

Экранирование периодически заряженных плоскости и нити двумерной сверхрешеткой в условиях штарковского квантования

С. Ю. Глазов,^{*} Е. И. Дударева[†]*Волгоградский государственный социально-педагогический университет**Россия, 400005, Волгоград, пр. им. В.И. Ленина, д. 27*

(Поступила в редакцию 25.07.2025; подписана в печать 01.09.2025)

Изучено влияние постоянного однородного электрического поля на проникновение поля периодически заряженных плоскости и нити в двумерный электронный газ двумерной сверхрешетки. В присутствии постоянного квантующего электрического поля потенциал осциллирует с частотами, кратными штарковской частоте. В случае невырожденного электронного газа найдена амплитуда постоянной составляющей потенциала.

PACS: 73.21.Cd

УДК: 537.213, 538.915.

Ключевые слова: двумерная сверхрешетка, штарковская частота, заряженная плоскость, заряженная нить, экранирование.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время не ослабевает интерес к физическим явлениям в системах с двумерных (2D) электронным газом. Теоретическому исследованию эффектов, связанных с экранированием внешних зарядов в твердотельных структурах, посвящено достаточно большое количество работ [1–10]. Различного рода случайные дефекты, заряженные примесные центры оказывают существенное влияние на электроны в 2D-системах. Плотность состояния 2D-электронов определяется характером неоднородностей, а также экранированием создаваемого ими потенциала [1]. Экранирование поля точечного заряженного центра рассмотрено в [2]. В [3] исследовано влияние однородного высокочастотного поля на экранирование заряда двумерным электронным газом.

Известно [4, 10, 11], что достаточно сильное постоянное электрическое поле вызывает «блховские» осцилляции электронов, описываемых спектром:

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \Delta - \frac{\Delta}{2} \left(\cos\left(\frac{p_x d}{\hbar}\right) + \cos\left(\frac{p_y d}{\hbar}\right) \right), \quad (1)$$

где Δ — полуширина минизоны проводимости, d — период сверхрешетки (СР), p_x , p_y — компоненты квазиимпульса электрона в плоскости СР. В [10] решена задача о влиянии постоянного однородного электрического поля на проникновение поля точечного и пространственно-периодически распределенного заряда в направлении вектора напряженности электрического поля в 2D-электронный газ в системе с периодическим потенциалом. Получены и проанализированы выражения для постоянной составляющей потенциала, при увеличении напряженности постоянного электрического поля выявлено усиление эффекта экранирования. В данной работе решена задача в аналогичной

геометрии для нахождения потенциала поля заряженных объектов: плоскости и нити в произвольной ориентации периодически распределенного заряда.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Будем рассматривать твердотельную структуру, геометрия которой приведена на рис. 1.

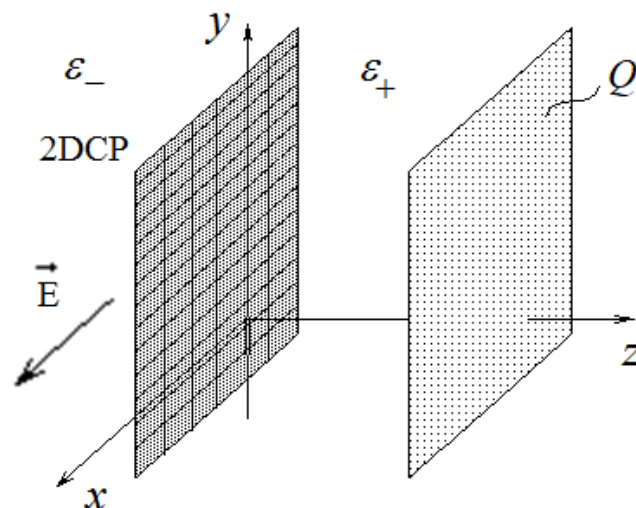


Рис. 1. Геометрия задачи

В плоскости $z = 0$ находится 2D-электронный газ СР, который разделяет пространство на две среды с разными диэлектрическими проницаемостями: для $z > 0$ диэлектрическая постоянная равна ε_+ , для $z < 0$ диэлектрическая постоянная ε_- . В плоскости $z = h$ ($h > 0$) имеется распределение электрического заряда $Q(\rho)$ ($\rho = \{x, y, 0\}$). Для определенности на рисунке показана равномерно заряженная плоскость. Постоянное электрическое поле воздействует на 2D-электронный газ СР (вектор напряженности $\mathbf{E}$ ориентирован вдоль оси Ox).

