

Распад $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- e^- \bar{\nu}_e$ в методе ортогональных амплитуд

Д. С. Остапович*

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра физики атомного ядра и квантовой теории столкновений
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
(Поступила в редакцию 09.06.2025; подписана в печать 13.11.2025)

В настоящей работе при помощи метода ортогональных амплитуд вычислены парциальные ширины и дифференциальные распределения для распадов $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- e^- \bar{\nu}_e$ и $B^- \rightarrow e^+ e^- \mu^- \bar{\nu}_\mu$. В процессе вычислений учтены излучение виртуального фотона лёгким кварком (VMD приближение), излучение виртуального фотона тяжёлым кварком и тормозное излучение. Полученные результаты находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными ограничениями.

PACS: 13.20.He, 14.40.Nd, 12.15.Ji

УДК: 539.126.3

Ключевые слова: редкие распады В-мезонов, метод ортогональных амплитуд, поиск новой физики.

ВВЕДЕНИЕ

Четырёхлептонные распады псевдоскалярных заряженных B^\pm мезонов начали изучать сравнительно недавно. Первое теоретическое предсказание ширины распадов $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \ell'^- \bar{\nu}_{\ell'}$ было опубликовано в 2018 г. в работе [1]. В 2019 г. в работе [2] появилось первое экспериментальное ограничение на ширину распада $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^- \bar{\nu}_\mu$:

$$\text{Br}(B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^- \bar{\nu}_\mu) < 0.16 \times 10^{-7}, \quad (1)$$

что почти на порядок ниже предсказания [1]. Дан- ный факт стимулировал появление работ, уточняющих и дополняющих первые теоретические оценки [3–8]. Их результаты, хотя и уменьшают расхождение с экспериментальными данными, но не избавляются от него окончательно.

В настоящей работе проведены вычисления ширины распадов вида $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \ell'^- \bar{\nu}_{\ell'}$, где $\ell \neq \ell'$. По сравнению с предшествовавшей работой [3], произведён ряд улучшений и исправлений.

- Полностью учтены ненулевые массы заряженных лептонов.
- Использован программный пакет Vegas [9], лучше подходящий для интегрирования сингулярных амплитуд.
- Изменена относительная фаза амплитуд, входящих в полную амплитуду распада.
- Использован метод ортогональных амплитуд, существенно упрощающий вычисления.

Структура работы такова. Во Введении обсуждается актуальность вычислений характеристик распадов $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \ell'^- \bar{\nu}_{\ell'}$ и приводится обзор существующих

результатов. В разделе 1 указаны используемые в работе определения. В разделе 2 производится явное вычисление амплитуд процессов $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \ell'^- \bar{\nu}_{\ell'}$. В разделе 3 приведено подробное описание метода ортогональных амплитуд. В разделе 4 описан алгоритм применения метода ортогональных амплитуд и последующего интегрирования дифференциальной ширины, а также приведены численные результаты, полученные в наст- оящей работе. В Заключении кратко представлены ос- новные выводы работы. В Приложении A указан явный вид безразмерных функций $a(q^2, k^2), \dots, d(q^2, k^2)$, ис- пользуемых в вычислениях. В Приложении B приведён обзор необходимых для вычислений кинематических соотношений. В Приложении C содержатся коэффици- енты разложения слабого и электромагнитного токов, полученные в методе ортогональных амплитуд.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Укажем основные определения, используемые в наст- оящей работе. Гамильтониан для вычисления ампли- туды четырёхлептонных распадов $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \ell'^- \bar{\nu}_{\ell'}$ имеет вид:

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}(x) = \mathcal{H}_W(x) + \mathcal{H}_{\text{em}}(x) + \mathcal{H}_{\text{VMD}}(x). \quad (2)$$

Гамильтониан слабого перехода $b \rightarrow u \ell^- \bar{\nu}_\ell$ записыва- ется следующим образом:

$$\mathcal{H}_W(x) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{ub} (\bar{u}(x) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) b(x)) \times \\ (\bar{\ell} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_\ell(x)) + \text{h.c.}, \quad (3)$$

где $u(x), b(x)$ — кварковые поля, $\ell(x), \nu_\ell(x)$ — лепто- нные поля, G_F — константа Ферми, V_{ub} — матричный элемент матрицы Кабибо–Кобаяши–Маскава (VMD). Матрица γ^5 определена согласно $\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Гамильтониан электромагнитного взаимодействия за- писывается как

$$\mathcal{H}_{\text{em}}(x) = -e \sum_f Q_f (\bar{f}(x) \gamma^\mu f(x)) A_\mu(x) = \\ = -j_{\text{em}}^\mu(x) A_\mu(x), \quad (4)$$

* ostapovich.ds20@physics.msu.ru

где элементарный заряд $e = |e| > 0$ нормирован условием $e^2 = 4\pi\alpha_{\text{em}}$, $\alpha_{\text{em}} \approx 1/137$ — постоянная тонкой структуры, Q_f — заряд фермиона аромата f в единицах элементарного заряда, $f(x)$ — поле фермионов аромата f , и $A_\mu(x)$ — 4-потенциал электромагнитного поля. Для вычисления процессов излучения виртуального фотона в настоящей работе используется модель доминантности векторных мезонов (VMD). Её гамильтониан можно представить в виде:

$$\mathcal{H}_{\text{VMD}}(x) = -e \sum_V f_V M_V V^\mu(x) A_\mu(x), \quad (5)$$

где f_V — лептонная константа распада векторного мезона V , $V^\mu(x)$ — поле векторных мезонов V , M_V — масса векторного мезона V .

Определим также адронные матричные элементы:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{u} \gamma^\mu \gamma^5 b | B^-(M_B, p) \rangle &= i f_{B_u} p^\mu, \\ \langle 0 | \bar{q} \gamma^\mu Q | V(M_V, q, \epsilon) \rangle &= \epsilon^\mu M_V f_V, \\ \langle V(M_V, q, \epsilon) | \bar{u} \gamma_\mu b | B^-(M_B, p) \rangle &= \frac{2V^{(V)}(k^2)}{M_B + M_V} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{*\nu} p^\alpha q^\beta, \\ \langle V(M_V, q, \epsilon) | \bar{u} \gamma_\mu \gamma^5 b | B^-(M_B, p) \rangle &= i \epsilon^{*\nu} \left[(M_B + M_V) A_1^{(V)}(k^2) g_{\mu\nu} - \frac{A_2^{(V)}(k^2)}{M_B + M_V} (p+q)_\mu p_\nu - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2M_V}{k^2} (A_3^{(V)}(k^2) - A_0^{(V)}(k^2)) k_\mu p_\nu \right], \\ \langle B^*(M_{B^*}, k, \epsilon) | \bar{b} \gamma_\mu b | B^-(M_B, p) \rangle &= \frac{2V_b(k^2)}{M_B + M_{B^*}} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{*\nu} p^\alpha k^\beta, \end{aligned} \quad (6)$$

