

Генерация дилатонов в электромагнитном поле вращающегося магнитного дипольного момента нейтронной звезды с учетом собственного гравитационного поля

М. О. Асташенков^{1,2,*}, В. И. Денисов^{1,2}, И. П. Денисова^{3,4}

¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет
кафедра квантовой теории и физики высоких энергий
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

²Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д. В. Скобельцина
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

³Московский государственный технический университет имени
Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)
Россия, 105005 Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5

⁴Государственный университет управления. Россия, 109542, Москва, Рязанский проспект, д. 99
(Поступила в редакцию 11.06.2025; подписана в печать 18.07.2025)

Согласно электродинамике Максвелла с дилатоном, дилатоны могут генерироваться электромагнитными полями с ненулевым инвариантом электромагнитного поля $F_{mn}F^{mn}$, где F_{mn} — тензор электромагнитного поля. В работе рассмотрена генерация дилатонов в электромагнитном поле вращающегося магнитного дипольного момента нейтронной звезды с учётом её собственного гравитационного поля. В приближении слабого гравитационного поля были получены решения уравнений дилатонного поля. На их основе была получена интенсивность генерации дилатонов в приближении $r_g/R_S \ll 1$, где r_g — радиус Шварцшильда, а R_S — радиус нейтронной звезды. Показано, что интенсивность генерации дилатонов от вращающегося магнитного дипольного момента нейтронной звезды в первом порядке малости меньше, чем в случае плоского пространства-времени.

PACS: 14.80.-j

УДК: 53.01, 537.8

Ключевые слова: дилатон, электродинамика Максвелла с дилатоном, нейтронная звезда.

ВВЕДЕНИЕ

Дилатон — это гипотетическое скалярное поле, которое впервые было предсказано в многомерных теориях гравитации, таких как теория Калуцы–Клейна [1, 2] и теория струн [3]. Позднее дилатон стал рассматриваться ещё и как голдстоуновский бозон при спонтанном нарушении конформной симметрии [4, 5], поэтому получил широкое применение в конформных теориях гравитации. В частности, дилатон появляется в «запутанной теории относительности» после конформного преобразования метрики [6]. Также дилатоны могут рассматриваться для описания некоторых супермассивных космических струн [7].

В настоящей работе мы будем рассматривать дилатон в контексте электродинамики Максвелла с дилатоном [8], которая предсказывается многомерными теориями гравитации, описанными выше. Как мы увидим ниже, согласно этой теории дилатоны могут генерироваться электромагнитными полями с ненулевым инвариантом электромагнитного поля $F_{mn}F^{mn}$.

Поиск дилатонов активно ведётся на Большом адронном коллайдере [9] и в других экспериментах [10, 11]. Но на данный момент получены лишь ограничения на константы взаимодействия.

В научной литературе немало теоретических исследований, касающихся свойств излучения дилатонов [12, 13], а также псевдоскалярных частиц [14, 15],

генерируемых электромагнитными полями в астрофизических условиях. В частности, перспективным является поиск дилатонов от вращающихся нейтронных звёзд — пульсаров и магнетаров. Как известно, эти астрофизические объекты имеют сильные магнитные поля ($10^8 - 10^{15}$ Гс) [16, 17] и являются источниками когерентного электромагнитного излучения.

В работе [13] рассчитана интенсивность генерации дилатонов от электромагнитного поля вращающегося магнитного дипольного момента нейтронной звезды. Показано, что спектр генерации дилатонов состоит из частот ω и 2ω , где ω — частота вращения нейтронной звезды. Результат был получен на фоне плоского пространства-времени.

Однако вращающиеся нейтронные звёзды обладают собственным гравитационным полем, эффектами которого в общем случае пренебрегать нельзя. В работе [18] показано, что для нейтронных звёзд интенсивность их электромагнитного излучения с учётом гравитационного поля может оказаться значительно меньше по сравнению с плоским пространством-временем.

