

Пространственноподобные немассовые формфакторы пиона в формализме Бете–Солпитера

С. Г. Бондаренко,^{1,2} М. К. Слаутин^{1,2*}

¹Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова,
Объединенный институт ядерных исследований
Дубна, 141980 Россия

²Государственный университет Дубна
Дубна, 141980 Россия

(Поступила в редакцию 06.06.2025; подписана в печать 26.06.2025)

В статье рассматриваются немассовые электромагнитные формфакторы пиона в формализме Бете–Солпитера. Для аналитического решения уравнения используется сепарабельное ядро кварк-антикваркового взаимодействия первого ранга. Вычисляются полунемассовые формфакторы пиона F_1 и F_2 , которые связаны друг с другом тождеством Уорда–Такахаша. Полученные немассовые формфакторы, а также статические свойства пиона сравниваются с результатами других авторов.

PACS: 11.10.St, 13.20.Cz, 13.25.Cq УДК: 539.1

Ключевые слова: Уравнение Бете–Солпитера, сепарабельное ядро, тождество Уорда–Такахаша, формфакторы пиона, физические константы пиона.

ВВЕДЕНИЕ

Пион, представляющий собой простейшую связанную систему кварка и антикварка, занимает особое место среди мезонов. Его сравнительно низкая масса (значительно меньшая, чем у других мезонов) делает эту частицу ключевым элементом в описании ядерных динамических процессов. В настоящее время для теоретического описания пиона разработан целый ряд различных модельных подходов: правила сумм КХД [1]; модель с нерелятивистским потенциалом [2]; релятивистская модель, использующая формализм светового фронта [3]; модель Намбу–Йона–Лазинио [4–8]; модель, основанная на киральной симметрии [9]; инстантонная модель пиона [10]; модели, основанные на вычислениях на решетках [11], [12]; модели КХД, основанные на уравнении Бете–Солпитера с одетыми кварковыми и глюонными пропагаторами [13–15]; модель Полякова–Намбу–Йона–Лазинио [16].

Электромагнитный (ЭМ) формфактор пиона $F_\pi(Q^2)$, определенный на массовой поверхности, характеризует пространственное распределение заряда внутри пиона в зависимости от квадрата переданного 4-импульса (q^2). В области малых значений q^2 этот формфактор может быть измерен напрямую в экспериментах по упругому рассеянию пионов на электронах. Однако для средних и высоких значений q^2 прямое определение формфактора затруднено из-за малого времени жизни пиона, что делает его неподходящей мишенью для таких исследований.

Альтернативный подход к экспериментальному изучению формфактора в этих областях основан на эксклюзивном процессе Салливана [17], в частности на анализе сечений реакции электророждения пиона

$^1H(e, e'\pi^+)n$. Однако в данном случае пион в промежуточном состоянии является виртуальным, и измеряемый формфактор оказывается полунемассовым, что требует дополнительного теоретического анализа для его интерпретации.

В настоящей работе исследуются полунемассовые ЭМ формфакторы, эффекты вне массовой оболочки пиона с помощью модели, основанной на релятивистском ковариантном уравнении Бете–Солпитера с сепарабельным ядром. Выбор этой модели обусловлен простотой аналитического решения для вершинной функции пиона. Проверяется выполнение тождества Уорда–Такахаша [18, 19] для немассовых формфакторов пиона F_1 и F_2 . Также полученные физические константы и формфакторы пиона сравниваются с результатами предыдущих работ [20, 21].

Статья организована следующим образом: в разделе 2 приведены основные формулы формализма, в разделе 3 определяются немассовые формфакторы $F_1(Q^2, t)$ и $F_2(Q^2, t)$, и обсуждается тождество Уорда–Такахаша, в разделе 4 представлена техника вычисления формфакторов, в разделе 5 обсуждаются полученные результаты, а в Заключение даны основные результаты и выводы.