где формфактор

$$\begin{aligned} A_3^{(V)}(k^2) &= \frac{1}{2} \left[A_1^{(V)}(k^2) + A_2^{(V)}(k^2) \right] + \\ &\quad + \frac{M_B}{2M_V} \left[A_1(k^2) - A_2(k^2) \right], \end{aligned}$$

M_B — масса B^- мезона, $p^\mu = q^\mu + k^\mu$ — его 4-импульс, M_{B^*} — масса B^{*-} мезона, ϵ^μ — вектор поляризации лёгкого ($\rho^0(770), \omega(782)$) векторного мезона V . I_V — изотопический фактор, $I_V = \langle \bar{u}u | V \rangle$. Компоненты полностью антисимметричного тензора 4 ранга $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ заданы условием $\epsilon^{0123} = -1$. $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор пространства Минковского, $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

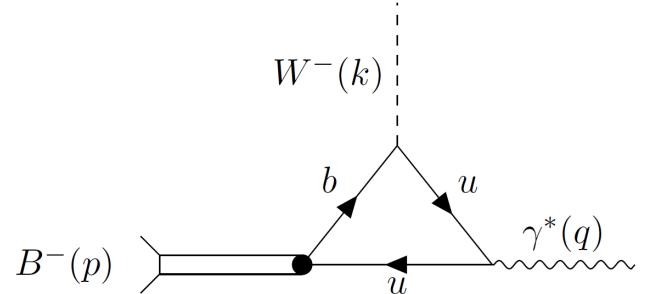


Рис. 1. Диаграмма, соответствующая излучению виртуального фотона u -кварком B^- мезоном

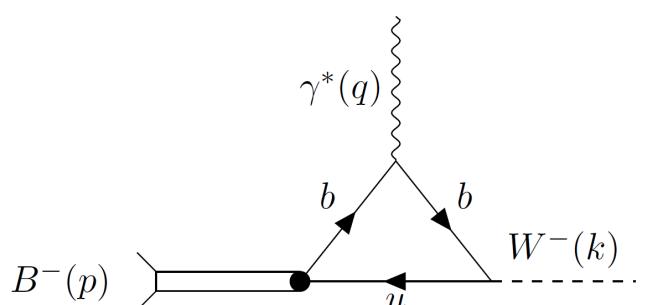


Рис. 2. Диаграмма, соответствующая излучению виртуального фотона b -кварком B^- мезоном

2. ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСПАДА $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \ell'^- \bar{\nu}_{\ell'}$ ПРИ УСЛОВИИ $\ell \neq \ell'$

Определим $q^\nu = k_1^\nu + k_2^\nu$, $k^\mu = k_3^\mu + k_4^\mu$. В амплитуду распада $B^-(p) \rightarrow \gamma^*(q) W^-(k) \rightarrow \ell^+(k_1) \ell^-(k_2) \bar{\nu}_{\ell'}(k_3) \ell'^-(k_4)$ в случае, когда $\ell \neq \ell'$, вносят вклад три основных типа диаграмм. Первый тип соответствует испусканию виртуального фотона лёгким u -кварком (см. рис. 1). Второй тип отвечает излучению виртуального фотона тяжёлым b -кварком (см. рис. 2). Третий связан с тормозным излучением: виртуальный фотон излучается заряженным лептоном в конечном состоянии (см. рис. 3).

а. Вклад от излучения виртуального фотона лёгким u -кварком. Воспользуемся явным видом эффективных гамильтонианов (2) — (4) и адронными матричными элементами (6). В рамках модели доминантности векторных мезонов вклад от излучения виртуального фотона u -кварком описывается диаграммой

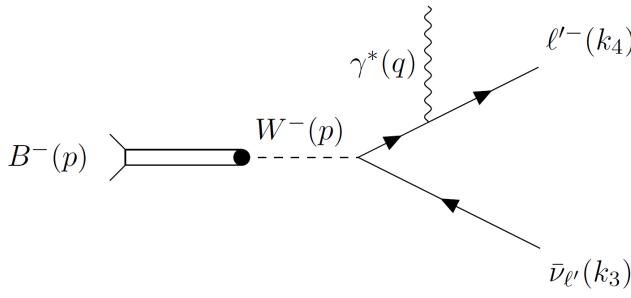


Рис. 3. Диаграмма, соответствующая тормозному излучению виртуального фотона

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(V)} = \frac{2V^{(V)}(k^2)}{M_B + M_V} \epsilon_{\mu\nu kq} - i \left[(M_B + M_V) A_1^{(V)}(k^2) g_{\mu\nu} - \frac{A_2^{(V)}(k^2)}{M_B + M_V} (k + 2q)_\mu k_\nu - \frac{2M_V}{k^2} (A_3^{(V)}(k^2) - A_0^{(V)}(k^2)) k_\mu k_\nu \right]. \quad (9)$$

Здесь учтены вклады только двух легчайших векторных мезонов: $\rho^0(770)$ и $\omega(782)$. $V^{(V)}, A_i^{(V)}$ — формфакторы перехода $B^- \rightarrow V$, определённые в работе [10]. Стоит отметить, что в работе [3] амплитуда, соответствующая этому процессу, отличается знаком. Тщательные вычисления и сравнение результатов с работой [7] показывают, что противоположный знак лучше соответствует выбранным определениям и физике процесса.

b. Вклад от излучения виртуального фотона тяжёлым b -кварком. Процесс рис. 5 является кросс-каналом распада $B^{*-} \rightarrow B^- \gamma^*$. Используя матричные элементы (6), можно записать амплитуду:

$$\mathcal{M}_{fi}^{(b)} = \frac{1}{3} \frac{\mathcal{A}}{q^2} \frac{M_{B^*} f_{B^*}}{k^2 - M_{B^*}^2} \times \frac{2V_b(q^2)}{M_B + M_{B^*}} \epsilon_{\mu\nu kq} j^\nu(k_2, k_1) J^\mu(k_4, k_3). \quad (10)$$

Мнимая добавка в пропагаторе отсутствует, поскольку полюс не достигается в кинематически разрешённой области (B2).

c. Вклад от тормозного излучения виртуального фотона. Точное вычисление амплитуды тормозного излучения (6) даёт следующее выражение:

$$\mathcal{M}_{fi}^{(brem)} = \frac{\mathcal{A}}{q^2} (-i) f_{B^-} g_{\mu\nu} j^\nu(k_2, k_1) \tilde{J}^\mu(k_4, k_3), \quad (11)$$