В данной работе рассмотрена генерация дилатонов от вращающегося магнитного дипольного момента нейтронной звезды с учетом собственного гравитационного поля.

1. ОБЩЕКОВАРИАНТНОЕ УРАВНЕНИЕ ПОЛЯ ДИЛАТОНА

Действие для поля дилатона Ψ имеет вид:

* mixa.astash@yandex.ru

$$S = \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} [a_0 g^{nm} \frac{\partial \Psi}{\partial x^n} \frac{\partial \Psi}{\partial x^m} + a_1 e^{-2\mathcal{K}\Psi} F_{nm} F^{nm} + \frac{16\pi a_1}{c} j^k A_k], \quad (1)$$

где A_k — 4-вектор потенциал электромагнитного поля, $F_{nm} = \partial_n A_m - \partial_m A_n$ — тензор электромагнитного поля, j^k — 4-вектор тока, c — скорость света в вакууме, а a_0 , a_1 и $\mathcal{K}$ — некоторые постоянные. Параметр $\mathcal{K}$ принимает различные значения для различных теорий. В частности, $\mathcal{K} = 1$ для теории струн, $\mathcal{K} = \sqrt{(2+n)/n}$ для D -мерной теории Калуцы–Клейна ($D = 4 + n$) [2] с n дополнительными компактными измерениями пространства-времени. В нашей работе будем считать параметр $\mathcal{K}$ произвольным.

Из действия (1) следует уравнение дилатонного поля:

$$\frac{\partial}{\partial x^n} [\sqrt{-g} g^{nm} \frac{\partial \Psi}{\partial x^m}] = -\sqrt{-g} \chi e^{-2\mathcal{K}\Psi} F_{nm} F^{nm}, \quad (2)$$

где введено обозначение:

$$\chi = \frac{a_1 \mathcal{K}}{a_0}. \quad (3)$$

Следуя работе [7], можно положить: $a_0 = \frac{c^4}{32\pi G}$, $a_1 = -\frac{1}{16\pi}$, где G — гравитационная постоянная. С учётом этого $\chi = -\frac{2G\mathcal{K}}{c^4}$. Однако могут быть и другие значения констант a_0 , a_1 , в частности в теориях поля со спонтанным нарушением конформной симметрии [4, 5].

Ожидается, что поле $\Psi \ll 1$. В этом приближении уравнение (2) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x^n} [\sqrt{-g} g^{nm} \frac{\partial \Psi}{\partial x^m}] = -\sqrt{-g} \chi F_{nm} F^{nm}. \quad (4)$$

Рассмотрим уравнение (4) в приближении слабого гравитационного поля:

$$g_{ik} = \eta_{ik} + h_{ik}, \quad h \ll 1, \quad (5)$$

где η_{ik} — метрика Минковского плоского пространства-времени, а h_{ik} — возмущение метрики от гравитационного поля, $h = \det(h_{ik})$. В этом случае решение этого уравнения можно искать в виде разложения по малому параметру:

$$\Psi = \Psi^{(0)} + \Psi^{(1)} + \dots \quad (6)$$

Уравнение для поля $\Psi^{(0)}$ 0-го порядка малости примет вид:

$$(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \Psi^{(0)} = \chi (F_{nm} F^{nm})^{(0)}. \quad (7)$$

Из уравнения (7) следует, что источником дилатонного поля являются электромагнитные поля, у которых инвариант $(F_{nm} F^{nm})^{(0)}$ отличен от 0. Получается, чтобы найти поле дилатона, генерируемое вращающейся нейтронной звездой с учетом собственного гравитационного поля, необходимо сначала решить уравнения Максвелла для электромагнитного поля.

2. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В ОБЩЕКОВАРИАНТНОМ ВИДЕ

Запишем уравнения Максвелла в четырехмерном тензорном виде в произвольном псевдоримановом пространстве-времени [19]:

$$\frac{\partial F_{nm}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{mk}}{\partial x^n} + \frac{\partial F_{kn}}{\partial x^m} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} [\sqrt{-g} F^{nk}] = -\frac{4\pi}{c} j^n. \quad (9)$$

Первое уравнение системы (8) превращается в тождество, если мы учтем соотношение, связывающее тензор электромагнитного поля F_{nm} с четырехпотенциалом A_n :

$$F_{nm} = \frac{\partial A_m}{\partial x^n} - \frac{\partial A_n}{\partial x^m}. \quad (10)$$

Тогда второе уравнение (9), после тождественных преобразований, можно привести к виду, удобному для решения:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} g^{np} g^{km} [\frac{\partial A_m}{\partial x^p} - \frac{\partial A_p}{\partial x^m}]) = -\frac{4\pi}{c} j^n. \quad (11)$$

По аналогии с (6) будем искать решение уравнения (11) в виде разложения по малому параметру:

$$A_m = A_m^{(0)} + A_m^{(1)} + \dots \quad (12)$$

В случае, если $A_0^{(0)} = 0$, уравнение в 0-м порядке малости будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A}^{(0)} &= 0, \\ (\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \mathbf{A}^{(0)} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (13)$$

где координатами вектора $\mathbf{A}^{(0)}$ являются компоненты с верхним индексом $A^{(0)\alpha} = \eta^{\alpha\beta} A_\beta^{(0)}$, причем индексы α, β пробегает значения от 1 до 3.

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в начале координат находится нейтронная звезда (пульсар или магнетар), вращающаяся с частотой ω вокруг своей оси.

Так как распределение вещества в нейтронных звездах близко к сферически-симметричному, то в качестве метрического тензора псевдориманова пространства будем использовать решение Шварцшильда. Наиболее удобный вид это решение имеет в изотропных координатах [19]. Ненулевые компоненты метрического тензора g_{mn} в этих координатах имеют вид:

$$g_{00} = \frac{(1 - \frac{r_g}{4r})^2}{(1 + \frac{r_g}{4r})^2}, \quad g_{xx} = g_{yy} = g_{zz} = -(1 + \frac{r_g}{4r})^4, \quad (14)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. При этом r - это обозначение, а не координата.

Радиус нейтронных звезд в последнее время принято считать равным 10 км [20]. Так как массы нейтронных звезд лежат в диапазоне от 0.1 до 1 массы Солнца [21], то радиус Шварцшильда r_g нейтронных звезд можно оценить в 0.3 -3 км. В данной работе будем полагать отношение $r_g/R_S \ll 1$. Таким образом, за пределами нейтронной звезды ($r > R_S$) имеем $r_g/r \ll 1$. В данном приближении метрику (14) можно представить в виде:

$$g_{ik} = \eta_{ik} - \frac{r_g}{r} \delta_{ik}, \quad (15)$$

где $\eta_{ik} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ - метрика Минковского, а $\delta_{ik} = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$.

Пусть магнитный дипольный момент $\mathbf{m}$ нейтронной звезды направлен под углом α к оси вращения. Запишем его в виде:

$$\mathbf{m}(t) = m\{\sin \alpha \cos(\omega t), \sin \alpha \sin(\omega t), \cos \alpha\}. \quad (16)$$

В этом случае вращающаяся нейтронная звезда излучает электромагнитные волны в радиодиапазоне. Вектор-потенциал в 0-м порядке $\mathbf{A}^{(0)}$ можно представить в виде:

$$\mathbf{A}^{(0)} = \frac{[\mathbf{m}(\tau) \times \mathbf{r}]}{r^3} + \frac{[\dot{\mathbf{m}}(\tau) \times \mathbf{r}]}{cr^2}. \quad (17)$$

В выражении (17) магнитный дипольный момент $\mathbf{m}$ (16) зависит от запаздывающего времени $\tau = t - r/c$. Нетрудно убедиться, что выражение (17) является решением уравнений (13).

