

## Калибровка и оптимальное управление для неточных предиктивных моделей

Е. М. Чураков,\* П. В. Голубцов†

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
физический факультет, кафедра математики  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2  
(Поступила в редакцию 10.06.2025; подписана в печать 30.10.2025)

Рассматривается задача оптимального управления динамической системой при наличии неточной информации об управляемой системе. Предложен подход для оптимального управления на основе предиктивной модели с процедурой непрерывной калибровки параметров в режиме реального времени, основанный на накоплении калибровочной канонической информации. Такой подход не требует хранения полной истории данных и позволяет пересчитывать параметры на каждом шаге управления. Разработанный в статье алгоритм проиллюстрирован на примере задачи движения объекта в вязкой среде. Результаты численного моделирования показали значительное улучшение качества управления после калибровки параметров: отсутствие осцилляций, снижение перерегулирования и уменьшение значений целевой функции. Отметим также, что важной особенностью предложенного подхода является возможность уточнения параметров модели без остановки штатного функционирования системы.

PACS: 02.30.Yy УДК: 517.977.56.

Ключевые слова: автоматическое управление, оптимизация, пространство состояний, квадратичное программирование, управление с обратной связью, калибровка управляемой системы в реальном времени, каноническая информация.

### ВВЕДЕНИЕ

В наше время методы управления — одна из ключевых областей прикладной математики, включающая в себя большой спектр подходов: от линейного оценивания до задач оптимизации. С помощью таких алгоритмов решаются задачи управления объектами различной природы: от средств передвижения (составы метро, роботы-доставщики, дроны и пр.) [1, 2] до целых промышленных заводов (переработка нефтяного и газового сырья, химические заводы) [3–6]. Так, например, на промышленных объектах регулирование температуры внутри помещения с использованием кондиционеров и вентиляторов зачастую реализуется с помощью простых методов управления, в основе которых лежит алгоритм пропорционально-интегрально-дифференциального (ПИД) регулирования [6, 7]. В то же время управление основным производственным циклом может быть реализовано с помощью более сложных, комплексных алгоритмов наподобие системы усовершенствованного управления технологическим процессом (СУУТП, англ. APC – Advanced Processing Control) [8].

В данной работе мы рассматриваем алгоритм оптимального управления физической системой на основе предиктивных моделей. Основной проблемой в настоящей задаче является неточность априорной информации об управляемой системе, такая проблема решается с помощью калибровки параметров модели. Существуют различные методы уточнения, в частности,

step-тест или PRBS-тест [9], в ходе которых производится серия специальных управляющих сигналов и после вручную или в полуавтоматическом режиме происходит настройка параметров системы. В настоящей работе предложен подход, позволяющий предотвратить дополнительные синтетические возмущения в системе. То есть такой алгоритм производит калибровку параметров системы прямо по ходу её управления, что позволяет работать объекту в штатном режиме.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПРЕДИКТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Исследуется динамическая система в пространстве состояний со следующим переходным уравнением:

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + \omega_t \quad (1)$$

где  $x_t \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния системы, в момент времени  $t$ ,  $u_t \in \mathbb{R}^m$  — вектор управляющих воздействий на систему, в момент времени  $t$ ,  $\omega_t \in \mathbb{R}^n$  — вектор возмущений на систему, в момент времени  $t$ ,  $A, B$  — параметры системы, представленные матрицами, которые принадлежат  $\mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbb{R}^{n \times m}$  соответственно. Изначальная цель — привести систему к некоторому желаемому состоянию  $r_t$ , которое называют уставкой. Привести состояние системы к уставке необходимо в определенном смысле оптимальным образом. А именно, сформулируем задачу управления как задачу оптимизации целевой функции:

$$\min_{u \in \mathbb{U}} J(x, u, r) \quad (2)$$

\* churakovem@my.msu.ru

† golubtsov@physics.msu.ru

при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} u_t \in \mathbb{U}, \forall t \\ x_t \in \mathbb{X}, \forall t \end{cases} \quad (3)$$

где  $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$  — множество допустимых воздействий и  $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$  — множество допустимых состояний.