рис. 4. Ей соответствует амплитуда

$$\mathcal{M}_{fi}^{(u)} = \frac{\mathcal{A}}{q^2} \sum_{V=\rho^0, \omega} \frac{I_V M_V f_V}{q^2 - M_V^2 + i\Gamma_V M_V} \times \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(V)} j^\nu(k_2, k_1) J^\mu(k_4, k_3), \quad (7)$$

где лептонные токи обозначены:

$$j^\nu(k_2, k_1) = \bar{\ell}(k_2) \gamma^\nu \ell(-k_1) \quad (8)$$

и $J^\mu(k_4, k_3) = \bar{\ell}'(k_4) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_{\ell'}(-k_3)$,

размерный коэффициент $\mathcal{A} = -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} 4\pi \alpha_{\text{em}} V_{ub}$, а структура $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(V)}$ имеет вид:

где

$$\tilde{J}^\mu(k_4, k_3) = J^\mu(k_4, k_3) + \frac{m_{\ell'}}{(p - k_3)^2 - m_{\ell'}^2} \times \bar{\ell}'(k_4) \gamma^\mu (\hat{p} + m_{\ell'}) (1 - \gamma^5) \nu_{\ell'}(-k_3). \quad (12)$$

В кинематически разрешённой области (B2) второе слагаемое не содержит полюсов, поэтому вклад первого слагаемого в амплитуду преобладает. С хорошей точностью можно предположить: $\tilde{J}^\mu(k_4, k_3) \approx J^\mu(k_4, k_3)$.

d. Парциальная ширина распада. Полная амплитуда процесса $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \ell' \bar{\nu}_{\ell'}$ вычисляется как сумма амплитуд процессов рис. 4–6:

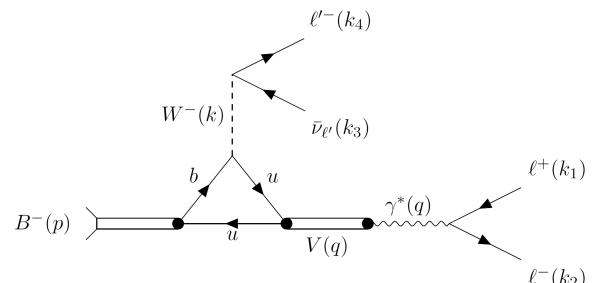


Рис. 4. Диаграмма для вычисления амплитуды $\mathcal{M}_{fi}^{(u)}$ (см. формулу (7)) в рамках модели доминантности векторных мезонов

$$\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{M}_{fi}^{(u)} + \mathcal{M}_{fi}^{(b)} + \mathcal{M}_{fi}^{(brem)} \equiv \frac{\mathcal{A}}{q^2} j^\nu(k_2, k_1) J^\mu(k_4, k_3) \times \left[\frac{a(q^2, k^2)}{M_B} \epsilon_{\mu\nu kq} - i M_B b(q^2, k^2) g_{\mu\nu} - 2i \frac{d(q^2, k^2) k_\mu - c(q^2, k^2) q_\mu}{M_B} k_\nu \right]. \quad (13)$$

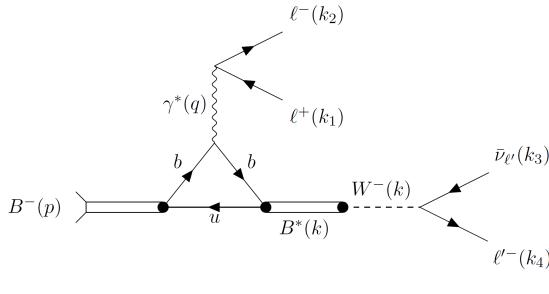


Рис. 5. Диаграмма для вычисления амплитуды $\mathcal{M}_{fi}^{(b)}$ (см. формулу (10)) в рамках модели доминантности векторных мезонов

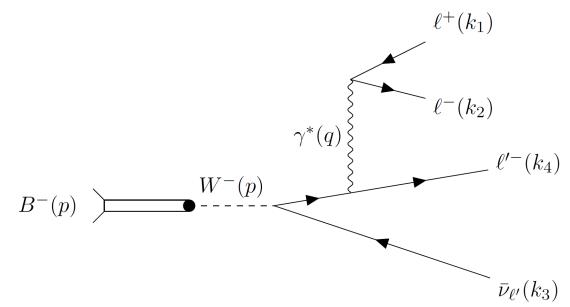


Рис. 6. Диаграмма для вычисления амплитуды тормозного излучения (см. формулу (11))

Явный вид безразмерных функций $a(q^2, k^2), \dots, d(q^2, k^2)$, входящих в амплитуду (13), приведён в Приложении А. Их точное вычисление — очень непростая задача, поэтому в настоящей работе были учтены только вклады легчайших резонансов и тормозного излучения.

Дифференциальная парциальная ширина распада $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \ell'^- \bar{\nu}_{\ell'}$ вычисляется по формуле:

$$\frac{d\text{Br}(B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \ell'^- \bar{\nu}_{\ell'})}{d\Phi_4} = \tau_{B^-} \frac{\sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}_{fi}|^2}{2M_B}, \quad (14)$$

где τ_{B^-} — время жизни B^- -мезона, 4-частичный фазовый объём $d\Phi_4$ задается выражением (B5), суммирование происходит по спинам всех конечных лептонов. Номер спина лептона соответствует номеру 4-импульса этого лептона.

3. Описание метода ортогональных амплитуд

Метод ортогональных амплитуд, используемый в настоящей работе, основан на приёме, предложенном в статье [11]. Рассмотрим амплитуду вида

$$M_{(O)}^\nu = \bar{u}(q) \hat{O}^\nu u(-p), \quad (15)$$

где $\bar{u}(q)$ и $u(-p)$ — спиноры, подчиняющиеся уравнению Дирака, а \hat{O}^ν — некоторый оператор, выраженный через произведение γ -матрицы Дирака и их свёртки с 4-векторами. Введём также два вспомогательных 4-вектора $u^\alpha(q, p)$ и $v^\alpha(q, p)$, удовлетворяющих ряду условий:

$$\begin{aligned} u^\alpha p_\alpha &= u^\alpha q_\alpha = v^\alpha p_\alpha = v^\alpha q_\alpha = u^\alpha v_\alpha = 0, \\ u^2 &= v^2 = -1. \end{aligned} \quad (16)$$

Для вычислений удобно выбрать следующий явный вид вспомогательных 4-векторов:

$$\begin{aligned} u^\alpha(q, p) &\sim (0, [\mathbf{q} \times \mathbf{p}]), \\ v^\alpha(q, p) &= \frac{\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} u_\beta(q, p) p_\mu q_\nu}{\sqrt{(pq)^2 - p^2 q^2}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Амплитуда (15) может быть представлена в виде линейной комбинации четырёх базисных амплитуд:

$$\begin{aligned} A_1(q, -p) &= \bar{u}(q) u(-p), \\ A_2(q, -p) &= \bar{u}(q) \hat{u}(q, p) u(-p), \\ A_3(q, -p) &= \bar{u}(q) \hat{v}(q, p) u(-p), \\ A_4(q, -p) &= \bar{u}(q) \hat{u}(q, p) \hat{v}(q, p) u(-p), \end{aligned} \quad (18)$$

где $\hat{u}(q, p) = u^\alpha(q, p) \gamma_\alpha$, $\hat{v} = v^\alpha(q, p) \gamma_\alpha$.

