

Термодинамика струны и теория чисел

А. В. Борисов^{1,*}, А. О. Шишанин^{2,†}

¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра теоретической физики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

²Московский энергетический институт, кафедра высшей математики
Россия, 111250, Москва, Красноказарменная улица, д. 14, стр. 1
(Поступила в редакцию 10.08.2025; подписана в печать 28.09.2025)

. В методической заметке рассмотрены термодинамические свойства простой системы с бесконечным числом степеней свободы — квантовой струны, эквивалентной бесконечному набору осцилляторов с частотами, кратными основной частоте ω . Вычислены статистическая сумма, средняя энергия и теплоемкость струны как функции температуры. С использованием преобразования Лапласа статистической суммы показано, что статистический вес состояния струны с энергией $E = N\hbar\omega$ равен числу разбиений $p(N)$ натурального числа N на сумму натуральных чисел, и воспроизведена (с точностью до численного коэффициента) известная в теории чисел асимптотическая формула Харди–Рамануджана для $p(N)$ при $N \gg 1$. Показано, что квантование струны эквивалентно также квантованию одномерной теории поля, описывающей, в частности, суперпозицию стоячих электромагнитных волн.

PACS: 03.65.-w, 05.30.-d, 02.10.De, 03.50.-z, 03.50.De, 03.70.+k

УДК: 534.11, 536.93, 511.178, 537.86, 530.145

Ключевые слова: струна, осциллятор, статистическая сумма, статистический вес, плотность состояний, преобразование Лапласа, теория чисел, формула Харди–Рамануджана, одномерная теория поля, стоячие электромагнитные волны, квантовая теория поля.

ВВЕДЕНИЕ

В читаемом одним из авторов общем курсе «Физика» на отделении математики механико-математического факультете МГУ статистической физике уделяется сравнительно немного времени. Поэтому большую роль играют подбор для семинарских занятий задач, иллюстрирующих основы этой науки, и используемые методы расчета термодинамических характеристик простых модельных систем, а также их связь с фундаментальными разделами математики.

В настоящей работе мы рассматриваем одну из простых систем с бесконечным числом степеней свободы — квантовую струну (нерелятивистскую с закрепленными концами), которая эквивалентна бесконечному набору независимых осцилляторов с частотами, кратными основной частоте (см. ниже п. 4):

$$\omega_k = k\omega, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Постановка задачи заимствована нами из известной книги по теории струн [1]. Теоретико-числовой аспект задачи о квантовой струне уже рассматривался в работе [2]. В настоящей работе мы вычисляем теплоемкость струны как функцию температуры, получаем ее асимптотики при низких и высоких температурах, а также уточняем результат статьи [2] для асимптотики статистического веса макросостояния струны в области высоких энергий и ее связи с известной формулой Харди–Рамануджана в теории чисел [3].

1. СТАТИСТИЧЕСКАЯ СУММА И ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ СТРУНЫ

Полагая энергию основного состояния струны равной нулю, представим спектр энергии k -го осциллятора с учетом (1) в виде

$$\varepsilon_k = \hbar k \omega n_k, \quad n_k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Статсумма Z струны как системы независимых осцилляторов представляется в виде бесконечного произведения сумм Z_k по состояниям отдельных осцилляторов (см. (2)):

$$Z = \prod_{k=1}^{\infty} Z_k, \quad Z_k = \sum_{n_k=0}^{\infty} e^{-\beta \varepsilon_k} = (1 - e^{-k\beta \hbar \omega})^{-1}, \quad (3)$$

где $\beta = 1/T$ — обратная температура струны (в энергетических единицах). Следовательно,

$$L(\beta) \equiv \ln Z(\beta) = -F/T = - \sum_{k=1}^{\infty} \ln (1 - e^{-k\beta \hbar \omega}), \quad (4)$$

где F — свободная энергия.

Внутренняя (средняя) энергия струны

$$\overline{E} = - \frac{\partial L}{\partial \beta} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \hbar \omega}{e^{k\beta \hbar \omega} - 1}. \quad (5)$$

Заметим, что формулу (5) можно сразу получить, используя известную формулу Планка для средней энергии осциллятора с частотой ω_k :

$$\overline{\varepsilon}_k = \frac{\hbar \omega_k}{e^{\beta \hbar \omega_k} - 1}.$$

* borisov@phys.msu.ru

† guaicura@gmail.com

2. ТЕПЛОЕМКОСТЬ СТРУНЫ

Теплоемкость струны получаем из (5):

$$C = \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x_k}{\operatorname{sh} x_k} \right)^2, \quad x_k = \frac{k\hbar\omega}{2T}. \quad (6)$$

Рассмотрим асимптотическое поведение теплоемкости как функции температуры T .

