

Плазменные волны в двумерной графеновой сверхрешетке

С. Ю. Глазов,^{*} А. А. Ковалев[†]

Волгоградский социально-педагогический университет
Россия, 400005, Волгоград, пр. Ленина, д. 27

(Поступила в редакцию 25.07.2025; подписана в печать 01.09.2025)

В данной работе теоретически исследована зависимость частоты плазменных волн от волнового вектора и плотность плазменных возбуждений в электронном газе двумерной графеновой сверхрешетки. Расчеты выполнены на основе квантовой теории плазменных волн в приближении случайных фаз с учетом процессов переброса. Оценка частоты плазмонов для теоретически исследуемых в настоящее время сверхрешеток на основе графена на полосчатой подложке дает $\omega \sim 10^{13} \text{ с}^{-1}$. Выполнено сравнение законов дисперсии плазмонов графеновых и квантовых полупроводниковых сверхрешеток.

PACS: 73.21.Cd

УДК: 538.915.

Ключевые слова: двумерная сверхрешетка, плотность плазменных возбуждений, закон дисперсии плазменных волн.

ВВЕДЕНИЕ

Открытие двумерной формы углерода (графена) стимулировало гигантское количество теоретических и экспериментальных исследований как самого графена, так и структур на его основе. Повышенный интерес вызывают графеновые структуры, у которых в спектре возникает запрещенная зона. Одними из таких структур с уникальными свойствами являются графеновые сверхрешетки. Потенциально эти структуры могут быть использованы в микро- и наноэлектронике для создания устройств нового поколения.

Проблема экспериментального изучения сверхрешеток на основе графена связана со сложным строением и малыми размерами данных структур, поэтому промышленное получение на данный момент является затруднительным. В отличие от одномерных, двумерные графеновые сверхрешетки ещё более сложны в получении, но обладают значительно широким спектром свойств, и на данный момент изучаются уже не только теоретически, но и экспериментально [1–5]. Так, например, в работе [3] сверхрешетка получена путём создания пористой поверхности при травлении нанесенного на поверхность решетки графена оксида железа соляной кислотой. А в работе [4] были выращены шары из оксида железа на слое графена путем термического разложения олеата железа. В [5] предложена модель двумерной графеновой сверхрешетки на подложке из чередующихся в шахматном порядке прямоугольных областей щелевого и бесщелевого графена. Эта структура является развитием идей создания одномерной сверхрешетки на основе графена, возникающей за счет периодической модуляции запрещенной зоны [6].

В предыдущих работах нами были исследованы особенности плазменных возбуждений в одномерных гра-

феновых сверхрешетках на полосчатой подложке [7, 8] и влияния на них постоянного электрического поля [9]. Для двумерной графеновой сверхрешетки найден закон дисперсии плазменных волн в присутствии сильного постоянного электрического поля [10], а задача о собственных плазменных возбуждениях такой структуры до настоящего момента так и не решалась.

В настоящей работе рассматриваются особенности законов дисперсии плазменных волн $\omega(\mathbf{k})$ двумерной графеновой сверхрешетки и полупроводниковой квантовой двумерной сверхрешетки, связанные с неаддитивностью их энергетических спектров. Для двумерной графеновой сверхрешетки найдена плотность плазменных возбуждений. Эта характеристика наглядно позволяет показать диапазон частот плазменных возбуждений и их интенсивность. И хотя до сих пор не получен даже опытный образец рассматриваемой в настоящей работе двумерной графеновой сверхрешетки, подобные теоретические расчеты плотности плазменных возбуждений в приближении случайных фаз в углеродных структурах дают хорошее согласие с экспериментальными данными [11].

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Энергетический спектр носителей заряда в двумерной графеновой сверхрешетке на подложке из чередующихся в шахматном порядке прямоугольных областей щелевого и бесщелевого графена (рис.1) в одномини-зонном приближении имеет вид [5]:

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \sqrt{\Delta_0^2 + \Delta_1^2 \left(1 - \cos\left(\frac{p_x d_1}{\hbar}\right)\right) + \Delta_2^2 \left(1 - \cos\left(\frac{p_y d_2}{\hbar}\right)\right)}, \quad (1)$$

где p_x, p_y — компоненты квазиимпульса электрона, $d_i = a_i + b_i$ — период графеновой сверхрешетки, a_i и b_i — ширины полосок бесщелевого и щелевого графена.