Мы считаем, что значение вектора уставки  $r_t$  задается на некотором горизонте, т.е. существует некоторое планирование данного параметра. Благодаря этому планированию мы можем учитывать будущие изменения уставки и заранее принимать соответствующие меры по управлению. Также отметим, что осцилляция вектора  $u_t$  и его быстрые изменения в реальной физической системе могут привести к преждевременному износу оборудования или его поломке, поэтому при управлении исследуемой системой следует учесть данный фактор. Для этого запишем целевую функцию в следующем виде:

$$J(x, u, r) = \sum_{t=t_0}^{t_0+N_u} (\|x_t - r_t\|^2 + \|\Delta u_t\|^2) \quad (4)$$

где  $\Delta u_t = u_t - u_{t-1}$ ,  $\Delta u_0 = u_0$ ,  $\Delta t$  — шаг дискретизации нашей системы,  $N_u = T/\Delta t$  — горизонт управления. Первое слагаемое представляет собой интегральную составляющую разности между уставкой и состоянием, второй член носит регуляризационный характер, который позволяет избежать сильных осцилляций при управлении. В каждый момент времени происходит расчет оптимальной траектории  $\{x_i\}$ , которая получается с помощью последовательности оптимальных воздействий  $\{u_i\}$ , при этом для следующего воздействия берется первый член последовательности  $\{u_i\}$ . Для того, чтобы делать расчет целевой функции на горизонте управления, необходимо рассчитывать прогноз состояния системы в каждый момент времени.

Использование достаточно большого горизонта планирования может заметно повысить качество управления. Рассмотрим два примера регулирования с одинаковыми значениями коэффициентов  $A, B$ , но в одном случае возьмем горизонт планирования  $N_u = 4$ , а в другом случае  $N_u = 20$ . В первом случае изображено управление с небольшим горизонтом, при этом управление начинается только после изменения уставки, и кроме того присутствует сильное перерегулирование, т.е. позиция объекта уходит «за» значения уставки. В случае с длинным горизонтом изменения начинаются заранее, что позволяет избежать сильного перерегулирования (рис. 1).

Можно заметить (рис. 2), что при небольшом значении горизонта планирования ( $N_u = 4$ ) график модуля разности уставки и состояния почти на всем интервале управления принимает значения больше, чем при горизонте планирования большего размера ( $N_u = 20$ ). Наиболее значимый интервал ( $t \in (4, 5)$ ), где ситуация обратная, находится непосредственно перед переключением уставки. Здесь, благодаря более длинному горизонту планирования, переход на новую уставку

удалось начать заблаговременно. Табл. 1 также подтверждает, что более длинный горизонт планирования обеспечил лучшее качество управления.

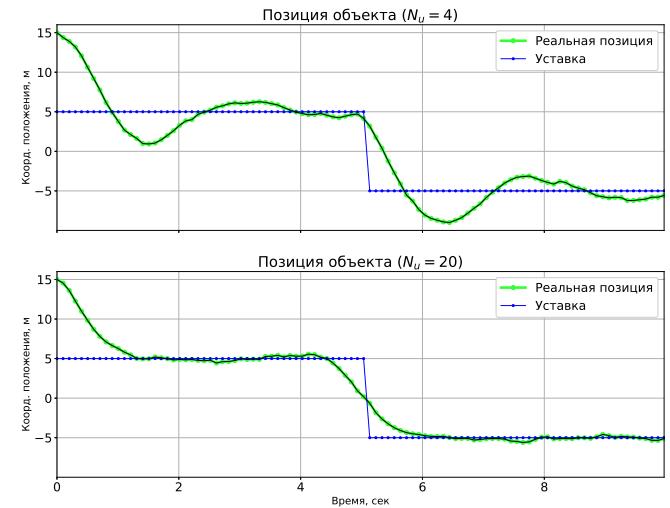


Рис. 1. Управление системой с длинным и коротким горизонтом управления

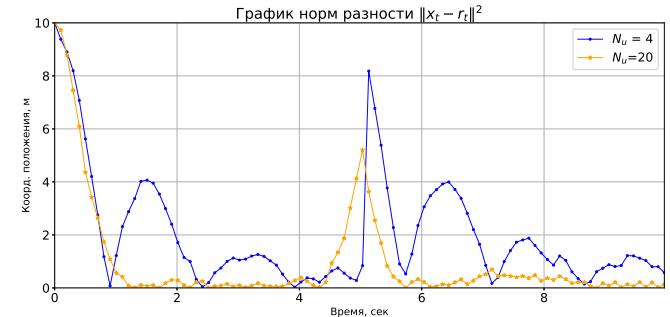


Рис. 2. График норм разности уставки и состояния системы

Таблица 1. Сравнение среднеквадратичных отклонений состояния системы от уставки для разных горизонтов планирования

