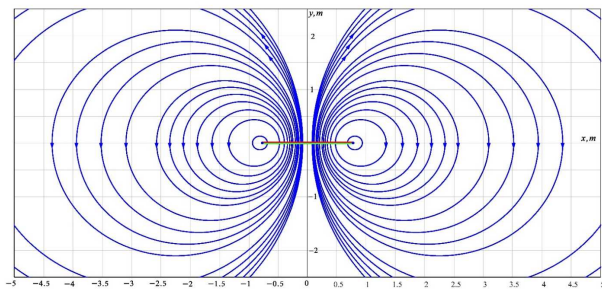


Рис. 11. Картина силовых линий внешнего электрического поля плоского конденсатора конечной ширины $-0.8 \text{ м} \leq x \leq 0.8 \text{ м}$ и бесконечно малой толщины при $d \rightarrow 0$

Вдали от изучаемого двумерного конденсатора конечной ширины при $|x|, |y| \gg \ell$ характеристики электрического поля асимптотически стремятся к полю двумерного диполя [7]. Две бесконечные равномерно заряженные нити с линейной плотностью заряда $\lambda = 2\ell\sigma$ расположенные на некотором очень малом расстоянии d близко друг к другу описываются следующим потенциалом в полярной системе координат:

$$\Phi(x, y) = \frac{\lambda d \sin \phi}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad \phi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (17)$$

Компоненты вектора напряженности электрического поля определяются в этом случае формулами:

$$E_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\lambda d \sin \phi}{2\pi\epsilon_0 r^2}, \quad E_\phi = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = -\frac{\lambda d \cos \phi}{2\pi\epsilon_0 r^2}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье было изучено решение уравнения Лапласа в двумерном случае, соответствующее рав-

номерному распределению заряда по двум бесконечно длинным пластинам из диэлектриков конечной ширины. Решение задач электростатики представляет интерес как с академической точки зрения, так и в качестве методического материала для студентов, изучающих общую и теоретическую физику в рамках университетских курсов. Модель двумерного распределения зарядов позволяет получить точные решения для конденсатора ограниченных размеров, учесть граничные эффекты и определить погрешности расчётов в классической задаче об однородном электростатическом поле. Многие задачи электростатики в двумерном случае подробно разбираются в книге [7] и они имеют тесную связь с теорией функций комплексной переменной $z = x + iy$, поскольку, как известно, вещественная и мнимая части аналитических функций автоматически удовлетворяют уравнению Лапласа (4) из-за условий Коши-Римана. В этой связи изучение электростатических полей в пространстве двух измерений способствует не только развитию математических навыков у студентов, но и расширяет межпредметные связи между различными дисциплинами, изучаемыми в высшей школе [8]. Численные вычисления и графики в данной статье были получены при помощи компьютерной программы «Mathcad», которая уже неоднократно использовалась в наших предыдущих работах [9, 10]. Современные методы компьютерных вычислений позволяют более наглядно проследить связь аналитических формул теоретической физики с реальными физическими экспериментами, что позволит сформировать у студентов более целостное и полное физико-техническое образование.

- [1] Матвеев А.Н. Электричество и Магнетизм. М.: Высшая школа, 1983, 463 с.
- [2] Сивухин Д.В. Общий курс физики, том 3, Электричество. М.:Физматлит, 2009, 656 с.
- [3] Калашников С.Г. Электричество. М.: Наука, 2003, 592 с.
- [4] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972, 736 с.
- [5] Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1976, 616 с.
- [6] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992, 664 с.

- [7] Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: Иностранная Литература, 1954, 604 с.
- [8] Левин В.И., Гросберг Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1951, 575 с.
- [9] Курилин А.В. // Методические вопросы преподавания инфокоммуникаций в высшей школе. **12**, №1. 55 (2023).
- [10] Курилин А.В. // Ученые записки физического ф-та Московского ун-та. № 1. 2510102 (2025).

Logarithmic potential and the boundary effects in the problem of a plate capacitor

Kurilin A.V.

*Moscow Technical University of Communications and Informatics (MTUCI). Moscow, 111024, Russia
E-mail: kurilin@mail.ru*

The solution of the Laplace equation in a two-dimensional case for a plate capacitor is analyzed. Analytical formulas for the potential and the field strength corresponding to a uniform charge distribution over two dielectric plates of finite width are derived. The case of an infinitely thin charge layers in two-dimensional space is also considered. The results of numerical calculations in the Mathcad program are presented. Graphs and the field line patterns are constructed, allowing for edge effects in the classical model of a uniform electrostatic field.

PACS: 03.50.De, 01.40.-d, 02.30.Jr

Keywords: Laplace equation, parallel-plate capacitor, edge effects, two-dimensional potential theory, electrostatics, computer computing.

Received 13 April 2026.

Сведения об авторе

Курилин Александр Владимирович — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 957-77-99 (доб. 2075),
e-mail: a.v.kurilin@mtuci.ru.