Выберем в качестве скалярного произведения в пространстве амплитуд операцию суммирования по поляризациям спиноров. Тогда базис (18) является ортогональным. Квадраты норм базисных амплитуд отличны от единицы, их можно вычислить согласно формуле:

$$|A_i|^2 = \sum_{s_1, s_2} A_i A_i^\dagger. \quad (19)$$

Вычисления приводят к следующим явным выражениям:

$$\begin{aligned} |A_1|^2 &= |A_4|^2 = 4((pq) + m_p m_q), \\ |A_2|^2 &= |A_3|^2 = 4((pq) - m_p m_q), \end{aligned} \quad (20)$$

где m_p и m_q — массы фермионов с 4-импульсами p и q соответственно. С учётом приведённых определений, разложение амплитуды (15) принимает вид:

$$M_{(O)}^\nu = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{|A_i|^2} \omega_i^\nu A_i, \quad (21)$$

$$\omega_i^\nu = \sum_{s_1, s_2} M_{(O)}^\nu A_i^\dagger. \quad (22)$$

Вычисление коэффициентов разложения происходит с использованием среды для символьных вычислений «Wolfram Mathematica» [12] и библиотеки «FeynCalc» [13–16]. Полученное выражение позволяет вычислить квадрат модуля амплитуды (15) без необходимости явно учитывать интерференционные члены:

$$\sum_{s_1, s_2} M_{(O)}^\mu (M_{(O)}^\nu)^\dagger = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{|A_i|^2} c_i^\mu (c_i^\nu)^*. \quad (23)$$

Расширим описанный метод на амплитуды, содержащие несколько пар спиноров. Рассмотрим амплитуду

$$\mathcal{M} = \mathcal{F}_{\mu\nu} j^\nu J^\mu, \quad (24)$$

где

$$j^\nu = \bar{u}(k_2) \hat{O}^\nu u(-k_1), \quad J^\mu = \bar{u}(k_4) \hat{R}^\mu u(-k_3). \quad (25)$$

Разложения токов (25) по базисным амплитудам записываются по отдельности. При этом для каждого из токов необходимо сконструировать свой набор базисных амплитуд:

$$A_i = A_i(k_2, -k_1), \quad \tilde{A}_j = \tilde{A}_j(k_4, -k_3); \quad (26)$$

$$j^\nu = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{|A_i|^2} \lambda_i^\nu A_i, \quad J^\mu = \sum_{j=1}^4 \frac{1}{|\tilde{A}_j|^2} \chi_j^\mu \tilde{A}_j; \quad (27)$$

$$\lambda_i^\nu = \sum_{s_1, s_2} j^\nu A_i^\dagger, \quad \chi_j^\mu = \sum_{s_3, s_4} J^\mu \tilde{A}_j^\dagger. \quad (28)$$

Тогда разложение амплитуды (24) принимает вид:

$$\mathcal{M} = \mathcal{F}_{\mu\nu} j^\nu J^\mu = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \frac{1}{|A_i|^2 |\tilde{A}_j|^2} \mathcal{F}_{\mu\nu} \lambda_i^\nu \chi_j^\mu A_i \tilde{A}_j. \quad (29)$$

Квадрат модуля амплитуды (24) возможно представить в виде суммы, аналогичной выражению (23):

$$\sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}|^2 = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \frac{1}{|A_i|^2 |\tilde{A}_j|^2} |\mathcal{F}_{\mu\nu} \lambda_i^\nu \chi_j^\mu|^2. \quad (30)$$

В настоящей работе описанная процедура была применена к амплитуде (13). Используя разложение (27) для токов (8), можно записать квадрат модуля амплитуды (13) в виде суммы:

$$\sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \frac{1}{|A_i|^2 |\tilde{A}_j|^2} \frac{|\mathcal{A}|^2}{q^4} |\mathcal{F}_{\mu\nu} \lambda_i^\nu \chi_j^\mu|^2, \quad (31)$$

где угловыми скобками показано усреднение по N сгенерированным событиям, Φ_4 определено в (B5). Для удобства вычислений были введены безразмерные переменные $x_{12} = \frac{q^2}{M_B^2}$ и $x_{34} = \frac{k^2}{M_B^2}$. По этим переменным производилось интегрирование, по ним же были построены дифференциальные распределения.

Алгоритм вычисления содержит следующие шаги:

- генерация переменных x_{12} и x_{34} в кинематически разрешённой области (B2). Пространство значений (x_{12}, x_{34}) используется в качестве области

где

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} = & \frac{a(q^2, k^2)}{M_B} \varepsilon_{\mu\nu kq} - i M_B b(q^2, k^2) g_{\mu\nu} - \\ & - 2i \frac{d(q^2, k^2) k_\mu - c(q^2, k^2) q_\mu}{M_B} k_\nu. \end{aligned} \quad (32)$$

Коэффициенты разложения токов (8) по базисным амплитудам приведены в Приложении C.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В настоящей работе использованы значения масс, времён жизни, ширин распадов мезонов и матричных элементов ККМ-матрицы из [17]. Параметризация формфакторов переходов $B^- \rightarrow \omega, \rho^0$ взята из работы [10]. Лептонные константы $f_{\rho^0} = 154$ МэВ и $f_\omega = 46$ МэВ были вычислены в работе [18]. Формфактор $V_b(q^2)$ и лептонные константы распада $f_{B^-} = 191$ МэВ и $f_{B^*} = 183$ МэВ были вычислены в работе [1].