1. ФОРМАЛИЗМ БЕТЕ–СОЛПИТЕРА С СЕПАРАБЕЛЬНЫМ ЯДРОМ

Уравнение Бете–Солпитера для вершинной функции пиона записывается следующим образом:

$$\Gamma_{\alpha\beta}(k; p) = i \int \frac{d^4 k''}{(2\pi)^4} V_{\alpha\beta; \epsilon\lambda}(k, k''; p) S_{\lambda\eta}(k'' + p/2) \times \\ \times \Gamma_{\eta\zeta}(k''; p) S_{\zeta\epsilon}(k'' - p/2). \quad (1)$$

где p, k — полный и относительный 4-импульсы пиона соответственно ($p = k_1 + k_2$ и $k = (k_1 - k_2)/2$),

* slautin@jinr.ru

а $V(k', k; p)$ — ядро взаимодействия. Масса пиона m_π определяется на массовой поверхности пиона как $p^2 = m_\pi^2$, где $m_\pi = 140$ МэВ. Кварковый пропагатор с массой m имеет вид $S(k) = (\hat{k} - m + i\epsilon)^{-1}$. Греческими символами обозначены дираковские индексы.

В работе рассматривается сепарабельное ядро взаимодействия первого ранга следующего вида:

$$V_{\alpha\beta;\delta\gamma}(k', k; p) = \gamma_{\alpha\beta}^5 f(k'^2) \times \gamma_{\delta\gamma}^5 f(k^2). \quad (2)$$

Для простоты в статье рассматривается только зависимость скалярной функции от k^2 . В этом случае решение для вершинной функции (1) заряженного пиона может быть записано в следующем виде:

$$\Gamma(k; p) \equiv \Gamma(k) = N \gamma^5 f(k^2), \quad (3)$$

где N — нормировочная константа.

Радиальная часть вершинной функции выбирается в простом монополярном виде:

$$g(k^2) = \frac{1}{k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon}, \quad (4)$$

где параметр Λ связан с размером пиона.

2. ВНЕМАССОВЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ФОРМФАКТОРЫ ПИОНА

Фотон-пионная вершина G_μ в общем случае может быть представлена в следующем виде [23]:

$$G_\mu(p, p') = (p' + p)_\mu F_1(q^2, p^2, p'^2) + q_\mu F_2(q^2, p^2, p'^2), \quad (5)$$

где p, p' — начальный и конечный 4-импульсы, $q = p' - p$ — переданный 4-импульс виртуального фотона в вершине. Эта вершина вне массовой поверхности удовлетворяет тождеству Уорда–Такахаша [23], [24]:

$$q^\mu G_\mu(p, p') = \Delta^{-1}(p') - \Delta^{-1}(p), \quad (6)$$

где

$$\Delta(p) = \frac{1}{p^2 - m_\pi^2 - \Pi(p^2) + i\epsilon} \quad (7)$$

является полностью перенормированным пропагатором, а перенормированная собственная энергия пиона $\Pi(p^2)$ ограничена условием на массовой оболочке: $\Pi(m_\pi^2) = 0$.

В случае, когда начальный пион находится вне массовой оболочки, а конечный — на массовой, из уравнений (5), (6) следует, что

$$F_2(Q^2, t) = \frac{t - m_\pi^2}{Q^2} [F_1(0, t) - F_1(Q^2, t)], \quad (8)$$

где квадрат переданного импульса имеет пространственноподобный вид $Q^2 = -q^2$, $t = p^2$ — параметр

внемассовости. В дальнейшем для полувнемассовых формфакторов зависимость от $p'^2 = m_\pi^2$ — опущена.

Следует отметить, что когда пион полностью находится на массовой поверхности ($p^2 = p'^2 = m_\pi^2$), то $F_2(Q^2, m_\pi^2) = 0$ и он не дает вклад в нормировку формфакторов $F_1(0, m_\pi^2) = 1$. Также это гарантирует условие сохранения ЭМ тока.