^{*} ser-glazov@yandex.ru

[†] kovalev-sith@yandex.ru

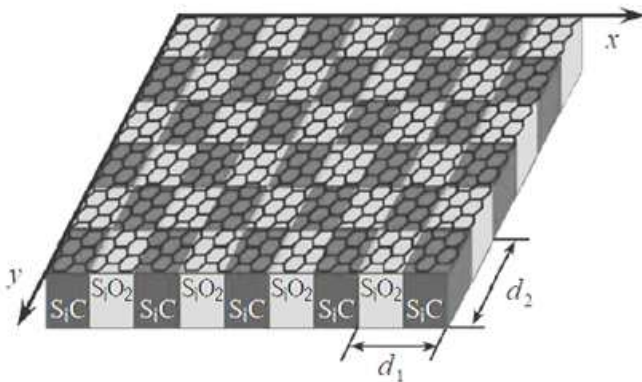


Рис. 1. Двумерная графеновая сверхрешетка

На основе квантовой теории плазменных волн в приближении случайных фаз с учетом процессов переброса выражение для нахождения закона дисперсии плазменных волн в двумерном электронном газе графеновой сверхрешетки имеет вид [7, 12]

$$\frac{2\pi e^2}{\chi} \Pi(\mathbf{k}, \omega) S(\mathbf{k}) = 1, \quad (2)$$

где $\Pi(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{\mathbf{p}} \frac{n(\mathbf{p}+\mathbf{k}) - n(\mathbf{p})}{\varepsilon(\mathbf{p}+\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{p}) - \hbar\omega}$, χ — диэлектрическая проницаемость. Вычисление множителя $S(\mathbf{k})$ требует знания конкретного вида потенциальных ям, образующих сверхрешетку. Так же, как и в [12], воспользуемся простым модельным случаем, который позволяет легко описать множитель $S(\mathbf{k})$, определяемый потенциалом межэлектронного взаимодействия:

$$S(k_x, k_y) = 4d \sum_n \left\{ \frac{(1 - \cos(k_x d))}{(k_x d + 2\pi n)^2 (k_y d + 2\pi m)^2} \times \frac{(1 - \cos(k_y d))}{\sqrt{(k_x d + 2\pi n)^2 + (k_y d + 2\pi m)^2}} \right\}. \quad (3)$$

Предполагаем, как и в [7], что в состоянии равновесия носители заряда подчиняются статистике Больцмана $n(\mathbf{p}) = A \exp(-\varepsilon(\mathbf{p})/k_b T)$, где T — температура, k_b — постоянная Больцмана, A — постоянная нормировки.

Анализ закона дисперсии плазменных волн $\omega(\mathbf{k})$ в виду сложности (2) производился численно.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА ЗАКОНА ДИСПЕРСИИ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН

Для проведения численного анализа закона дисперсии плазменных волн требуется найти для (1) коэффициенты Δ_i , которые подбирались численно на основе непосредственного решения дисперсионного соотношения для энергетического спектра из [6] и с использованием принципа симметрии.

Рассмотрим пример симметричной графеновой сверхрешетки, когда $d_1 = d_2 = d = 2 \cdot 10^{-6}$ см. В табл. 1 приведены коэффициенты Δ_i/Δ для равной ширины полосок бесщелевой и щелевой модификации графена при $\Delta = 0.13$ эВ (SiC). Ширина запрещенной зоны между валентной зоной и зоной проводимости $\varepsilon_g = 0.8573 \Delta$, ширина запрещенной зоны между первой и второй зонами проводимости $\varepsilon_{g12} = 0.6270 \Delta$, ширина первой минизоны проводимости $\varepsilon_e = 0.2111 \Delta$.

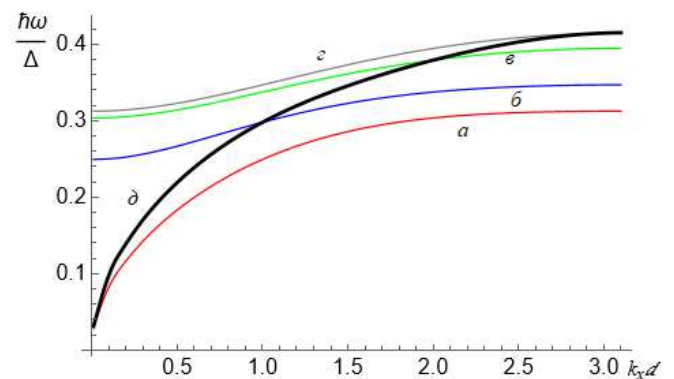
Таблица 1. Коэффициенты Δ_i/Δ в законе дисперсии (1)

i	0	1	2
$d_1 = d_2$	0.422	0.332	0.332

Для использования одноминизонного приближения достаточно выполнения условий $T < 10^2$ К, $4\hbar v_f/\Delta d \leq 1$, где $v_f \approx 10^8$ см/с — скорость Ферми в графене.