^{*} ser-glazov@yandex.ru

[†] bolhudere2001@mail.ru

Фурье компонента потенциала электрического поля, созданного распределением заряда $Q(\rho)$ в присутствии 2D электронного газа и постоянного электрического поля имеет вид [10]:

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{q}, z, t) = \frac{2}{q} \exp[-q(h-z)] \tilde{Q}(\mathbf{q}) \times \sum_{n,m} \frac{J_n(z_x) J_m(z_x) \exp[it\Omega(n-m)]}{\varepsilon_+ + \varepsilon_- - \Pi(\mathbf{q}, n\Omega)}, \quad (2)$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя вещественного аргумента, $z_x = \Delta \sin(q_x d/2)/(\hbar\Omega)$, $\Omega = eEd/\hbar$ — штарковская (блоховская) частота,

$$\Pi(\mathbf{q}, \omega) = \frac{4\pi e^2}{q} \sum_{\mathbf{p}} \frac{n_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - n_{\mathbf{p}}}{\Delta \sin(q_y d/2) \sin((p_y + q_y/2)d) - \hbar\omega}. \quad (3)$$

Отметим, что в присутствии постоянного электрического поля экранирующий потенциал осциллирует с частотами, кратными штарковской частоте Ω . Это и есть проявление блоховских осцилляций электронов в минизоне. Для постоянной составляющей потенциала (после усреднения (2) по времени, значительно превышающего период штарковских осцилляций), получим

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{q}, z) = \frac{4\pi}{q} \exp[-q(h-z)] \tilde{Q}(\mathbf{q}) \times \sum_n \frac{J_n^2(z_x)}{\varepsilon_+ + \varepsilon_- - \Pi(\mathbf{q}, n\Omega)}. \quad (4)$$

Рассмотрим далее невырожденный электронный газ, для которого $n_{\mathbf{p}} \sim \exp(-\varepsilon(p_x, p_y)/T)$, где T — температура в энергетических единицах. Вычисление (3) значительно упрощается в случае высоких температур: $2\Delta \ll T$. При этом в случае $\Omega > \Delta$ получаем следующее выражение [12, 13]:

$$\Pi(\mathbf{q}, \omega) = -\frac{(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)\chi}{q} \left(1 - \frac{|\hbar\omega|}{\sqrt{(\hbar\omega)^2 - \Delta^2 \sin^2(\frac{q_y d}{2})}}\right), \quad (5)$$

где $\chi = 4\pi e^2 N/[(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)T]$, N — поверхностная плотность 2D-электронного газа.

Тогда выражение для постоянной составляющей потенциала примет вид:

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{q}, z) = \frac{4\pi}{q(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)} \exp[-q(h-z)] \tilde{Q}(\mathbf{q}) \times \sum_n \frac{J_n^2(z_x)}{1 + \frac{\chi}{q} \left(1 - \frac{|n\hbar\Omega|}{\sqrt{(n\hbar\Omega)^2 - \Delta^2 \sin^2(\frac{q_y d}{2})}}\right)}. \quad (6)$$

Распределение постоянной части потенциала при $z < 0$ рассчитаем для нескольких случаев: равномерно и периодически заряженной плоскости; равномерно и периодически заряженной нити.

2. ПОТЕНЦИАЛ ЗАРЯЖЕННОЙ ПЛОСКОСТИ

Пусть плотность распределения заряда задана соотношением $Q(\rho) = \sigma_0 \cos(k_x x + k_y y)$, где σ_0 — поверхностная плотность заряда, $\mathbf{k}(k_x, k_y)$ — «волновой» вектор, характеризующий степень модуляции плотности заряда. При этом выражение для Фурье-образа $\tilde{Q}(\mathbf{q})$ имеет вид

$$\tilde{Q}(\mathbf{q}) = \sigma_0 \int \cos(k_x x + k_y y) \exp(-i\mathbf{q}\rho) d\rho. \quad (7)$$