A. Метод интегрирования

Парциальная ширина распада $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \ell'^- \bar{\nu}_{\ell'}$ может быть получена в результате интегрирования формулы (14):

$$\begin{aligned} \text{Br}(B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \ell'^- \bar{\nu}_{\ell'}) = & \\ = & \frac{\tau_{B^-}}{2M_B} \int d\Phi_4 \left(\sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \right) = \\ = & \frac{\tau_{B^-}}{2M_B} \int d\Phi_4 \left(\frac{|\mathcal{A}|^2}{q^4} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \frac{1}{|A_i|^2 |\tilde{A}_j|^2} |\mathcal{F}_{\mu\nu} \lambda_i^\nu \chi_j^\mu|^2 \right). \end{aligned} \quad (33)$$

В настоящей работе интегрирование было проведено методом Монте-Карло при помощи программного пакета Vegas [9]. В методе Монте-Карло интеграл (33) преобразуется следующим образом:

$$\text{Br}(B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \ell'^- \bar{\nu}_{\ell'}) \approx \left\langle 8\pi \Phi_4 \frac{\tau_{B^-}}{2M_B} \frac{|\mathcal{A}|^2}{q^4} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \frac{1}{|A_i|^2 |\tilde{A}_j|^2} |\mathcal{F}_{\mu\nu} \lambda_i^\nu \chi_j^\mu|^2 \right\rangle_N, \quad (34)$$

интегрирования в пакете Vegas;

- генерация угловых переменных y_{12}, y_{34} и φ , определённых в Приложении B;
- вычисление явного вида 4-импульсов k_1, \dots, k_4 ;
- вычисление коэффициентов разложения токов по базисным амплитудам, согласно процедуре из раздела 3. На этом шаге необходим явный вид 4-импульсов, полученный на предыдущем шаге;

- вычисление значения усредняемой функции из выражения (34).

При генерации событий с помощью программного пакета Vegas, происходит постепенная адаптация интегратора к виду интегрируемой функции. При повторном запуске интегратора большее количество событий генерируется в областях с наибольшим значением функции, таких как резонансные пики. Благодаря этому интегрирование происходит точнее и эффективнее. По этой причине в начале работы интегратор требуетсѧ несколько раз запустить для «обучения», игнорируя полученный при этом результат. В настоящей работе «обучение» интегратора было произведено с использованием аналитического двукратного дифференциального распределения из работы [1] (формула (16)). Это выражение менее точно, однако оно может быть вычислено быстрее, а также обладает всеми особенностями дифференциального распределения, полученного в настоящей работе, что важно для «обучения» интегратора. Применение описанного приёма позволило значительно ускорить процесс интегрирования.

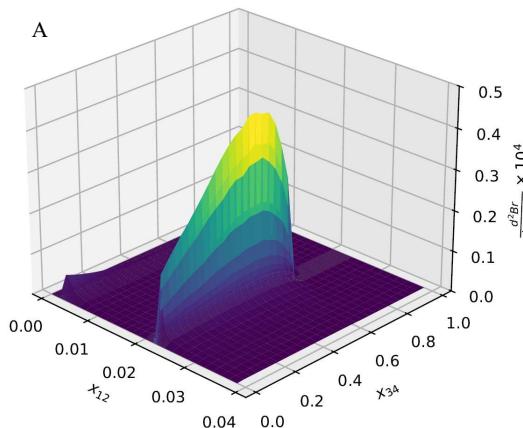
Вычисления были произведены для двух процессов: $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- e^- \bar{\nu}_e$ и $B^- \rightarrow e^+ e^- \mu^- \bar{\nu}_\mu$.

B. Полная парциальная ширина распада

$$B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- e^- \bar{\nu}_e.$$

В качестве кинематических ограничений снизу были выбраны естественные границы: $x_{12}^{(min)} = 4\hat{m}_\mu^2$, $x_{34}^{(min)} = \hat{m}_e^2$, где $\hat{m}_\ell = \frac{m_\ell}{M_B}$ — обезразмеренная масса лептона. Численное интегрирование даёт значение полной парциальной ширины:

$$\text{Br}(B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- e^- \bar{\nu}_e) \approx 0.3 \times 10^{-7} \cdot \frac{\tau_{B^-}}{1.638 \times 10^{-12} \text{с}} \frac{|V_{ub}|^2}{1.46 \times 10^{-5}}. \quad (35)$$



Результат хорошо согласуется с оценками, приведёнными в работах [7, 8], что подтверждает применимость выбранного подхода и является аргументом в пользу корректности оценок. Неопределённость результата составляет около 30%, её основной источник — неопределённость параметризации адронных формфакторов.

C. Полная парциальная ширина распада

$$B^- \rightarrow e^+ e^- \mu^- \bar{\nu}_\mu.$$

В этом распаде естественные границы неприменимы, поскольку эффективность регистрации электрон-позитронных пар с инвариантной массой $\sqrt{q^2} \leq \Lambda \approx 100$ МэВ крайне мала. В связи с этим нижние границы выбраны следующим образом: $x_{34}^{(min)} = \hat{m}_\mu^2$, $x_{12}^{(min)} = \frac{\Lambda^2}{M_B}$. Численное интегрирование даёт:

$$\text{Br}(B^- \rightarrow e^+ e^- \mu^- \bar{\nu}_\mu) \Big|_{x_{12}^{(min)}=0.0003} \approx 0.5 \times 10^{-7} \cdot \frac{\tau_{B^-}}{1.638 \times 10^{-12} \text{с}} \frac{|V_{ub}|^2}{1.46 \times 10^{-5}}. \quad (36)$$

Этот результат также согласуется с прежними оценками.

D. Дифференциальные распределения

Также в настоящей работе были получены однократные и двукратные дифференциальные распределения распадов $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- e^- \bar{\nu}_e$ и $B^- \rightarrow e^+ e^- \mu^- \bar{\nu}_\mu$ по переменным x_{12} и x_{34} . Результаты представлены на рис. 7 — 9.

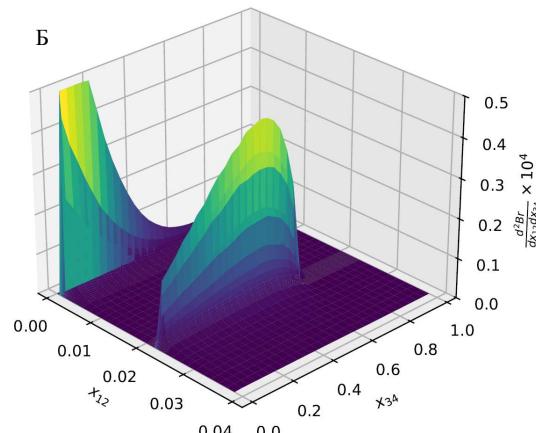


Рис. 7. Двукратные дифференциальные распределения распадов: **A** — $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- e^- \bar{\nu}_e$; **B** — $B^- \rightarrow e^+ e^- \mu^- \bar{\nu}_\mu$