Электрическое и магнитное поле, создаваемые вектор-потенциалом (17), будут иметь вид:

$$\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}, \tau) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{r}, \tau)}{\partial \tau} = \frac{(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{m}}(\tau))}{cr^3} + \frac{(\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{m}}(\tau))}{c^2 r^2}, \quad (18)$$

$$\mathbf{B}^{(0)}(\mathbf{r}, \tau) = \text{rot} \mathbf{A}^{(0)} = \frac{3(\mathbf{m}(\tau) \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{m}(\tau)}{r^5} - \frac{\dot{\mathbf{m}}(\tau)}{cr^2} + \frac{3(\dot{\mathbf{m}}(\tau) \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{cr^4} + \frac{(\ddot{\mathbf{m}}(\tau) \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \ddot{\mathbf{m}}(\tau)}{c^2 r^3}. \quad (19)$$

Генерация дилатонов в 0-м порядке малости, генерируемых электрическим (18) и магнитным (19) полями, подробно рассмотрена в [13]. Показано, что спектр генерации дилатонов в нулевом порядке состоит из частот ω и 2ω :

$$\Psi^{(0)} = \Psi_{1\omega}^{(0)} + \Psi_{2\omega}^{(0)}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{1\omega}^{(0)}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{i\chi m^2 k^3 \sin 2\alpha}{2\sqrt{r}} e^{-i\omega t} \sqrt{\frac{\pi k}{2}} \left[-\Phi_1 H_{5/2}^{(1)}(kr) + \right. \\ &\quad \left. + p_{1\omega}^{(0)}(kr) H_{5/2}^{(1)}(kr) - g_{1\omega}^{(0)}(kr) H_{5/2}^{(2)}(kr) \right] \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}, \\ \Psi_{2\omega}^{(0)}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{i\chi m^2 k^3 \sin^2 \alpha}{2\sqrt{r}} e^{-2i\omega t} \sqrt{\pi k} \left[-\Phi_2 H_{5/2}^{(1)}(2kr) + \right. \\ &\quad \left. + p_{2\omega}^{(0)}(2kr) H_{5/2}^{(1)}(2kr) - g_{2\omega}^{(0)}(kr) H_{5/2}^{(2)}(2kr) \right] \sin^2 \theta e^{2i\phi}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $H_{5/2}^{(1)}(z)$ и $H_{5/2}^{(2)}(z)$ - функции Ганкеля 1-го и 2-го рода соответственно, а функции $p_{1\omega}^{(0)}(z)$, $g_{1\omega}^{(0)}(z)$, $p_{2\omega}^{(0)}(z)$ и $g_{2\omega}^{(0)}(z)$ определены следующим образом:

$$\begin{aligned} p_{1\omega}^{(0)}(z) &= \frac{1}{2z^6} (2iz^4 - 9iz^2 - 6i + 8z^3), \\ g_{1\omega}^{(0)}(z) &= \frac{1}{2z^6} e^{2iz} (-3iz^2 + 6i + 2z^3 + 12z), \\ p_{2\omega}^{(0)}(z) &= \frac{1}{z^6} (-2iz^4 - 9iz^2 - 12i + 4z^3), \\ g_{2\omega}^{(0)}(z) &= \frac{1}{z^6} e^{2iz} (-15iz^2 + 12i - 2z^3 + 24z). \end{aligned}$$

Константы Φ_1 и Φ_2 имеют функциональную зависимость от kR_S и определены выражениями:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_1(kR_S) = p_{1\omega}^{(0)}(kR_S) + g_{1\omega}^{(0)}(kR_S), \\ \Phi_2 &= \Phi_2(2kR_S) = p_{2\omega}^{(0)}(2kR_S) + g_{2\omega}^{(0)}(2kR_S). \end{aligned} \quad (22)$$

Далее рассмотрим уравнения (4) и (11) в 1-м порядке малости по r_g/r .