Из уравнения (8) можно определить функцию g

$$g(Q^2, t) \equiv \frac{F_2(Q^2, t)}{t - m_\pi^2}, \quad (9)$$

которая не обращается в ноль на массовой поверхности. Из уравнений (8), (9) можно заметить, что величина $g(0, m_\pi^2)$ связана с зарядовым радиусом пиона:

$$g(0, m_\pi^2) = -\frac{\partial}{\partial Q^2} F_1(0, m_\pi^2) = \frac{1}{6} \langle r_\pi^2 \rangle. \quad (10)$$

Новый формфактор $g(Q^2, t)$ — это физическая величина, которая может наблюдаться в экспериментах.

3. ТЕХНИКА ВЫЧИСЛЕНИЙ

ЭМ внемассовые формфакторы пиона состоят из двух вкладов, первый из которых является вкладом релятивистского импульсного приближения (RIA), в то время как второй является вкладом тока взаимодействия (int) [25]:

$$F_{(1,2)}(Q^2, t) = F_{(1,2)}^{\text{RIA}}(Q^2, t) + F_{(1,2)}^{\text{int}}(Q^2, t). \quad (11)$$

Выражения для формфакторов представляют собой четырехмерные интегралы с полюсами первого и второго порядка по 4-импульсу k_μ . Данные интегралы могут быть вычислены, используя метод фейнмановской параметризации. Для получения выражений внемассовых формфакторов $F_1(Q^2, t)$ и $F_2(Q^2, t)$ можно воспользоваться следующим представлением:

$$\int d^4k \, k^\mu \tilde{F}(k, Q^2, t) \rightarrow (p' + p)^\mu \int d^4k \, \tilde{F}_1(k, Q^2, t) + q^\mu \int d^4k \, \tilde{F}_2(k, Q^2, t). \quad (12)$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Параметры модели были получены в предыдущей работе [25]: конституентная масса кварка $m = 260$ МэВ, параметр $\Lambda = 550$ МэВ. Данный набор параметров является оптимальным для описания пионных констант (постоянной слабого распада f_π , ширины двухфотонного распада $\Gamma_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma}$, переходного радиуса $r_{\pi\gamma}$ и зарядового радиуса $\langle r_\pi^2 \rangle$), а также упругого и переходного формфакторов пиона.

В табл. 1 приведены результаты вычислений пионных констант ($\sqrt{\langle r_\pi^2 \rangle}$, f_π , $g(0, m_\pi^2)$) в сравнении с результатами статей [20, 21] и экспериментальными данными. Модель, представленная в настоящей работе, хорошо описывает константы в отличие от моделей CON и SYM, так как параметры были выбраны специально для описания статических свойств пиона.

Таблица 1. Константы пиона

Модель	$\sqrt{\langle r_\pi^2 \rangle}$, Фм	f_π , МэВ	$g(0, m_\pi^2)$, ГэВ ²
$\Gamma_\pi^{(\text{CON})}$ [20]	0.713 ± 0.013	—	2.18 ± 0.08
$\Gamma_\pi^{(\text{SYM})}$ [21]	0.736	92.40	2.32
модель [25]	0.679	101.38	1.97
Экр.	0.672(8)	92.28(7)	1.93(5)

На рис. 1 показан полувнемассовый формфактор $g(Q^2, t)$ как функция квадрата переданного импульса Q^2 при различных значениях параметра немассовости t ($t = -m_\pi^2$, $t = 0.2$ [GeV/c]², $t = -0.5$ [GeV/c]²). Линиями показаны расчеты формфактора, полученные с помощью тождества Уорда-Такахаши $g_1 = |(t - m_\pi^2)[F_1(0, t) - F_1(Q^2, t)]|$, а символами — прямые расчеты с использованием формул (11), (12). Из графика видно, что формфакторы совпадают для любых значений t и Q^2 . Из этого следует, что тождество Уорда-Такахаши выполняется для модели, представленной в настоящей работе, а формфактор $F_2(Q^2, t)$ можно выразить через $F_1(Q^2, t)$.