	$\frac{1}{t_1 - t_0} \sum_{t=t_0}^{t_1} \ x_t - r_t\ ^2$
$N_u = 20$	0.97
$N_u = 4$	2.02

Как было показано выше, использование достаточно большого горизонта планирования может заметно повысить качество управления. Однако, если априорная информация о параметрах модели (матричные коэффициенты  $A, B$ ) неточная, то качество управления может сильно снизиться из-за несоответствия между реальными матрицами  $A$  и  $B$  и их значениями, используемыми при управлении. Это приведет к несоответствию

планируемой траектории и достигнутой реализации поскольку прогноз для (4) рассчитывается с помощью уравнения перехода (1).

## 2. СПОСОБ УТОЧНЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ

Нередко параметры системы известны неточно или неизвестны вовсе, поэтому важной частью данного исследования является рассмотрение возможности уточнения модели системы в реальном времени. Рассмотрим функционал, описывающий расхождение между реальным и прогнозируемым поведением системы:

$$Q(A, B) = \sum_{t=t_0}^{t_1} \| (x_t - Ax_{t-1} - Bu_{t-1}) \|^2$$

Минимизация этого функционала по  $A$  и  $B$  дает оценки наименьших квадратов для этих матриц  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$ . Если ввести обозначения:  $\psi_t = x_t$ ,  $\phi_t = \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ u_{t-1} \end{pmatrix}$ ,  $K = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$ , тогда искомые оценки выражаются аналогично [10] и имеет следующий вид:  $\hat{K} = \Psi \Phi^T (\Phi \Phi^T)^{-1}$ , где  $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ ,  $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ . Вместо того, чтобы хранить матрицы  $\Psi, \Phi$  в полном объеме, можно извлекать из них необходимую информацию для получения оценок:

$$\begin{cases} G = \Psi \Phi^T = \sum_{t=t_0}^{t_1} \psi_t \phi_t^T \\ H = \Phi \Phi^T = \sum_{t=t_0}^{t_1} \phi_t \phi_t^T \end{cases} \quad (5)$$

Таким образом, в процессе управления системой, на отрезке времени от  $t_0$  до  $t_1$ , можно организовать накопление калибровочной канонической информации следующего вида:

$$\begin{cases} C = \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix} = \sum_{t=t_0}^{t_1} C_t, \\ C_t = \begin{pmatrix} x_t \\ x_{t-1} \\ u_{t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ u_{t-1} \end{pmatrix}^T \end{cases} \quad (6)$$

Здесь матрицы  $G \in \mathbb{R}^{n \times (n+m)}$  и  $H \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$  удобно рассматривать как блоки матрицы  $C \in \mathbb{R}^{(2n+m) \times (n+m)}$ .

Отметим, что для построения матрицы  $C$  нет необходимости хранить все данные за длинный промежуток времени. Достаточно лишь в каждый момент времени  $t$  прибавлять к ней матрицу  $C_t$ .

При этом в любой момент времени, оценки  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  могут быть вычислены исключительно на основе накопленной на данный момент канонической информации:

$$\begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \end{pmatrix} = GH^{-1} \quad (7)$$

## 3. ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рассмотрим результаты численного моделирования исследуемой задачи на простом примере:

$$\begin{cases} F_\mu = -\mu \dot{x}, \\ m \ddot{x} = F_\mu + F_u, \end{cases} \quad (8)$$

где  $F_\mu$  — сила вязкости, пропорциональная скорости движения;  $F_u$  — сила управления объектом — это внешняя сила, которую мы контролируем;  $x$  — координата положения центра масс объекта;  $m$ ,  $\mu$  — масса объекта и коэффициент вязкости среды соответственно.

Такая система описывает одномерное движение объекта в вязкой среде. Представим систему (8) через систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = (-\mu x_2 + F_u)/m, \end{cases}$$

Приведем эту систему к дискретному виду:

$$\begin{cases} x_1^{t+1} = x_1^t + x_2^t \Delta t, \\ x_2^{t+1} = x_2^t (1 - \frac{\mu \Delta t}{m}) + u^t \frac{\Delta t}{m}. \end{cases}$$

Запишем эту систему в стандартном виде (1), где параметры выражаются следующим образом:

$A = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 - \frac{\mu \Delta t}{m} \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta t}{m} \end{pmatrix}$ . Для моделирования возьмем следующие значения физических величин: ( $m = 1$ ,  $\mu = 10$ ). В качестве исходной информации о системе были заданы случайные значения для параметров ( $\tilde{A} = A + \delta A$ ,  $\tilde{B} = B + \delta B$ ) и далее был проведен цикл управления с одновременным накоплением информации вида (6).