4. МАГНИТНОЕ ДИПОЛЬНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В СОБСТВЕННОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ВРАЩАЮЩИХСЯ НЕЙТРОННЫХ ЗВЕЗД

4.1. Уравнение для электромагнитного поля 1-го порядка

Считая, что компонента j^0 токов внутри нейтронной звезды равна 0, положим $A_0 = 0$. Далее, разлагая в ряд выражение (14) по r_g/r и подставляя в четырехмерное уравнение (11), получим следующие уравнения:

$$\sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left[\left(1 + \frac{r_g}{r}\right) A_\beta \right] = 0, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial t^2} + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left[\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} \right) \right] = \\ = -\frac{4\pi}{c} j^\alpha. \end{aligned} \quad (24)$$

Используя разложение (12), подставим выражение для вектор-потенциала $\mathbf{A}^{(0)}$ в нулевом порядке (17) в уравнения (23), (24) и получим следующие уравнения первого порядка:

$$\text{div} \mathbf{A}^{(1)} = 0, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{r_g}{r} \left\{ \frac{2[\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{m}}(\tau)]}{c^3 r^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3[\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{m}}]}{c^2 r^3} + \frac{[\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{m}}]}{cr^4} + \frac{[\mathbf{r} \times \mathbf{m}]}{r^5} \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

В выражении (26) координатами вектора $\mathbf{A}^{(1)}$ являются компоненты 4-х вектора с верхними индексами, поднятые с помощью метрики Минковского: $A^{(1)\alpha} = \eta^{\alpha\beta} A_\beta^{(1)}$.

4.2. Решение уравнения для электромагнитного потенциала

Заметим, что магнитный дипольный момент $\mathbf{m}$ (16) можно разбить на временно-зависимую и статическую части:

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_t(t) + \mathbf{m}_{\text{stat}}, \quad \text{где} \quad (27)$$

$\mathbf{m}_t(t) = \text{Re } m \sin \alpha \{1, i, 0\} e^{-i\omega t}$, а $\mathbf{m}_{\text{stat}} = m \cos \alpha \mathbf{e}_z$.

Таким образом, правая часть уравнения (26) содержит как слагаемые, зависящие от времени, так и независящие. Значит, потенциал $\mathbf{A}^{(1)}$ можно разбить на временно-зависимую и статическую части:

$$\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_t^{(1)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{A}_{\text{stat}}^{(1)}(\mathbf{r}). \quad (28)$$

Статическая часть

Для статической части $\mathbf{A}_{\text{stat}}^{(1)}$ уравнение (26) примет вид:

$$\Delta \mathbf{A}_{\text{stat}}^{(1)}(\mathbf{r}) = -\frac{r_g}{r^6} [\mathbf{r} \times \mathbf{m}_{\text{stat}}]. \quad (29)$$

Решение уравнения (29) имеет вид:

$$\mathbf{A}_{\text{stat}}^{(1)}(\mathbf{r}) = -\frac{r_g}{4r^4} [\mathbf{r} \times \mathbf{m}_{\text{stat}}]. \quad (30)$$

Временно-зависимая часть

Представим временно-зависимую часть магнитного дипольного момента (27) в комплексном виде:

$$\mathbf{m}_t(t) = m \sin \alpha \{1, i, 0\} e^{i\omega t}.$$

Тогда для временно-зависимой части в сферических координатах уравнение (26) примет вид:

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}_t^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \\ = -\frac{r_g m \sin \alpha}{r^2} \left[2ik^3 - \frac{3k^2}{r} - \frac{ik}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right] \times \\ \times (\cos \theta (-i\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) + i \sin \theta e^{i\phi} \mathbf{e}_z) e^{-i(\omega t - kr)}. \end{aligned} \quad (31)$$