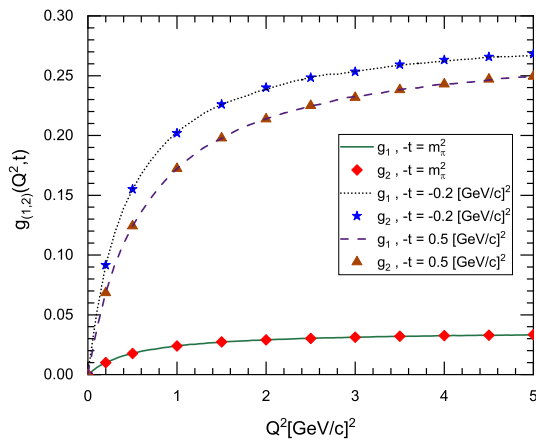


Рис. 1. Полувнемассовый формфактор g как функция квадрата переданного импульса Q^2 при различных значениях параметра немассовости t

На рис. 2 представлено сравнение вычисленного немассового формфактора $F_1(Q^2, t)$ в зависимости от переданного импульса Q^2 (вверху) и параметра немассовости t (внизу) с результатами, приведенными в [20, 21]. Красным ромбом показаны результаты

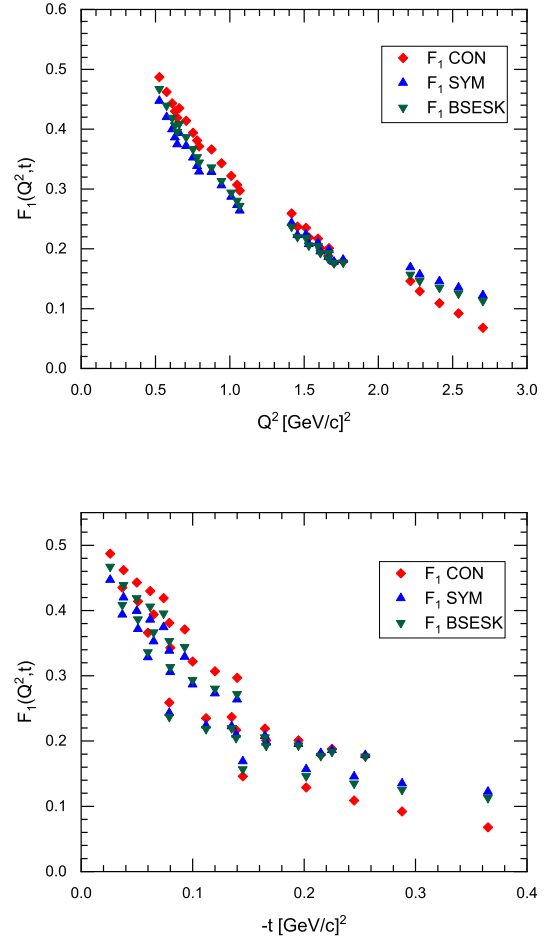


Рис. 2. Полувнемассовый формфактор $F_1(Q^2, t)$ в зависимости от Q^2 (вверху) и t (внизу)

расчетов модели с константной вершинной функцией ($\Gamma_\pi^{(\text{CON})}$), синим треугольником показаны результаты модели с симметричной вершинной функцией ($\Gamma_\pi^{(\text{SYM})}$), зеленым треугольником — результаты настоящей работы. Результаты расчетов близки к результатам модели с симметричной вершинной функцией, так как вершинные функции моделей имеют схожую структуру, в отличие от модели с постоянной вершинной функцией. Результаты расчетов формфактора $g(Q^2, t)$ на рис. 3 для разных моделей аналогичны результатам расчетов формфактора $F_1(Q^2, t)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе были вычислены полувнемассовые ЭМ формфакторы пиона $F_1(Q^2, t)$ и $F_2(Q^2, t)$, используя уравнение Бете-Солпитера с сепарабельным ядром для вершинной функции пиона. Параметры модели были определены в предыдущей работе. Также