По результатам численного анализа (2) построены графики зависимости $\omega(k_x)$. На рис. 2 приведены дисперсионные кривые при условии равенства ширины полос бесщелевой и щелевой модификации графена и разных значениях волнового числа k_y .

Исследование температурной зависимости проводилось для диапазона температур, ограниченного областью применимости в данной задаче. Оценка температур, при которых электронный газ в графене, в спектре которого имеется энергетическая щель [13], невырожден дает для параметров задачи условие $T > 40$ К. С учетом условия на температуру, связанного с использованием одноминизонного приближения, диапазон исследуемых температур составлял $40 \text{ К} < T < 90 \text{ К}$. При увеличении температуры при фиксированном значении волнового вектора $\mathbf{k}$ наблюдается уменьшение плазменной частоты.

Рис. 2. Закон дисперсии $\omega(k_x)$ при $T = 70$ К, $N = 10^{11} \text{ см}^{-2}$: а — $k_y d = 0.0$, б — $k_y d = 1.0$, в — $k_y d = 2.0$, г — $k_y d = 3.0$, д — $k_y = k_x$

Отметим, что для электронного газа сверхрешет-

ки на основе графена при выборе волнового вектора k вдоль оси сверхрешетки получается характерная дисперсионная зависимость частоты плазменных волн, как для двумерного газа полупроводниковых сверхрешеток [14].

3. СРАВНЕНИЕ С ПОЛУПРОВОДНИКОВЫМИ СВЕРХРЕШЕТКАМИ

Удобно для аналитических расчетов использовать разложение (1) в двойной ряд Фурье. В работе [15] показано, что с увеличением периода графеновой сверхрешетки уменьшается неаддитивность энергетического спектра и при $d > 5 \times 10^{-6}$ см, можно с хорошей степенью точности аппроксимировать «истинный» спектр структуры аддитивной зависимостью энергии от квазиимпульса.

При разложении спектра в ряд Фурье в нашем случае можно ограничиться первыми слагаемыми

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \Delta \left\{ g_1 - \frac{g_2}{2} \left[\cos\left(\frac{p_x d}{\hbar}\right) + \cos\left(\frac{p_y d}{\hbar}\right) \right] - g_3 \cos\left(\frac{p_x d}{\hbar}\right) \cos\left(\frac{p_y d}{\hbar}\right) \right\}, \quad (4)$$

где $g_1 = 0.6245$, $g_2 = 0.1787$, $g_3 = 0.0131$. Для рассматриваемого примера максимальное расхождение спектров составляет 1%. Подобного вида спектры характерны не только для графеновых сверхструктур, но и для квантовых полупроводниковых сверхрешеток [16]. Для полупроводниковых сверхрешеток хорошим подходом, позволяющим значительно упростить решение различных задач, является использование статистики Больцмана в пределе высоких температур. Для графеновых сверхрешеток в данной работе мы использовали статистику Больцмана, но в силу небольшой запрещенной зоны между валентной и зоной проводимости предел высоких температур в рамках одноминизонного приближения не может быть применен.

Для квантовых полупроводниковых сверхрешеток со слабой неаддитивностью энергетического спектра (4) удается аналитически получить выражение для поляризационного оператора $\Pi(\mathbf{k}, \omega)$ в случае высоких температур ($g_2 \Delta \ll k_b T$). Подставляя $\Pi(\mathbf{k}, \omega)$ в (2), получаем окончательное выражение для нахождения закона дисперсии плазменных волн $\omega(\mathbf{k})$:

$$\frac{2\pi e^2 N S(\mathbf{k})}{\chi k_b T} \left[g_3 \frac{g_2^2}{16} \left(\frac{\Delta}{k_b T} \right)^3 - 1 \right] \times \\ \times \left[1 - \frac{2}{\pi} \frac{\hbar \omega K(z)}{\sqrt{(\hbar \omega)^2 - g_2^2 \Delta^2 \left(\sin \frac{k_x d}{2} - \sin \frac{k_y d}{2} \right)^2}} \right] = 1, \quad (5)$$