При $T/\hbar\omega \ll 1$ основной вклад дает первое слагаемое в (6), причем $x_1 \gg 1$, так что теплоемкость экспоненциально мала:

$$C \simeq \left(\frac{\hbar\omega}{T} \right)^2 e^{-\hbar\omega/T}. \quad (7)$$

При $T/\hbar\omega \gg 1$ удобнее сначала найти асимптотику энергии, используя формулу суммирования Эйлера–Маклорена (см., например, [4], с. 206):

$$\sum_{k=1}^{\infty} F(k) \simeq \int_0^{\infty} F(x) dx - \frac{1}{2} F(0). \quad (8)$$

Из (5) и (8) находим

$$\bar{E} \simeq \frac{\pi^2}{6} \frac{T^2}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} T, \quad (9)$$

где использовано значение табличного интеграла (см. [4], с. 202):

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Из (9) и (6) получаем высокотемпературную асимптотику теплоемкости:

$$C \simeq \frac{\pi^2}{3} \frac{T}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}. \quad (10)$$

График теплоемкости (6) как функции приведенной температуры $t = 2T/\hbar\omega$ показан на рис. 1.

Выход на асимптотику (10) с ростом t происходит довольно быстро, что иллюстрирует на рис. 2 отношение R асимптотики (10) к (6).

3. ПЛОТНОСТЬ МИКРОСОСТОЯНИЙ СТРУНЫ И ФОРМУЛА ХАРДИ–РАМАНУДЖАНА

Рассмотрим связь этой задачи с теорией чисел, уточнив результаты работы [2].

Для этого покажем, как плотность микросостояний и статистический вес макросостояния струны связан с числом разбиений $p(n)$ натурального числа n на сумму натуральных чисел [3].

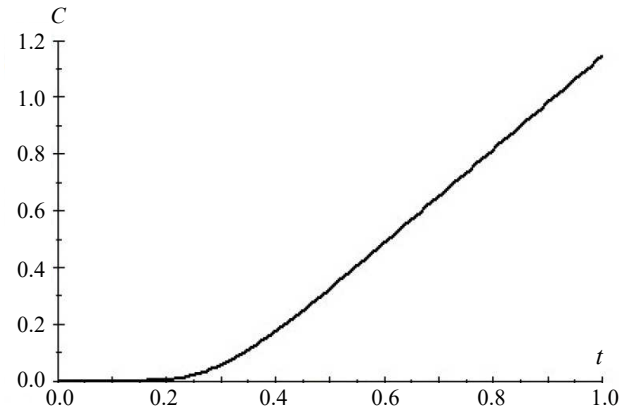


Рис. 1. Теплоемкость струны

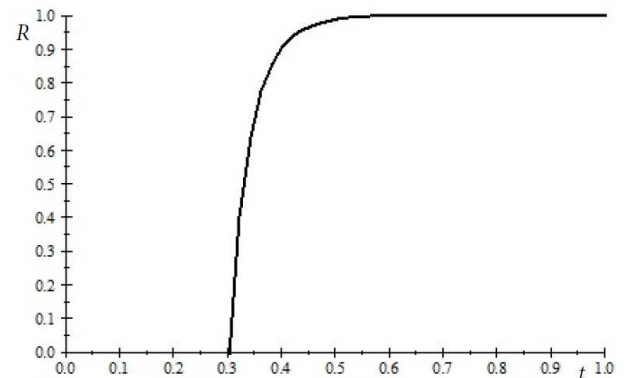


Рис. 2. Выход теплоемкости на высокотемпературную асимптотику

Плотность состояний $\Omega(E)$ как функция энергии струны выражается через статсумму с помощью преобразования Лапласа (см., например, [5]):