Проинтегрировав (7), получим

$$\tilde{Q}(\mathbf{q}) = 2\pi^2 \sigma_0 [\delta(q_x + k_x) \delta(q_y + k_y) + \delta(q_x - k_x) \delta(q_y - k_y)], \quad (8)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Подставив (8) в (6) и произведя обратное Фурье-преобразование, получим уравнение для распределения потенциала

$$\varphi(\rho, z) = \frac{4\pi\sigma_0 \cos(k_x x + k_y y)}{(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)} \frac{e^{-\sqrt{k_x^2 + k_y^2}(h-z)}}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2\left(\frac{\Delta}{\hbar\Omega} \sin\left(\frac{k_x d}{2}\right)\right)}{1 + \frac{\chi}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \left(1 - \frac{|n\hbar\Omega|}{\sqrt{(n\hbar\Omega)^2 - \Delta^2 \sin^2\left(\frac{k_y d}{2}\right)}}\right)}. \quad (9)$$

В случае сильных полей $\hbar\Omega \gg \Delta$ выражение (9) значительно упрощается

$$\varphi(\rho, z) = \frac{4\pi\sigma_0 \cos(k_x x + k_y y)}{(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)} \frac{e^{-\sqrt{k_x^2 + k_y^2}(h-z)}}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \times \left[1 - \frac{\chi}{\chi + \sqrt{k_x^2 + k_y^2}} J_0^2\left(\frac{\Delta}{\hbar\Omega} \sin\left(\frac{k_x d}{2}\right)\right)\right]. \quad (10)$$

В случае, когда $\chi \gg |k|$ в пределе сильных полей в формуле (10) выражение в квадратных скобках стремится к нулю. Этот случай соответствует эффективному экранированию пространственно-периодически распределенного заряда 2D электронным газом СР в условиях штарковского квантования.

На рис. 2 представлены графики зависимости потенциала от напряженности квантующего электрического поля в безразмерных единицах, построенные по формуле (9) для разных соотношений между параметрами. Из анализа графиков следует, что при увеличении параметра χ (увеличение концентрации носителей заряда, уменьшения температуры) потенциал уменьшается. В случае, когда распределение заряда задано вдоль оси ОХ ($k_y=0$) из (9) с использованием $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(x) = 1$, имеем

$$\varphi(\rho, z) = \frac{4\pi\sigma_0 \cos(k_x x)}{(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)} \frac{e^{-|k_x|(h-z)}}{|k_x|}. \quad (11)$$

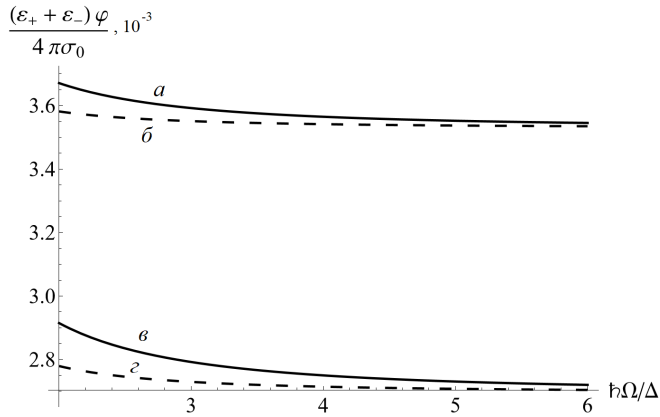


Рис. 2. Зависимости потенциала от напряженности квантующего электрического поля в безразмерных единицах при $x = 0$, $y = 0$, $z/d = -1$, $h/d = 1$: $a - \chi d = 1$; $k_x d = 2$; $k_y d = 1$, $b - \chi d = 1$; $k_x d = 1$; $k_y d = 2$, $c - \chi d = 2$; $k_x d = 2$; $k_y d = 1$, $d - \chi d = 2$; $k_x d = 1$; $k_y d = 2$

Напомним, что вектор напряженности постоянно-го электрического поля ориентирован вдоль оси ОХ. В данном случае постоянная составляющая потенциала не зависит ни от величины постоянного электрического поля, ни от концентрации носителей, а определяется только параметрами пространственно — периодически распределенного заряда. В случае, когда распределение заряда задано вдоль оси ОУ ($k_x = 0$) из (9) с использованием $J_0(0) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$, имеем

$$\varphi(\rho, z) = \frac{4\pi\sigma_0 \cos(k_y y) e^{-|k_y|(h-z)}}{(\varepsilon_+ + \varepsilon_-) |k_y| + \chi}, (k_y \neq 0). \quad (12)$$