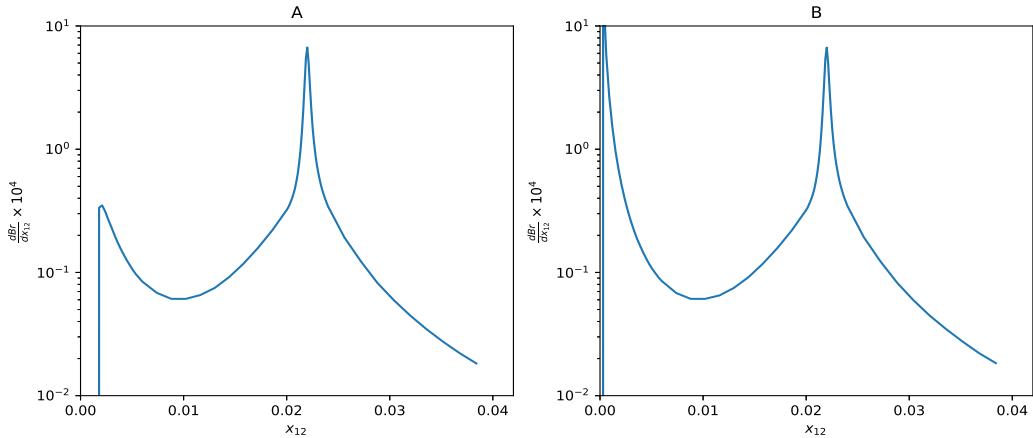


Рис. 8. Однократные дифференциальные распределения по переменной x_{12} распадов: **A** — $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- e^- \bar{\nu}_e$; **B** — $B^- \rightarrow e^+ e^- \mu^- \bar{\nu}_\mu$

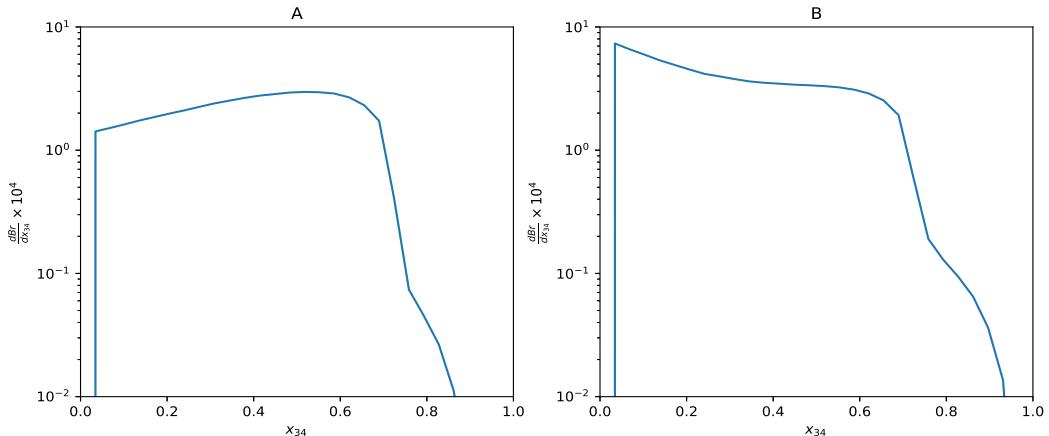


Рис. 9. Однократные дифференциальные распределения по переменной x_{34} распадов: **A** — $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- e^- \bar{\nu}_e$; **B** — $B^- \rightarrow e^+ e^- \mu^- \bar{\nu}_\mu$

На графиках изображена область значений переменной $x_{12} < 0.04$, что соответствует области, в которой применима рассмотренная в настоящей работе модель, содержащая два легчайших резонанса: $\rho^0(770)$ и $\omega(782)$. Для расширения области применимости требуется учесть вклад тяжёлых резонансов ($\omega(1420)$, $\rho^0(1450)$, $\omega(1650)$ и $\rho^0(1700)$) и применить вычитательную процедуру, описанную в работах [7, 19]. На распределениях хорошо виден узкий резонансный пик, вызванный $\omega(782)$ мезоном. Резонансный пик $\rho^0(770)$ мезона ниже и шире, поэтому заметен хуже. В области малых q^2 значительный вклад вносят и резонансный процесс (4), и тормозное излучение (6). Относительная фаза амплитуд этих двух процессов имеет значительное влияние на результат вычис-

лений и вид распределения. Относительная фаза, полученная в настоящей работе, согласуется с работами [7, 8] и отличается от работ [1, 3]. Результаты более поздних работ и настоящей работы лучше согласуются с экспериментальными данными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе:

- с помощью метода ортогональных амплитуд получены различные характеристики распадов тяжёлых B^- мезонов на три заряженных лептона и нейтрино. Была показана эффективность метода для учёта ненулевых масс заряженных лептонов.

- в рамках Стандартной модели получено предсказание для парциальной ширины распада $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- e^- \bar{\nu}_e$ при учёте ненулевых масс заряженных лептонов:

$$\text{Br}(B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- e^- \bar{\nu}_e) \approx$$

$$\approx 0.3 \times 10^{-7} \cdot \frac{\tau_{B^-}}{1.638 \times 10^{-12} \text{с}} \frac{|V_{ub}|^2}{1.46 \times 10^{-5}}. \quad (37)$$

Неопределенность приведённого результата составляет порядка 30%.

- в рамках Стандартной модели получено предсказание для парциальной ширины распада $B^- \rightarrow e^+ e^- \mu^- \bar{\nu}_\mu$ при учёте ненулевых масс заряженных лептонов:

$$\text{Br}(B^- \rightarrow e^+ e^- \mu^- \bar{\nu}_\mu)|_{x_{12}^{(min)}=0.0003} \approx$$

$$\approx 0.5 \times 10^{-7} \cdot \frac{\tau_{B^-}}{1.638 \times 10^{-12} \text{с}} \frac{|V_{ub}|^2}{1.46 \times 10^{-5}}. \quad (38)$$

Неопределенность приведённого результата также составляет порядка 30%.

- построены однократные и двукратные дифференциальные распределения по переменным x_{12} и x_{34} в распадах $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \ell'^- \bar{\nu}_{\ell'}$.

Автор выражает благодарность научному сотруднику ФИАН Багдатовой А.Г., главному научному сотруднику ФИАН Баранову С.П. и доценту Физического факультета МГУ Никитину Н.В. за совместную работу и плодотворные дискуссии, способствовавшие появлению и улучшению настоящей работы.