Решение этого уравнения можно искать в виде записывающего потенциала:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_t^{(1)} = \frac{r_g m \sin \alpha}{4\pi} \int d^3 r' \frac{e^{-i(\omega t - k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - kr')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{1}{r'^2} \times \\ \times \left[2ik^3 - \frac{3k^2}{r'} - \frac{ik}{r'^2} + \frac{1}{r'^3} \right] \times \\ \times (\cos \theta' (-i\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) + i \sin \theta' e^{i\phi'} \mathbf{e}_z). \end{aligned} \quad (32)$$

Используя теорему Гегенбауэра [22] и формулы из работы [23] (подробнее, см. в приложении 2), получим точное решение уравнения (31) в области $r > R_S$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_t^{(1)} = \frac{ir_g m \sin \alpha}{2r} (\cos \theta (-i\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) + i \sin \theta e^{i\phi} \mathbf{e}_z) e^{-i\omega t} \times \\ \times \left[-k(2 \ln(kr) + \mathcal{A}) \times \left(\frac{1}{r} - ik \right) e^{ikr} + \right. \\ \left. + \frac{i}{r} (ik + \frac{1}{2r}) e^{ikr} + 2k \left(\frac{1}{r} + ik \right) \text{Ei}(2ikr) e^{-ikr} \right], \end{aligned} \quad (33)$$

где $\mathcal{A} = \mathcal{A}(kR_S)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(z) = -2 \ln(z) - \frac{1}{4z^4} + \frac{1}{z^2} + \frac{i}{z} + \\ + \left(\frac{1}{4z^4} - \frac{i}{2z^3} - \frac{3}{2z^2} + \frac{2i}{z} \right) e^{2iz} + 2\text{Ei}(2iz), \end{aligned} \quad (34)$$

а $\text{Ei}(z)$ — интегральная экспонента:

$$\text{Ei}(z) = \int_{-\infty}^z d\xi \frac{e^\xi}{\xi}.$$

Итоговое решение

Обобщив выражения (30) и (33), запишем итоговое решение:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(1)} = \text{Re } \frac{r_g}{2r^2} \left\{ (2 \ln(kr) + \mathcal{A} + 2\text{Ei}(2ikr) e^{-2ikr}) \frac{[\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{m}}(\tau)]}{c^2} + (2 \ln(kr) + \right. \\ \left. + \mathcal{A} + 1 - 2\text{Ei}(2ikr) e^{-2ikr}) \frac{[\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{m}}(\tau)]}{cr} - \frac{[\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{m}}(\tau)]}{2r^2} \right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Важно учитывать, что в выражении (35) магнитный дипольный момент $\mathbf{m}(\tau)$ представлен в комплексном виде: $\mathbf{m}(\tau) = m \{ \sin \alpha e^{-i\omega\tau}, i \sin \alpha e^{-i\omega\tau}, \cos \alpha \}$, а Re

обозначает действительную часть комплексного выражения.

4.3. Электрическое и магнитное поля в 1-м порядке

Как и в нулевом порядке, индукция магнитного поля $\mathbf{B}^{(1)}$ и напряжённость электрического поля $\mathbf{E}^{(1)}$ связаны с вектор-потенциалом $\mathbf{A}^{(1)}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{(1)} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}^{(1)}}{\partial t}, \\ \mathbf{B}^{(1)} &= \text{rot } \mathbf{A}^{(1)}.\end{aligned}\quad (36)$$