$$\begin{aligned} \Omega(E) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta' - i\infty}^{\beta' + i\infty} Z(\beta) e^{\beta E} d\beta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[L(\beta' + i\beta'') + (\beta' + i\beta'') E] d\beta''. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь интегрирование ведется в комплексной β -плоскости по прямой, параллельной мнимой оси и пересекающей действительную ось в точке $\beta' > 0$. Подставив (4) в (11), получаем (в этом разделе для упрощения записи формул величины размерности энергии выражаем в единицах $\hbar\omega$, формально положив $\hbar\omega = 1$):

$$\begin{aligned} \Omega(E) &= \frac{1}{2\pi i} \int d\beta e^{\beta E} \exp \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - e^{-n\beta}) \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int d\beta e^{\beta E} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-n\beta}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Далее используем формулу Эйлера (см. [3], с. 83, ф-ла (5.2.1)):

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} p(n) x^n.$$

Тогда (12) принимает вид

$$\Omega(E) = \sum_{n=1}^{\infty} p(n) \frac{1}{2\pi i} \int d\beta e^{\beta(E-n)}.$$

Отсюда с учетом интеграла

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int d\beta e^{\beta(E-n)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta'' e^{(\beta' + i\beta'')(E-n)} = \\ &= \delta(E-n) \end{aligned}$$

находим окончательно

$$\Omega(E) = \sum_{n=1}^{\infty} p(n) \delta(E-n). \quad (13)$$

Следовательно, статсумма

$$Z(\beta) = \int e^{-\beta E} \Omega(E) dE = \sum_{n=1}^{\infty} p(n) e^{-\beta n}. \quad (14)$$

Это значит, что статистический вес $\Gamma(N)$ макросостояния струны с энергией $E = N$ равен числу разбиений $p(N)$ натурального числа N , что также следует из (13) согласно общему определению [5]:

$$\Gamma(N) = \int_{N-\Delta N}^{N+\Delta N} \Omega(E) dE = p(N), \quad \Delta N < 1. \quad (15)$$

Получим асимптотику плотности состояний, используя метод перевала для вычисления интеграла (11) в предположении $E \gg 1$ (здесь мы следуем [5], с. 122–123):

$$\begin{aligned} \Omega(E) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[L(\beta^*) + \beta^* E - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L(\beta^*)}{\partial \beta^{*2}} \beta''^2 + \dots \right] d\beta'', \end{aligned}$$

где β^* определяется уравнением

$$\frac{\partial L(\beta^*)}{\partial \beta^*} = -E. \quad (16)$$

Вычислив гауссов интеграл по β'' , находим

$$\ln \Omega \simeq L(\beta) + \beta E - \frac{1}{2} \ln \left(2\pi \frac{\partial^2 L(\beta)}{\partial \beta^2} \right). \quad (17)$$

где $\beta \equiv \beta^* = 1/T$.

Используя (9) и (16), получаем

$$-\frac{\partial L}{\partial \beta} = E \simeq \frac{\pi^2}{6} \beta^{-2} - \frac{1}{2} \beta^{-1}. \quad (18)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} L(\beta) &\simeq \frac{\pi^2}{6} \beta^{-1} + \frac{1}{2} \ln \beta, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \beta^2} &= -\frac{\partial E}{\partial \beta} \simeq \frac{\pi^2}{3} \beta^{-3} - \frac{1}{2} \beta^{-2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Подставив (18) и (19) в (17), находим искомую высокотемпературную асимптотику:

$$\ln \Omega \simeq \frac{\pi^2}{3} \beta^{-1} + 2 \ln \beta. \quad (20)$$

Положим

$$E = N \gg 1. \quad (21)$$

Согласно (13) и (15) статистический вес $\Gamma(N)$ такого макросостояния равен числу разбиений $p(N)$ натурального числа N , причем при условии (21) спектр энергии становится квазинепрерывным, и суммирование по n в (13) можно заменить интегрированием, что дает

$$\Omega(N) \simeq p(N). \quad (22)$$

Учитывая (22), получим асимптотику $\ln p(N)$, подставив в (20) следующее из (18) и (21) выражение

$$\beta^{-1} \simeq \sqrt{\frac{6N}{\pi^2}}.$$

В результате получим

$$\ln p(N) \simeq 2\pi \sqrt{\frac{N}{6}} - \ln N. \quad (23)$$

Эта формула отличается от приведенных в [1] и [2] дополнительным логарифмическим слагаемым, которое не учитывается в стандартном термодинамическом пределе. Однако его учет позволяет получить известную асимптотическую формулу Харди–Рамануджана (ФХР) с точностью до численного коэффициента c_{HR} путем потенцирования логарифма (23):

$$p(N) \simeq \frac{c_{\text{HR}}}{N} \exp \left(\pi \sqrt{\frac{2}{3} N} \right). \quad (24)$$