Приложение А: Явный вид функций $a(q^2, k^2), \dots, d(q^2, k^2)$

Явные выражения для безразмерных функций $a(q^2, k^2) \equiv a(x_{12}, x_{34}), \dots, d(q^2, k^2) \equiv d(x_{12}, x_{34})$, необходимые для вычисления амплитуды (13), могут быть записаны следующим образом:

$$a(x_{12}, x_{34}) = \frac{1}{3} \frac{\hat{M}_{B^*} \hat{f}_{B^*}}{x_{34} - \hat{M}_{B^*}^2} \frac{2V_b(M_B^2 x_{12})}{1 + \hat{M}_{B^*}} + \sum_{V=\rho^0, \omega} \frac{I_V \hat{M}_V \hat{f}_V}{x_{12} - \hat{M}_V^2 + i\hat{\Gamma}_V \hat{M}_V} \frac{2V^{(V)}(M_B^2 x_{34})}{1 + \hat{M}_V},$$

$$b(x_{12}, x_{34}) = f_{B^-} + \sum_{V=\rho^0, \omega} \frac{I_V \hat{M}_V \hat{f}_V}{x_{12} - \hat{M}_V^2 + i\hat{\Gamma}_V \hat{M}_V} (1 + \hat{M}_V) A_1^{(V)}(M_B^2 x_{34}),$$

$$c(x_{12}, x_{34}) = \sum_{V=\rho^0, \omega} \frac{I_V \hat{M}_V \hat{f}_V}{x_{12} - \hat{M}_V^2 + i\hat{\Gamma}_V \hat{M}_V} \frac{A_2^{(V)}(M_B^2 x_{34})}{1 + \hat{M}_V}, d(x_{12}, x_{34}) = \sum_{V=\rho^0, \omega} \frac{I_V \hat{M}_V \hat{f}_V}{x_{12} - \hat{M}_V^2 + i\hat{\Gamma}_V \hat{M}_V}$$

$$\times \left(\frac{\hat{M}_V}{x_{34}} \left(A_0^{(V)}(M_B^2 x_{34}) - A_3^{(V)}(M_B^2 x_{34}) \right) - \frac{A_2^{(V)}(M_B^2 x_{34})}{2(1 + \hat{M}_V)} \right). \quad (A1)$$

Для удобства вычислений все величины, входящие в функции (A1), обезразмерены. Безразмерные переменные $x_{12} = q^2/M_B^2$ и $x_{34} = k^2/M_B^2$ определены в Приложении B. Безразмерные постоянные заданы следующим образом: $\hat{f}_{B^-} = f_{B^-}/M_B$, $\hat{f}_{B^*} = f_{B^*}/M_B$, $\hat{M}_V = M_V/M_B$, $\hat{M}_{B^*} = M_{B^*}/M_B$, $\hat{\Gamma}_V = \Gamma_V/M_B$ и $\hat{\Gamma}_{B^*} = \Gamma_{B^*}/M_B$. Заметим, что формфакторы $V_b(q^2)$, $V(k^2)$, $A_1(k^2)$ и $A_2(k^2)$ также являются безразмерными функциями.

Приложение B: Фазовый объём четырёх частиц

Обозначим через k_i 4-импульсы конечных лептонов в четырехлептонном распаде $B^-(p) \rightarrow \ell^+(k_1)\ell^-(k_2)\bar{\nu}_{\ell'}(k_3)\ell'^-(k_4)$, где $i = \{1, 2, 3, 4\}$. Введем следующие 4-импульсы:

$$q = k_1 + k_2; \quad k = k_3 + k_4; \quad p = q + k = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \quad (B1)$$

и $p^2 = M_B^2$. Удобно пользоваться безразмерными переменными $x_{ij} = \frac{(k_i + k_j)^2}{M_B^2}$. В настоящей статье используются $x_{12} = \frac{q^2}{M_B^2}$ и $x_{34} = \frac{k^2}{M_B^2}$. Интервалы изменения переменной x_{12} и переменной x_{34} (при фиксированном значении переменной x_{12}) следующие:

$$4\hat{m}_\ell^2 \leq x_{12} \leq (1 - \hat{m}_{\ell'})^2; \quad (B2)$$

$$\hat{m}_{\ell'}^2 \leq x_{34} \leq (1 - \sqrt{x_{12}})^2,$$

где $\hat{m}_\ell = m_\ell/M_B$ и $\hat{m}_{\ell'} = m_{\ell'}/M_B$ — безразмерные массы лептонов.

Используя технику книги [20], введём угол θ_{12} между направлениями импульсов положительно заряженного лептона и B^- мезона в системе покоя пары $\ell^+ \ell^-$ и угол θ_{34} между направлениями импульсов антинейтрино и B^- мезона в системе покоя пары $\bar{\nu}_{\ell'} \ell'$. Определим переменные $y_{ij} \equiv \cos \theta_{ij}$. Определим также угол φ между плоскостями, образованными парами импуль-

сов $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\}$ и $\{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4\}$ (см. рис. 10).

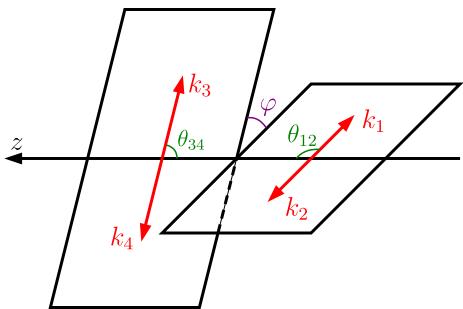


Рис. 10. Кинематические переменные для распада $B^-(p) \rightarrow \ell^+(k_1)\ell^-(k_2)\bar{\nu}_{\ell'}(k_3)\ell^-(k_4)$. Углы θ_{12} и θ_{34} заданы в системах покоя пар $\{\ell^+, \ell^-\}$ и $\{\ell^-, \bar{\nu}_{\ell'}\}$ соответственно. Угол φ задан в системе покоя B^- мезона как угол между плоскостями, образованными парами импульсов $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\}$ и $\{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4\}$

Четырёхчастичный фазовый объём конечного состояния имеет вид:

$$d\Phi_4 = M_B^4 \frac{dx_{12}}{2\pi} \frac{dx_{34}}{2\pi} d\Phi_2^{(qk)} d\Phi_2^{(12)} d\Phi_2^{(34)}, \quad (B3)$$

где, если учесть ненулевые массы лептонов и использовать переменные $x_{12}, x_{34}, y_{12}, y_{34}$ и φ в качестве независимых переменных интегрирования, можно написать:

$$\begin{aligned} \Phi_2^{(qk)} &= \frac{1}{2^3 \pi} \lambda^{1/2}(1, x_{12}, x_{34}), \\ d\Phi_2^{(12)} &= \frac{1}{2^4 \pi} \sqrt{1 - \frac{4\hat{m}_\ell^2}{x_{12}}} dy_{12}; \\ d\Phi_2^{(34)} &= \frac{1}{2^5 \pi^2} \left(1 - \frac{\hat{m}_{\ell'}^2}{x_{34}}\right) dy_{34} d\varphi. \end{aligned} \quad (B4)$$