Подставляя (35) в (36), получим:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{(1)} &= -\text{Re} \frac{r_g}{2r^2} \left\{ (2 \ln(kr) + \mathcal{A} + 2\text{Ei}(2ikr)e^{-2ikr}) \frac{[\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{m}}(\tau)]}{c^3} + \right. \\ &\quad \left. + (2 \ln(kr) + \mathcal{A} + 1 - 2\text{Ei}(2ikr)e^{-2ikr}) \frac{[\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{m}}(\tau)]}{c^2 r} - \frac{[\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{m}}(\tau)]}{2cr^2} \right\},\end{aligned}\quad (37)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^{(1)} &= \text{Re} \frac{r_g}{2r} \left\{ (2\text{Ei}(2ikr)e^{-2ikr} - 2 \ln(kr) - \mathcal{A}) \frac{(\ddot{\mathbf{m}}(\tau) \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \ddot{\mathbf{m}}(\tau)}{c^3 r^2} - \right. \\ &\quad - (2\text{Ei}(2ikr)e^{-2ikr} + 2 \ln(kr) + \mathcal{A} - 1) \frac{3(\ddot{\mathbf{m}}(\tau) \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \ddot{\mathbf{m}}(\tau)}{c^2 r^3} + \\ &\quad + (2\text{Ei}(2ikr)e^{-2ikr} - 2 \ln(kr) - \mathcal{A} - \frac{1}{2}) \frac{3(\dot{\mathbf{m}}(\tau) \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \dot{\mathbf{m}}(\tau)}{cr^4} - \\ &\quad \left. - 2 \frac{\ddot{\mathbf{m}}(\tau)}{c^2 r} - \frac{(\dot{\mathbf{m}}(\tau) \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{cr^4} + \frac{2(\mathbf{m}(\tau) \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{m}(\tau)}{r^5} \right\}.\end{aligned}\quad (38)$$

4.4. Инвариант электромагнитного поля

Для решения уравнения дилатонного поля (2) в первом порядке малости по r_g/r , потребуется вычислить инвариант электромагнитного поля $F_{mn}F^{mn}$ в первом порядке малости. Учтём, что компоненты тензора F^{mn} с верхними индексами в приближении слабого поля (15) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}F^{0\alpha} &= g^{00}g^{\alpha\alpha}F_{0\alpha} \sim -\left(1 - \frac{r_g}{8r^2}\right)F_{0\alpha}, \\ F^{\alpha\beta} &= g^{\alpha\alpha}g^{\beta\beta}F_{\alpha\beta} \sim \left(1 - \frac{2r_g}{r}\right)F_{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

С учётом этого получим выражение для инварианта $F_{mn}F^{mn}$ в первом порядке малости по r_g/r :

$$(F_{mn}F^{mn})^{(1)} = 4\left((\mathbf{B}^{(0)} \cdot \mathbf{B}^{(1)}) - (\mathbf{E}^{(0)} \cdot \mathbf{E}^{(1)})\right) - 8\frac{r_g}{r}(\mathbf{B}^{(0)})^2.\quad (39)$$

5. ГЕНЕРАЦИЯ ДИЛАТОНОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ НЕЙТРОННОЙ ЗВЕЗДЫ С УЧЕТОМ СОБСТВЕННОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

5.1. Уравнение дилатонного поля в 1-м порядке

Подставляя метрику (14) в общеквариантное уравнение (4) и раскладывая в ряд по r_g/r , получим:

$$\left(1 + \frac{r_g}{r}\right) \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \Delta \Psi = -2\chi F_{mn}F^{mn}.\quad (40)$$

Подставляя разложение (6) и выражение для $(F_{mn}F^{mn})^{(1)}$ (39) в уравнение (40) и используя уравнение для $\Psi^{(0)}$ (7), получим следующее уравнение первого порядка:

$$\begin{aligned}\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \Psi^{(1)} &= \frac{2r_g}{r} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi^{(0)}}{\partial t^2} + 2\chi \left(2(\mathbf{B}^{(0)} \cdot \mathbf{B}^{(1)}) - \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{E}^{(0)} \cdot \mathbf{E}^{(1)}\right) - \frac{r_g}{r} (\mathbf{B}^{(0)} \cdot \mathbf{B}^{(0)} + \mathbf{E}^{(0)} \cdot \mathbf{E}^{(0)}).\end{aligned}\quad (41)$$