Сравнивая (11) и (12), видим, что проявляется разный характер экранирования пространственно — периодически распределенного заряда вдоль осей СР вследствие наличия постоянного квантующего электрического поля, выделяющего направление, вдоль которого оно приложено. В случае равномерно заряженной плоскости ($k_x = 0$, $k_y = 0$) из (9) для постоянной составляющей потенциала имеем

$$\varphi(\rho, z) = \varphi_\infty + \frac{4\pi\sigma_0(z-h)}{(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)}, \quad (13)$$

что соответствует классическому случаю однородного электрического поля. Таким образом, однородное электрическое поле равномерно заряженной плоскости проникает беспрепятственно через 2D-электронный газ СР. Также следует отметить, что в этом случае потенциал также будет осциллировать с частотами, кратными шарковской частоте Ω .

3. ПОТЕНЦИАЛ ЗАРЯЖЕННОЙ НИТИ

Пусть теперь плотность распределения заряда задана соотношением $Q(\rho) = \lambda_0 \cos(k_x x + k_y y) \delta(y - \alpha x)$, где

λ_0 — линейная плотность заряда. При этом выражение для Фурье-образа $\tilde{Q}(\mathbf{q})$ имеет вид

$$\tilde{Q}(\mathbf{q}) = \pi\lambda_0 [\delta(q_x - k_x + \alpha(q_y - k_y)) + \delta(q_x + k_x + \alpha(q_y + k_y))]. \quad (14)$$

Произведя обратное Фурье-преобразование (6), получим формулу для распределения потенциала

$$\begin{aligned} \varphi(\rho, z) = & \frac{4\pi\lambda_0}{(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)} \times \\ & \times \iint \tilde{Q} \frac{e^{-\sqrt{q_x^2 + q_y^2}(h-z) + iq_x x + iq_y y}}{\sqrt{q_x^2 + q_y^2}} \frac{dq_x dq_y}{(2\pi)^2} \times \\ & \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2(\frac{\Delta}{\Omega} \sin(\frac{q_y d}{2}))}{1 + \frac{\chi}{\sqrt{q_x^2 + q_y^2}} \left(1 - \frac{|n\Omega|}{\sqrt{(n\Omega)^2 - \Delta^2 \sin^2(\frac{q_y d}{2})}}\right)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Один из интегралов легко берется по q_x , результат не приведен в силу его громоздкости. Оставшийся интеграл по q_y не выражается в табулированных функциях, поэтому его анализ производился численно. В случае, когда нить расположена вдоль оси ОХ плотность распределения заряда задана простым соотношением $Q(\rho) = \lambda_0 \cos(k_x x) \delta(y)$. Тогда формула для распределения потенциала имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(\rho, z) = & \frac{2\lambda_0 \cos(k_x x)}{(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)} \int dq_y \frac{e^{-\sqrt{k_x^2 + q_y^2}(h-z) + iq_y y}}{\sqrt{k_x^2 + q_y^2}} \times \\ & \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2(\frac{\Delta}{\Omega} \sin(\frac{k_x d}{2}))}{1 + \frac{\chi}{\sqrt{k_x^2 + q_y^2}} \left(1 - \frac{|n\Omega|}{\sqrt{(n\Omega)^2 - \Delta^2 \sin^2(\frac{q_y d}{2})}}\right)}. \end{aligned} \quad (16)$$

На рис. 3 представлена зависимость экранированного потенциала от координаты x . Численный анализ показал, что при увеличении напряженности постоянного поля E увеличивается эффект экранирования заряженной нити.

На рис. 4 представлена зависимость безразмерного потенциала от параметра k_x . Случай равномерно заряженной нити получается из (16), положив $k = 0$.