В итоге приходим к выражению для четырёхчастичного фазового объёма:

$$\begin{aligned} d\Phi_4 &= \frac{M_B^4}{2^{14} \pi^6} \lambda^{1/2}(1, x_{12}, x_{34}) \times \\ &\times \sqrt{1 - \frac{4\hat{m}^2}{x_{12}}} \left(1 - \frac{\hat{m}^2}{x_{34}}\right) dx_{12} dx_{34} dy_{12} dy_{34} d\varphi, \\ \Phi_4 &= \frac{M_B^4}{2^{14} \pi^6} \lambda^{1/2}(1, x_{12}, x_{34}) \sqrt{1 - \frac{4\hat{m}^2}{x_{12}}} \left(1 - \frac{\hat{m}^2}{x_{34}}\right). \end{aligned} \quad (B5)$$

Приложение С: Коэффициенты разложения лептонных токов по базисным амплитудам

Рассмотрим два вида лептонных токов: электромагнитный ток $j^\nu(k_2, k_1) = \bar{\ell}(k_2)\gamma^\nu\ell(-k_1)$ и слабый $V - A$ ток $J^\mu(k_4, k_3) = \bar{\ell}'(k_4)\gamma^\mu(1 - \gamma^5)\nu_{\ell'}(-k_3)$. Коэффициенты разложения каждого из токов по базисным амплитудам можно найти, следуя выражениям (25 – 28), если положить $\hat{O}^\nu = \gamma^\nu$ и $\hat{R}^\mu = \gamma^\mu(1 - \gamma^5)$ соответственно. Обозначим вспомогательные 4-векторы u_{12}, u_{34}, v_{12} и v_{34} следующим образом:

$$\begin{aligned} u^\nu(k_1, k_2) &= u_{12}^\nu, & v^\nu(k_1, k_2) &= v_{12}^\nu, \\ u^\mu(k_3, k_4) &= u_{34}^\mu, & v^\mu(k_3, k_4) &= v_{34}^\mu. \end{aligned} \quad (C1)$$

Вычисления приводят к следующим явным выражениям (с учётом нулевой массы антинейтрино $m_3 = 0$):

$$\begin{aligned} \lambda_1^\nu &= 4m_2 k_1^\nu - 4m_1 k_2^\nu, & \chi_1^\mu &= 4m_4 k_3^\mu; \\ \lambda_2^\nu &= -4u_{12}^\nu((k_1 k_2) + m_1 m_2), & & \\ \chi_2^\mu &= -4u_{34}^\mu(k_3 k_4) - 4iv_{34}^\mu(k_3 k_4); & & \\ \lambda_3^\nu &= -4v_{12}^\nu((k_1 k_2) + m_1 m_2), & & \\ \chi_3^\mu &= -4v_{34}^\mu(k_3 k_4) + 4iu_{34}^\mu(k_3 k_4); & & \\ \lambda_4^\nu &= 0, & \chi_4^\mu &= 4im_4 k_4^\mu. \end{aligned} \quad (C2)$$

- [1] Данилина А.В., Никитин Н.В. // Ядерная физика. **81**, № 3. 331 (2018).
- [2] Aaij, R., Beteta, C.A., Adeva, B. et al. // Eur. Phys. J. C. **79**. 675 (2019).
- [3] Danilina, A., Nikitin, N., Toms, K. // Phys. Rev. D. **101**. 096007 (2020).
- [4] Beneke, M., Boer, P., Rigatos, P. and K. K. Vos, // Eur. Phys. J. C. **81**. 638 (2021).
- [5] A. Bharucha, B. Kindra, and N. Mahajan. // arXiv: 2102.03193 [hep-ph]
- [6] C. Wang, Yu-M. Wang, and Y.-B. Wei. // JHEP. **2202**. 141 (2022).
- [7] Ivanov, M. A. and Melikhov, D. // Phys. Rev. D. **105**. 014028 (2022).
- [8] S. Kurten, M. Zanke, B. Kubis, and D. van Dyk. // Phys. Rev. D. **107**. 053006 (2023).

- [9] G. Peter Lepage // Journal of Computational Physics. **439**. 110386 (2021).
- [10] Faustov, R. N., Galkin, V. O. and Kang, Xian-Wei // Phys. Rev. D. **106**. 013004 (2022).
- [11] Baranov, S.P., Slad, V.L. // Phys. Atom. Nuclei. **66**. 1730 (2003).
- [12] Wolfram Research, Inc. Wolfram Research, Inc. (2024). <https://www.wolfram.com/mathematica>
- [13] V. Shtabovenko, R. Mertig and F. Orellana // Computer Physics Communications. **306**. 109357 (2025).
- [14] V. Shtabovenko, R. Mertig and F. Orellana // Computer Physics Communications. **256**. 107478 (2020).
- [15] V. Shtabovenko, R. Mertig and F. Orellana // Computer Physics Communications. **207**. 432 (2016).
- [16] R. Mertig, M. Bohm, and A. Denner // Computer Physics Communications. (1991). **64**. 345

- [17] S. Navas *et al.* (Particle Data Group) // Phys. Rev. D. **110**. 030001 (2024).
- [18] Melikhov, D., Nikitin, N. // Phys. Rev. D. **70**. 114028
- [19] Данилина А.В., Никитин Н.В. // Ядерная физика. **87**,
- № 5. 426 (2024).
- [20] E. Byckling and K. Kajantie Particle Kinematics. John Wiley and Sons. 1973.

$B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- e^- \bar{\nu}_e$ decay in orthogonal amplitudes method

D.S. Ostapovich

Department of Nuclear Physics and Quantum Collision Theory, Faculty of Physics,
Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia
E-mail: ostapovich.ds20@physics.msu.ru

In the present paper partial widths and differential distributions of $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- e^- \bar{\nu}_e$ and $B^- \rightarrow e^+ e^- \mu^- \bar{\nu}_\mu$ decays were calculated, utilizing the orthogonal amplitudes method. Virtual photon emission by the light quark (VMD model), virtual photon emission by the heavy quark and bremsstrahlung were accounted for in calculations. The results obtained are in a satisfactory agreement with experimental constraints.

PACS: 13.20.He, 14.40.Nd, 12.15.Ji.

Keywords: rare B-meson decays, orthogonal amplitudes method, search for new physics.

Received 09 June 2025.

Сведения об авторе

Остапович Дмитрий Сергеевич — студент; e-mail: ostapovich.ds20@physics.msu.ru.