где N — поверхностная плотность двумерного электронного газа, $K(z)$ — полный эллиптический интеграл первого рода,

$$z = 2g_2 \Delta \sqrt{\frac{\sin \frac{k_x d}{2} \sin \frac{k_y d}{2}}{\left((\hbar \omega)^2 - g_2^2 \Delta^2 \left(\sin \frac{k_x d}{2} - \sin \frac{k_y d}{2} \right)^2 \right)}}. \quad (6)$$

Как видно из (5), отличие полученного уравнения от аналогичного для полупроводниковой сверхрешетки с аддитивным спектром [12] в множителе с коэффициентом g_3 , являющимся параметром, характеризующим неаддитивность спектра. Таким образом, слабая неаддитивность энергетического спектра приводит к перенормировке концентрации носителей и плазменная частота в таких структурах меньше, чем в структурах с аддитивным спектром при одинаковых параметрах сравниваемых структур.

4. ПЛОТНОСТЬ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ

Относительная плотность плазменных возбуждений рассчитывалась численно по формуле

$$g(\omega) = \sum \delta(\omega - \omega(\mathbf{k})). \quad (7)$$

На рис. 3 представлена относительная плотность плазменных возбуждений $g(\omega)$ для разных значений концентраций электронов $N = 2 \times 10^{10}$ и $N = 10^{11}$ см $^{-2}$, $T = 70$ К. Зависимость $g(\omega)$ имеет монотонный вид, при достижении некоторой характерной частоты ω_p наблюдается ярко выраженный максимум плотности плазменных возбуждений. Появление таких максимумов плотности, связано с характерной для полупроводниковых сверхрешеток особенностью поведения дисперсионной зависимости $\omega(k)$ в коротковолновом диапазоне. Область энергий плазменных возбуждений в одноминизонном приближении ограничена сверху, что является характерной особенностью двумерных сверхрешеток [17], в отличие от одномерных [7]. При увеличении концентрации носителей в двумерной сверхрешетке область энергий плазменных возбуждений увеличивается и ярко выраженный максимум плотности плазменных возбуждений ω_p сдвигается в сторону больших частот.

В работах [7, 17] исследуется зависимость ширины области энергий плазмонов от периода и ширины потенциальных ям, образующих сверхрешетки. Подобные зависимости наблюдаются и для исследуемой в данной работе структуры. Ширина области энергий плазменных возбуждений определяется шириной минизоны проводимости, которую можно менять, задавая определенный период сверхрешетки и соотношение между ширинами ячеек бесщелевого и щелевого графена.

Сделаем численные оценки. При концентрации $N_0 = 10^{11}$ см $^{-2}$, $d = 2 \times 10^{-6}$ см, $d_1 = d_2$, $\Delta = 0.13$ эВ,

$T = 70$ К, $k_x = k_y \approx 10^6$ см⁻¹ получаем, что частота плазменных колебаний составляет по порядку величины $\omega \sim 10^{13}$ с⁻¹.

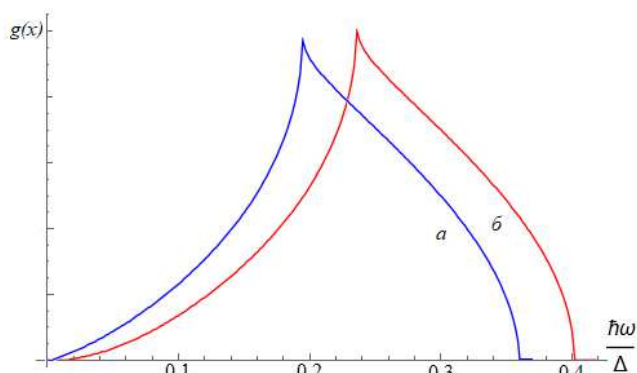


Рис. 3. Плотность плазменных возбуждений a — $N = 2 \times 10^{10}$ см⁻², b — $N = 10^{11}$ см⁻²

Данная задача решалась в пренебрежении столкновениями электронов с фононами, примесями и другими дефектами. Такое возможно, когда период плазменных колебаний мал по сравнению со временем свободного пробега электрона ($\omega\tau \gg 1$). Это условие может быть удовлетворено при $\tau \geq 10^{-12}$ с, что является легко выполнимым для графена и структур на его основе.

При сравнительном исследовании одночастичных и коллективных возбуждений в двумерном электронном газе двумерной графеновой сверхрешетке установлено, также как и в работах [10, 17], что коллективные возбуждения перекрываются одночастичными в низкоэнергетической области. Это приведет к отличию теоретических от экспериментальных данных в начальной области энергий.