В случае, когда нить расположена вдоль оси ОУ, плотность распределения заряда задана простым соотношением $Q(\rho) = \lambda_0 \cos(k_y y) \delta(x)$. Тогда формула для распределения потенциала имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(\rho, z) = & \frac{2\lambda_0 \cos(k_y y)}{(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)} \int dq_x \frac{e^{-\sqrt{q_x^2 + k_y^2}(h-z) + iq_x x}}{\sqrt{q_x^2 + k_y^2}} \times \\ & \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2(\frac{\Delta}{\Omega} \sin(\frac{q_x d}{2}))}{1 + \frac{\chi}{\sqrt{q_x^2 + k_y^2}} \left(1 - \frac{|n\Omega|}{\sqrt{(n\Omega)^2 - \Delta^2 \sin^2(\frac{q_x d}{2})}}\right)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Наиболее интересная ситуация получается при повороте нити в плоскости, параллельной плоскости 2D-электронного газа. В этом случае плотность распределения заряда удобно описывать одним из соотношений

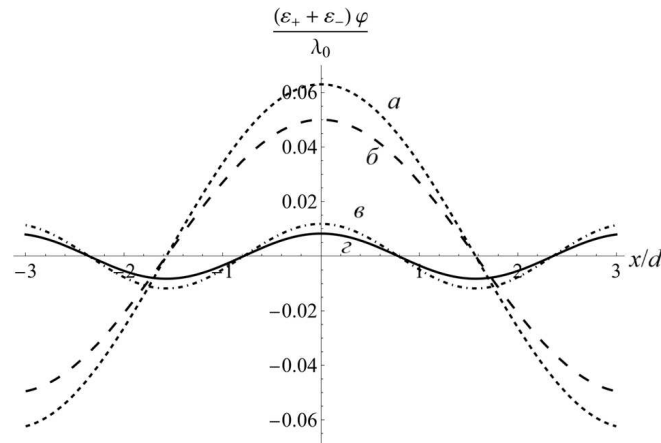


Рис. 3. Зависимость безразмерного потенциала от x при $y = 0$, $h/d = 1$, $z/d = -1$: а — $\hbar\Omega/\Delta = 2$, $k_x d = 1$; б — $\hbar\Omega/\Delta = 10$, $k_x d = 1$; в — $\hbar\Omega/\Delta = 10$, $k_x d = 2$; г — $\hbar\Omega/\Delta = 2$, $k_x d = 2$

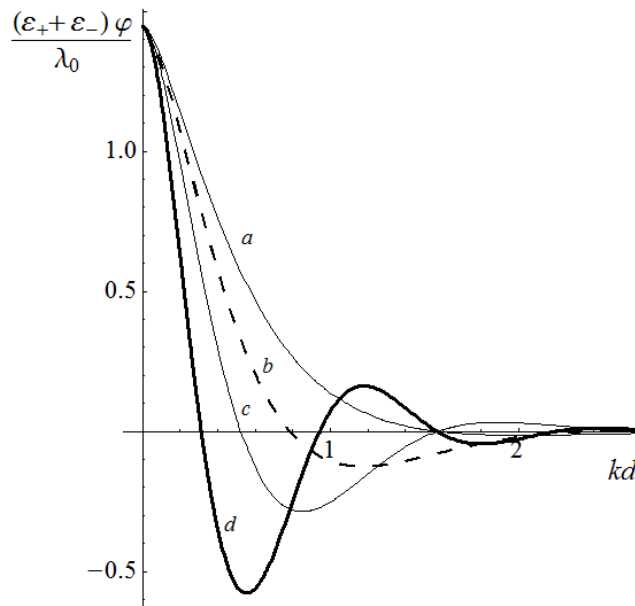


Рис. 4. Зависимость безразмерного потенциала от k_x при $y = 0$, $h/d = 1$, $z/d = -1$, $\hbar\Omega/\Delta = 2$: а — $xd = 1$; б — $xd = 2$; в — $xd = 3$; д — $xd = 5$

$\lambda(\rho) = \lambda_0 \delta(y - \alpha x)$, $\lambda(\rho) = \lambda_0 \delta(x - y/\alpha)$. Установлено, что постоянная составляющая потенциала поля периодически заряженной нити зависит от угла поворота нити θ и является следствием анизотропности системы, обусловленной в первую очередь наличием постоянного электрического поля.

Исследование поведения экранированного потенциала от концентрации электронов в 2D газе СР показало, что при увеличении концентрации носителей в 2D СР увеличивается эффект экранирования периодически заряженных плоскости и нити.

В итоге отметим, что наличие постоянного квантующего поля приводит к усилению эффекта экранирования.