Численное значение коэффициента, которое затруднительно получить использованным нами методом, таково (см. [3], с. 83, ф-ла (5.1.2)):

$$c_{\text{HR}} = \frac{1}{4\sqrt{3}}. \quad (25)$$

В таблице некоторые точные значения $p(N)$, взятые из статьи [6], сравниваются с вычисленными по формуле (24) с коэффициентом (25). Кроме того, в скобках

Таблица. Сравнение некоторых точных значений $p(N)$ с вычисленными по ФХР

N	Точное значение $p(N)$	Значение $p(N)$ по ФХР	Отн. ошибка (%)
5	7	8.9415(8.9019)	27.7(27.2)
10	42	48.104(47.891)	14.5(14.0)
50	204226	217590.0(216627.9)	6.54(6.07)
100	190569292	199280893.3(198399250.0)	4.57(4.11)
200	3972999029388	4100251432187.8(4082111411368.8)	3.20(2.75)
1000	$2.4061... \times 10^{31}$	$2.4402(2.4294) \times 10^{31}$	1.42(0.97)
10000	$3.6167... \times 10^{106}$	$3.6328(3.6167) \times 10^{106}$	0.45(0.00)

приведены значения, вычисленные по той же формуле, но с заменой c_{HR} на эмпирический коэффициент

$$c_{\text{BS}} = 0.143699 \simeq 0.9956 c_{\text{HR}}. \quad (26)$$

Этот коэффициент, дающий немного меньшую относительную ошибку, получен нами из уравнения

$$\frac{c_{\text{BS}}}{10^4} \exp\left(\pi \sqrt{\frac{2}{3} \times 10^4}\right) = p(10000),$$

где в правой части стоит точное значение.

4. КВАНТОВАНИЕ СТРУНЫ И РОЖДЕНИЕ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Как указано во Введении, струна эквивалентна бесконечному набору осцилляторов с частотами, кратными основной частоте (см. (1)). Покажем это.

Уравнение малых поперечных колебаний струны, натянутой вдоль оси x и закрепленной в точках $x = 0$ и $x = L$, имеет вид (см., например, [1]):

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (27)$$

где $u(t, x)$ — поперечное смещение элемента струны с координатой x в момент времени t , ρ — линейная массовая плотность струны, F — сила натяжения струны. Это уравнение может быть получено из лагранжиана (см. [7], с. 7, ф-лы (1.13) и (1.15))

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho \left[(\partial_t u)^2 - v^2 (\partial_x u)^2 \right], \quad (28)$$

где $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x = \partial/\partial x$, скорость $v = \sqrt{F/\rho}$. Подставив (28) в уравнение Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t u)} - \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x u)} = 0, \quad (29)$$

получим уравнение (27) и перепишем его в эквивалентной форме:

$$(\partial_t^2 - v^2 \partial_x^2) u = 0. \quad (30)$$

Энергия H струны длиной L определяется по лагранжиану (28) согласно общим формулам (см. [7], с. 11 и 12):

$$H = \frac{1}{2} \rho \int_0^L dx \left[(\partial_t u)^2 + v^2 (\partial_x u)^2 \right]. \quad (31)$$

Далее мы следуем [8], с. 30–32. Для решения уравнения (30) используем стандартный метод разделения переменных [9] с учетом граничных условий

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0,$$

получив представление поля $u(t, x)$ в виде ряда Фурье:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin\left(\frac{\omega_k}{v} x\right), \quad (32)$$

где частоты (ср. (1))

$$\omega_k = k\omega, \quad \omega = \frac{\pi v}{L}. \quad (33)$$

Подставим (32) в (31) и проинтегрируем по x с учетом соотношений

$$\begin{aligned} \int_0^L dx \sin\left(k' \frac{\omega}{v} x\right) \sin\left(k \frac{\omega}{v} x\right) &= \\ &= \int_0^L dx \cos\left(k' \frac{\omega}{v} x\right) \cos\left(k \frac{\omega}{v} x\right) = \frac{1}{2} L \delta_{k'k}. \end{aligned}$$

В результате получаем энергию струны в виде

$$H = \frac{1}{4} \rho L \sum_{k=1}^{\infty} (\dot{q}_k^2 + \omega_k^2 q_k^2). \quad (34)$$

Следовательно, струна действительно ведет себя как бесконечный набор независимых гармонических осцилляторов.