ретических от экспериментальных данных в начальной области энергий.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные выводы из проделанного исследования:

1. Исследован закон дисперсии плазменных волн и плотность плазменных возбуждений в электронном газе двумерной графеновой сверхрешетки. Расчеты выполнены на основе квантовой теории плазменных волн в приближении случайных фаз с учетом процессов переброса.
2. Показано существенное отличие плотности плазменных возбуждений в электронном газе двумерной графеновой сверхрешетки от одномерной. Область энергий плазменных возбуждений двумерной графеновой сверхрешетки в одноминизонном приближении ограничена сверху.
3. Для квантовых полупроводниковых сверхрешеток со слабой неаддитивностью энергетического спектра получено аналитическое выражение для нахождения закона дисперсии плазменных волн. Учет неаддитивности энергетического спектра приводит к уменьшению плазменной частоты по сравнению с аддитивным спектром из-за специфической перенормировки концентрации носителей заряда.

Статья подготовлена по материалам Школы-семинара «Волновые явления: физика и применения» («Волны-2025»).

[1] Forsythe C., Zhou X., Watanabe K. et al. // Nature Nanotechnology. **13**. 566 (2018).
 [2] Zhang Y., Kim Y., Gilbert M.J. et al. // NPJ 2D Materials and Applications. **2**. 31 (2018).
 [3] Lv H., Yao Y., Yuan M. et al. // Nat Commun. **15**. 1295 (2024).
 [4] Tosun O., Sarkar P., Qian C. et al. // npj 2D Mater Appl. **8**. 32 (2024).
 [5] Kryuchkov S.V., Porov C.A. // Journal of Nano- and Electronic Physics. **9**, №2 02013 (2017).
 [6] Ратников П. В. // Письма в ЖЭТФ. **90**, В 6. 515 (2009).
 [7] Глазов С.Ю., Ковалев А.А., Мецержакова Н.Е. // Изв. РАН. Сер. физ. **76**, № 12. 1479 (2012).
 [8] Глазов С.Ю., Ковалев А.А. // Изв. РАН. Сер. физ. **82**, № 1. 105 (2018).

[9] Глазов С.Ю., Ковалев А.А., Мецержакова Н.Е. // ФТП. **49**, В. 4. 515 (2015).
 [10] Глазов С.Ю., Ковалев А.А., Крючков В. // Изв. РАН. Сер. физ. **84**, № 2. 254 (2020).
 [11] Ахметьянов Р.Ф., Шиховцева Е.С., Ломакин Г.С. // ФТТ. **51**, В.12. 2404 (2009).
 [12] Глазов С.Ю., Крючков С.В. // ФТП. (2000. **34**, В.7. 835).
 [13] Завьялов Д.В., Конченков В.И., Крючков С.В. // ФТП. **46**, В.1. 113 (2012).
 [14] Глазов С.Ю., Крючков С.В. // ФТП. **34**, В.7. 835 (2000).
 [15] Бадикова П.В., Глазов С.Ю., Сыродоев Г.А. // ФТП. **7**, В. 53. 9 (2019).27.
 [16] Орлов М.Л., Орлов Л.К. // ФТП. **55**, В.3. 241 (2021).
 [17] Глазов С.Ю., Громышов И.С., Мецержакова Н.Е. // Изв. РАН. Сер. физ. **78**, № 12. 152 (2014). 1.

Plasma waves in a two-dimensional graphene-based superlattice**S. Yu. Glazov^a, A. A. Kovalev^b***Volgograd State Social Pedagogical University**Volgograd, 400005 Russia**E-mail: ^aser-glazov@yandex.ru, ^bkovalev-sith@yandex.ru*

In this paper, the dependence of the plasma wave frequency on the wave vector and the density of plasma excitations in the electron gas of a two-dimensional graphene superlattice are theoretically investigated. The calculations are performed based on the quantum theory of plasma waves in the random phase approximation taking into account the umklapp processes. The plasmon frequency estimate for the currently theoretically studied superlattices based on graphene on a striped substrate yields $\omega \sim 10^{13} \text{ s}^{-1}$. A comparison of the plasmon dispersion laws of graphene and quantum semiconductor superlattices is performed.

PACS: 73.21.Cd.

Keywords: two-dimensional superlattice, density of plasma excitations, dispersion law of plasma waves.*Received 25 July 2025.***Сведения об авторах**

1. Глазов Сергей Юрьевич — доктор физ.-мат. наук, доцент; e-mail: ser-glazov@yandex.ru.
2. Ковалев Александр Александрович — e-mail: kovalev-sith@yandex.ru.