Приведем численные значения параметров задачи,

при которых выполняются сделанные выше приближения и можно ожидать проявления максимального экранирования: $\Delta \sim 10^{-2}$ эВ, $d \sim 10^{-6}$ см, $\Omega \sim 10^{13}$ с $^{-1}$ ($E \sim 10^3$ В/см), $N \sim 10^{11}$ см $^{-2}$. Для проявления штарковского квантования необходимо выполнение условия $\Omega\tau \gg 1$, где τ — среднее время свободного пробега электрона. Для экспериментального наблюдения описанных в работе эффектов требуются 2D СР, у которых $\tau > 10^{-13}$ с.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение сформулируем кратко основные результаты и выводы из проделанной работы.

1. В присутствии постоянного электрического поля экранирующий потенциал осциллирует с частотами, кратными штарковской частоте.
2. Наличие постоянного квантующего поля приводит к усилению эффекта экранирования периодически заряженных плоскости и нити.
3. Постоянная составляющая потенциала поля периодически заряженной плоскости и нити зависит от направления распределения заряда по этим объектам и является следствием анизотропии системы, обусловленной в первую очередь

наличием постоянного электрического поля.

4. Исследование поведения экранированного потенциала от концентрации электронов в 2D-газе СР показало, что при увеличении концентрации носителей увеличивается эффект экранирования.

Статья подготовлена по материалам Школы-семинара «Волновые явления: физика и применения» («Волны-2025»).

-
- | | |
|--|--|
| <p>[1] Кукушкин И.В., Мешков С.В., Тимофеев В.Б. // УФН. 155, № 2. 219 (1988).</p> <p>[2] Stern F. // Phys. Rev. Lett. 8, № 14. 546 (1967).</p> <p>[3] Shmelev G.M., Epshtein E.M. // J. Phys.: Condens. 1 (25). 4013 (1989).</p> <p>[4] Bryxin V.V., Firsov Yu.A. // Sol. St. Commun. 10. 471 (1972).</p> <p>[5] Grinberg, A.A. // Phys. Rev. B. 32 (12). P. 8187 (1985).</p> <p>[6] Grinberg, A.A. // J. of Appl. Phys. 62 (1). P. 195 (1987).</p> <p>[7] Зебреев Г.И. // ФТП. 26, № 9. 1550 (1992).</p> <p>[8] Jena D., Gossard A.C., Mishra U.K. // Appl. Phys. Lett. 76 (13). P. 1707 (2000).</p> | <p>[9] Khaliji K., Stauber T., Low T. // Phys. Rev. B. 102 (12). 4013 (2020).</p> <p>[10] Глазов С.Ю., Крючков С.В. // Вестник ВГТУ. 3, № 8. 144 (2007).</p> <p>[11] Глазов С.Ю., Кубракова Е.С. // Изв. РАН. Сер. физ. 75, № 12. 1720 (2011).</p> <p>[12] Глазов С.Ю., Крючков С.В. // ФТП. 35, № 4. 456 (2001).</p> <p>[13] Глазов С.Ю., Ковалев А.А., Крючков С.В. // Изв. РАН. Сер. физ. 84, № 2. 254 (2020).</p> |
|--|--|

Screening of periodically charged planes and filaments by a two-dimensional superlattice under the conditions of Stark quantization

S. Yu. Glazov^a, E. I. Dudareva^b

¹Volgograd State Social and Pedagogical University

Volgograd 400005, Russia

E-mail: ^aser-glazov@yandex.ru,, ^bbolhudere2001@mail.ru

The effect of a constant homogeneous electric field on the penetration of a field of periodically charged planes and filaments into a two-dimensional electron gas of a two-dimensional superlattice is studied. In the presence of a constant quantizing electric field, the potential oscillates with frequencies that are multiples of the Stark frequency. In the case of a non-degenerate electron gas, the amplitude of the constant component of the potential is found. PACS: 73.21. Cd.

Keywords: two-dimensional superlattice, Stark frequency, charged plane, charged filament, shielding.

Received 25 July 2025.

Сведения об авторах

1. Глазов Сергей Юрьевич — доктор физ.-мат. наук, доцент; e-mail: ser-glazov@yandex.ru.
2. Дударева Екатерина Ивановна — e-mail: bolhudere2001@mail.ru.