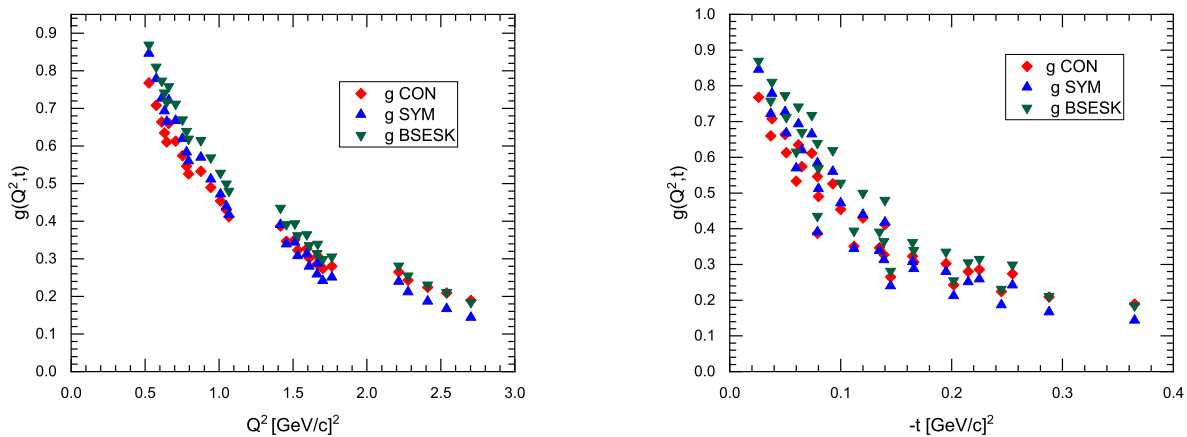


Рис. 3. Полувнемассовый формфактор $g(Q^2, t)$ в зависимости от Q^2 (слева) и t (справа)

был получен формфактор $g(Q^2, t)$, который не равен нулю на массовой поверхности и может быть извлечен из экспериментальных данных. Полувнемассовый формфактор F_2 был вычислен двумя способами: прямыми вычислениями, а также с помощью тождества Уорда–Такахаша. Вычисленные результаты совпали, из чего следует выполнение тождества Уорда–Такахаша для модели, представленной в настоящей работе.

Исследуемая модель сравнивалась с результатами работ других авторов [20, 21]. Пионные константы

$(\sqrt{\langle r_\pi^2 \rangle}, f_\pi, g(0, m_\pi^2))$, вычисленные в этой работе, более точно описывают экспериментальные значения, а полувнемассовые формфакторы схожи с результатами модели с симметричной вершинной функцией, в отличие от константной вершинной функции. В будущем планируется расширить модель на временноподобную область квадрата переданного импульса, а также рассмотреть зависимость от других функциональных зависимостей радиальной части вершинной функции (диполь и экспонента).