Введя новые координаты и импульсы согласно

$$Q_k = \sqrt{\frac{\rho L}{2}} q_k, \quad P_k = \dot{Q}_k,$$

находим из (34) заменой классических величин соответствующими операторами, следуя стандартной процедуре квантования [10], гамильтониан струны

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{P}_k^2 + \omega_k^2 \hat{Q}_k^2), \quad (35)$$

и постулируем канонические коммутационные соотношения (остальные коммутаторы равны нулю)

$$[\hat{Q}_k, \hat{P}_{k'}] = i\hbar \delta_{kk'}. \quad (36)$$

Наконец, введем операторы рождения $\hat{a}_k^+$ и уничтожения $\hat{a}_k$ согласно

$$\hat{Q}_k = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (\hat{a}_k^+ + \hat{a}_k), \quad \hat{P}_k = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}} (\hat{a}_k^+ - \hat{a}_k), \quad (37)$$

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^+] = \delta_{kk'}.$$

Подставив (37) в (35), получаем

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^{\infty} \hbar\omega_k \left(\hat{a}_k^+ \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right). \quad (38)$$

Спектр гамильтониана, представленного в виде (38), определяется чисто алгебраически известным методом факторизации (см. [10], с. 124–126):

$$E_{n_1 n_2 n_3 \dots} = \sum_{k=1}^{\infty} \hbar\omega_k n_k. \quad (39)$$

Здесь отброшено бесконечное слагаемое (энергия нулевых колебаний), что соответствует отсчету энергии квантовой струны от энергии основного состояния (вакуума), для которого все числа заполнения $n_k = 0$. Формула (39) была использована выше в п. 2 (см. (2) и (3)).

Завершаем этот раздел историческим замечанием.

Почти сто лет назад, точнее в 1926 г., М. Борн, В. Гейзенберг и П. Йордан опубликовали статью [11], в которой обобщили развитые ими методы матричной квантовой механики систем с конечным числом степеней свободы на системы с бесконечным числом степеней свободы. В качестве важного приложения теории они рассмотрели свободное электромагнитное поле в полости как систему бесконечного числа независимых осцилляторов и получили (в современных обозначениях) спектр энергии такой системы в виде (39), дав новую интерпретацию этой формулы: квантовое число n_k осциллятора с частотой ω_k равно числу световых квантов (термин «фотон» был введен Г. Н. Льюисом в том же, 1926 г.) в состоянии с энергией $\hbar\omega_k$. Далее авторы рассмотрели простую полевую

модель — одномерную теорию поля $u(t, x)$, заданного на интервале $0 \leq x \leq L$ с граничными условиями $u(t, 0) = u(t, L) = 0$. Энергия такого поля была записана в виде

$$H = \frac{1}{2} \int_0^L dx \left[(\partial_t u)^2 + c^2 (\partial_x u)^2 \right], \quad (40)$$

где c — скорость света (в вакууме). Выражение (40) следует из (31) при $\rho = 1$ и $v = c$, т. е. также отвечает струне с закрепленными концами. Квантование указанной полевой системы (см. (35)–(38)) и приводит к энергетическому спектру (39).

Покажем, как формула (40) (ее вывод в [11] опущен) следует из классической электродинамики [12] для специального класса свободных электромагнитных полей.

Выберем радиационную калибровку для 4-потенциала поля $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$:

$$A^0 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0,$$

положив $\mathbf{A} = cu(t, x)\mathbf{e}_y$. Тогда напряженности электрического и магнитного полей соответственно равны

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} = -\partial_t u \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = c \partial_x u \mathbf{e}_z. \quad (41)$$

Плотность энергии электромагнитного поля (в хевисайдовой системе единиц)

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2). \quad (42)$$

Подставив (41) в (42) и проинтегрировав по x , получим (40). Легко проверить, что система уравнений Максвелла в данном случае сводится к одному волновому уравнению (30), в котором надо положить $v = c$. При учете указанных граничных условий этот класс электромагнитных полей описывает суперпозицию стоячих волн между идеально отражающими параллельными плоскостями.