Отметим также, что, в соответствии с (1) динамика системы подвержена случайным возмущениям. Кроме того, в качестве исходных данных в задаче оптимизации и при калибровке параметров, вместо реального положения используется «измеренное» положение с некоторой погрешностью:

$$\tilde{x}_t = x_t + \varepsilon_t \quad (9)$$

где  $\varepsilon_t \in N(\vec{0}, \Sigma)$  — нормальное распределение. Такое «измеренное» положение на графиках ниже отмечено красным цветом.

На рис. 3 можно заметить сильные колебания положения системы и силы управления, что говорит о низком качестве управления, о чем также свидетельствуют значения целевой функции. После первого цикла управления, изображенного на рис. 3 проведено уточнение параметров согласно (7) и запущен еще один цикл управления при тех же начальных данных и параметрах уставки (рис. 4). При всех одинаковых па-

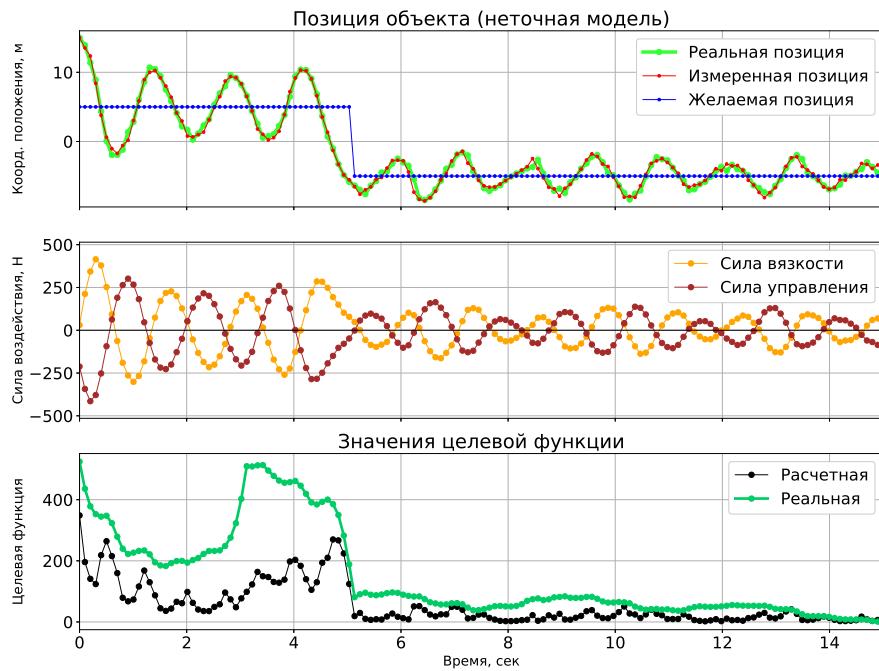


Рис. 3. Графики системы с неточной априорной информацией

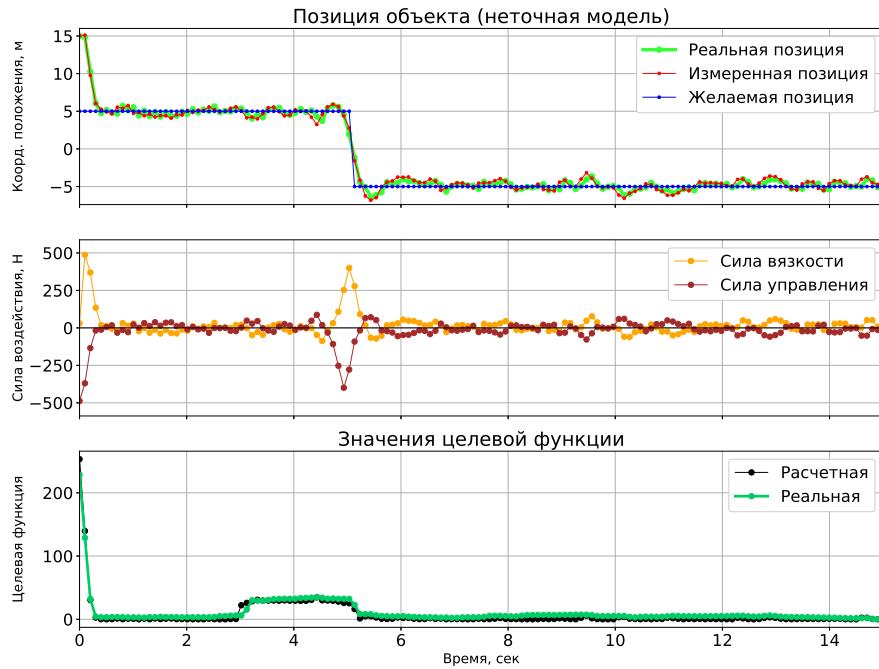


Рис. 4. Графики системы после уточнения априорной информации

раметрах численной модели качество управления такой моделью стало лучше. На верхнем графике видно, что управление стало более плавным и предсказуе-

мым, колебания в силе управления отсутствуют и значения целевой функции значительно ниже по сравнению с предыдущим примером.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложен алгоритм калибровки в реальном времени для оптимального управления физической системой на основе предиктивных моделей. Разработанный алгоритм позволяет уточнять параметры системы путем накопления калибровочной информации в компактном виде без необходимости хранения полной истории данных об объекте управления. Результаты численного эксперимента, полученные для задачи движения объекта в вязкой среде, демонстрируют существенное улучшение качества управления, что в дальнейшем дает возможность применять раз-

работанный метод к более сложным системам. Реализованный алгоритм позволяет производить уточнение информации прямо по ходу работы системы, благодаря чему объект может функционировать в штатном режиме, без необходимости останова или проведения специальных работ. Предложенный подход представляет практическую ценность для задач управления технологическими процессами, где точность моделей часто ограничена, а остановка производства для калибровки нежелательна.

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М.В. Ломоносова.

- 
- [1] Saljanin M., Muller S., Kiebler J. et al. // *Automotive and Engine Technology*. **7**. 105 (2022).