-
- [1] Nesterenko V.A., Radyushkin A.V. // *Phys. Lett. B.* **115**. 410 (1982).
 - [2] Godfrey S., Isgur N. // *Phys. Rev. D.* **32**. 189 (1985).
 - [3] Jacob O.C., Kisslinger L.S. Confining Bethe-Salpeter equation: A Light front formalism. 3rd Lake Louise Winter Institute on QCD: Theory and Experiment. 1988.
 - [4] Nambu Y., Jona-Lasinio G. // *Phys. Rev.* **122**. 345 (1961).
 - [5] Zhang J.L., Wu J. Pion-photon and kaon-photon transition distribution amplitudes in the Nambu–Jona-Lasinio model. 2. (2024). (arXiv:2402.12757).
 - [6] Anikin I.V., Ivanov M.A., Kulimanova N.B., Lyubovitskij V.E. // *Z. Phys. C.* **65**. 681 (1995).
 - [7] Bernard V. // *Phys. Rev. D.* **34**. 1601 (1986).
 - [8] Hatsuda T., Kunihiro T. // *Prog. Theor. Phys.* **74**. 765 (1985).
 - [9] Gross F., Milana J. // *Phys. Rev. D.* **43**. 2401 (1991).
 - [10] Anikin I.V., Dorokhov A.E., Tomio L. // *Phys. Part. Nucl.* **31**. 509 (2000).
 - [11] Alexandrou C. et al. [Extended Twisted Mass Collaboration] // *Phys. Rev. D.* **108**, N 9. 094514 (2023). (arXiv:2308.12458).
 - [12] Gérardin A., Meyer H.B., Nyffeler A. // *Phys. Rev. D.* **100**, N 3. 034520 (2019). (arXiv:1903.09471).
 - [13] Maris P., Tandy P.C. // *Phys. Rev. C.* **62**. 055204 (2000). (arXiv:nucl-th/00050150).
 - [14] Kekez D., Klabužar D. // *Phys. Rev. D.* **107**, N 9. 094025 (2023). (arXiv:2006.02326).
 - [15] Hernández-Pinto R.J., Gutiérrez-Guerrero L.X., Bashir A. et al. // *Phys. Rev. D.* **107**, N 5. 054002 (2023). arXiv:2301.11881.
 - [16] Friesen A., Kalinovsky Y. Private communication.
 - [17] Sullivan J.D. // *Phys. Rev. D.* **5**. 1732 (1972).
 - [18] Ward J.C. // *Phys. Rev.* **78**. 182 (1950).
 - [19] Takahashi Y. // *Nuovo Cim.* **6**. 371 (1957).
 - [20] Choi H.M., Frederico T., Ji C.R., de Melo J.P.B.C. // *Phys. Rev. D.* **100**, N 11. 116020 (2019). (arXiv:1908.01185).
 - [21] Leão J. et al. [Jefferson Lab F_π Collaboration] // *Phys. Rev. D.* **110**, N 7. 074035 (2024). (arXiv:2406.07743).
 - [22] Ito H., Buck W., Gross F. // *Phys. Rev. C.* **43**. 2483 (1991).
 - [23] Rudy T.E., Fearing H.W., Scherer S. // *Phys. Rev. C.* **50**. 447 (1994). (arXiv:hep-ph/9401302).
 - [24] Itzykson C., Zuber J.B. Quantum Field Theory International Series In Pure and Applied Physics. New York : McGraw-Hill, 1980. ISBN: 978-0-486-44568-7.
 - [25] Bondarenko S., Slautin M. Pion in the Bethe-Salpeter approach with separable kernel. 2025. 5. arXiv:2505.09421.

Space-like pion off-shell form factors in the Bethe-Salpeter approach**S. G. Bondarenko^{1,2}, M. K. Slautin^{1,2,a}**¹*Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics JINR
Dubna, 141980 Russia*²*Dubna State University, Dubna, 141980 Russia
E-mail: ^aslautin@jinr.ru*

In the paper, the off-shell electromagnetic pion form factors in the Bethe-Salpeter formalism are considered. The separable kernel of the first rank quark-antiquark interaction is used to solve the equation analytically. The semi-off-shell pion form factors F_1 and F_2 , which are related to each other by the Ward-Takahashi identity, are calculated. The obtained off-shell form factors as well as static properties of the pion are compared with the results of other authors.

PACS: 11.10.St, 13.20.Cz, 13.25.Cq.

Keywords: the Bethe-Salpeter equation, the separable core, the Ward-Takahashi identities, the pion form factor, the physical constants of the pion.

*Received 06 June 2025.***Сведения об авторах**

1. Бондаренко Сергей Григорьевич — доктор физ.-мат. наук, начальник сектора № 4 НОТАЯ ЛТФ ОИЯИ; тел.: (495) 216-33-33, e-mail: bondarenko@jinr.ru.
2. Слаутин Михаил Константинович — ст. лаборант ЛТФ ОИЯИ; e-mail: slautin@jinr.ru.