Как отметил С. Вайнберг [8], публикация статьи [11] ознаменовала рождение квантовой теории поля.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели термодинамические свойства струны — системы с бесконечным числом степеней свободы: вычислили статсумму, среднюю энергию и теплоемкость как функции температуры.

С использованием преобразования Лапласа статсуммы была найдена асимптотика статвеса макросостояния струны, который равен числу разбиений $p(N)$ натурального числа N (номера энергетического уровня струны), и воспроизведена известная асимптотическая формула Харди–Рамануджана (ФРХ) для $p(N)$

при $N \gg 1$ с точностью до численного коэффициента. Этот коэффициент был определен эмпирически путем приравнивания асимптотического значения $p(N)$ его точному значению при $N = 10^4$, что дает меньшую относительную ошибку в интервале $N = 5, 10000$, чем ФРХ.

Мы показали также, что квантование струны эквивалентно квантованию одномерной квантовой тео-

рии поля, описывающей, в частности, стоячие электромагнитные волны между двумя параллельными плоскостями.

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М. В. Ломоносова.

-
- | | |
|---|--|
| <p>[1] Цвибах Б. Начальный курс теории струн. М., 2011. (Zwiebach B. A First Course in String Theory. 2nd ed. Cambridge, 2009.)</p> <p>[2] Шишанин А.О. // Инженерный журнал: наука и инновации. №3 (27). (2014).</p> <p>[3] Эндрюс Г. Теория разбиений. М., 1982.</p> <p>[4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. Ч. 1. 5-е изд. М., 2002.</p> <p>[5] Кубо Р. Статистическая механика. М., 1967.</p> <p>[6] https://ru.wikipedia.org/wiki/Разбиение_числа</p> <p>[7] Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч.,</p> | <p>Борисов А.В. Квантовая электродинамика. М., 1983.</p> <p>[8] Вайнберг С. Квантовая теория поля. Т. 1. Общая теория. М., 2003.</p> <p>[9] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. 7-е изд. М., 2004.</p> <p>[10] Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч. Квантовая механика. М., 1979.</p> <p>[11] Born M., Heisenberg W., Jordan P. // Z. Phys. 35. 557 (1926).</p> <p>[12] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. 8-е изд. М., 2003.</p> |
|---|--|

String Thermodynamics and Number Theory

A. V. Borisov^{1a}, A. O. Shishanin^{2b}

¹Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia

²Department of Higher Mathematics, Moscow Power Engineering Institute
Moscow 111250, Russia

E-mail: ^aborisov@phys.msu.ru, ^bguaicura@gmail.com

In this methodological note, we consider the thermodynamic properties of a simple system with an infinite number of degrees of freedom — a quantum string equivalent to an infinite set of oscillators with frequencies multiples of the fundamental frequency ω . We calculate the partition function, average energy, and heat capacity of the string as functions of temperature. Using the Laplace transform of the partition function, we show that the statistical weight of a string state with energy $E = N\hbar\omega$ is equal to the number of partitions $p(N)$ of a natural number N into a sum of natural numbers, and we reproduce (up to a numerical coefficient) the well-known in number theory Hardy–Ramanujan asymptotic formula for $p(N)$ provided $N \gg 1$. We show that quantizing a string is also equivalent to quantizing a one-dimensional field theory describing, in particular, a superposition of standing electromagnetic waves.

PACS: 03.65.-w, 05.30.-d, 02.10.De, 03.50.-z, 03.50.De, 03.70.+k

Keywords: string, oscillator, partition function, statistical weight, density of states, Laplace transform, number theory, Hardy–Ramanujan formula, one-dimensional field theory, standing electromagnetic waves, quantum field theory.

Received 10 August 2025.

Сведения об авторах

- Борисов Анатолий Викторович — доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор; тел.: (495) 439-24-40, e-mail: borisov@phys.msu.ru.
- Шишанин Андрей Олегович — канд. физ.-мат. наук, доцент, тел.: (495) 362-71-31, e-mail: guaicura@gmail.com.