- [2] Besselmann T., Morari M. // *European Journal of Control*. **14**. 418 (2008).
- [3] Findeisen W., Bailey F.N., Brdys M. et al. // *Control and Coordination in Hierarchical Systems*. **480** (1980).
- [4] Trierweiler J.O. // *Real-Time Optimization of Industrial Processes*. **11** (2014)..
- [5] Serale G., Fiorentini M., Capozzoli A. et al. // *Energies*. **11** 631 (2018).
- [6] Андреев Е.Б., Ключников А.И., Кротов А.В. и др. // Автоматизация технологических процессов добычи и подготовки нефти и газа. (2008). С. 399.
- [7] Tatjewski P. // *Advanced Control of Industrial Processes: Structures and Algorithms*. (2007). **347**.
- [8] Smith C.L. // *Advanced Process Control Beyond Single-Loop Control*. **200**. (2010).
- [9] Manfred M., Lee J.H. // *Computers & Chemical Engineering*. **23**. 667 (1999).
- [10] Golubtsov V. // *Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies*. **158**. 53 (2023).

## Calibration and optimal control for inaccurate predictive models

E. M. Churakov<sup>1,a</sup>, V. Golubtsov<sup>1,b</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University  
Moscow 119991, Russia  
E-mail: <sup>a</sup>churakovem@my.msu.ru, <sup>b</sup>golubtsov@physics.msu.ru

The problem of optimal control of a dynamic system in the presence of inaccurate information about the controlled system is considered. An approach for optimal control based on a predictive model with a procedure for continuous real-time parameter calibration is proposed, based on the accumulation of canonical calibration information. This approach eliminates the need to store the full data history and allows for recalculating the parameters at each control step. The algorithm developed in this paper is illustrated using the example of an object moving in a viscous medium. Numerical simulation results demonstrate a significant improvement in control performance after parameter calibration: the absence of oscillations, reduced overshoot, and decreased objective function values. It should also be noted that an important feature of the proposed approach is the ability to refine the model parameters without interrupting the normal operation of the system.

PACS: 02.30.Yy.

Keywords: automatic control, optimization, state space, quadratic programming, feedback control, real-time calibration of a controlled system, canonical information.

Received 10 June 2025.

### Сведения об авторах

- Чураков Егор Максимович — аспирант; e-mail: churakovem@my.msu.ru.
- Голубцов Петр Викторович — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: golubtsov@physics.msu.ru.