Как и для нулевого порядка (20), в первом порядке спектр генерации дилатонов: 1ω и 2ω :

$$\Psi^{(1)} = \Psi_{1\omega}^{(1)} + \Psi_{2\omega}^{(1)}.\quad (42)$$

Подставляя выражения для электрического (18), (37) и магнитного (19), (38) полей и $\Psi^{(0)}$ (20), получим следующие уравнения для $\Psi_{1\omega}^{(1)}$ и $\Psi_{2\omega}^{(1)}$ в комплексной форме:

$$\begin{aligned}
\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \Psi_{1\omega}^{(1)}(r, \theta, \phi) = & \chi r_g m^2 \sin 2\alpha e^{-i(\omega t - kr)} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi} \left[-\frac{4}{r^7} + \frac{ik}{r^6} \left(3\mathcal{A} + \frac{17}{2}\right) + \right. \\
& + \frac{3k^2}{r^5} \mathcal{A} + \frac{ik^3}{r^4} (\mathcal{A} + 3i\Phi_1 - 1) + \frac{3ik^4\Phi_1}{r^3} + \frac{k^5\Phi_1}{r^2} + \left(\frac{6ik}{r^6} + \frac{6k^2}{r^5} + \frac{2ik^3}{r^4} \right) \ln(kr) - \\
& \left. - \left(\frac{6ik}{r^6} - \frac{6k^2}{r^5} + \frac{2ik^3}{r^4} \right) \text{Ei}(2ikr) e^{-2ikr} \right], \\
\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \Psi_{2\omega}^{(1)} = & \chi r_g m^2 \sin^2 \alpha e^{-2i(\omega t - kr)} \sin^2 \theta e^{2i\phi} \left\{ -\frac{2}{r^7} + \frac{ik}{r^6} \left(3\mathcal{A} + \frac{17}{2}\right) + \frac{k^2}{r^5} (6\mathcal{A} + 3) + \right. \\
& + \frac{ik^3}{r^4} (-2\mathcal{A} + 3i\Phi_2 + 3) + \frac{k^4}{r^3} (6i\Phi_2 - 2) + 4\Phi_2 \frac{k^5}{r^2} + \left(\frac{6ik}{r^6} + \frac{12k^2}{r^5} - \frac{4ik^3}{r^4} \right) \ln(kr) + \\
& \left. + \left[-\frac{6ik}{r^6} - \frac{8ik^3}{r^4} + \frac{4ik^5}{r^2} \right] \text{Ei}(2ikr) e^{-2ikr} \right\}. \quad (43)
\end{aligned}$$

Константы Φ_1 , Φ_2 и $\mathcal{A}$ определены выражениями (22) и (34). Следует отметить, что поле дилатона Ψ является вещественным скалярным полем. Поэтому после решения уравнений (43) необходимо взять вещественную часть.

5.2. Решение уравнений дилатонного поля в первом порядке

Решение уравнений (43) можно найти в виде запаздывающего потенциала, используя теорему Гегенбауэра [22] и формулы из работы [23] (см. приложения 1, 3 и 4). Точное решение этих уравнений в комплексной форме можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
\Psi_{1\omega}^{(1)}(r, \theta, \phi, t) = & -\text{Re} \frac{i\pi\chi r_g m^2 k^7 \sin 2\alpha}{4\sqrt{r}} e^{-i\omega t} \left[\sigma_{1\omega}(kR_S) H_{5/2}^{(1)}(kr) + \right. \\
& \left. + p_{1\omega}^{(1)}(kr) H_{5/2}^{(1)}(kr) - g_{1\omega}^{(1)}(kr) H_{5/2}^{(2)}(kr) \right] \sin(\theta) \cos \theta e^{i\phi}, \\
\Psi_{2\omega}^{(1)}(r, \theta, \phi, t) = & -\text{Re} \frac{32i\pi\chi r_g m^2 k^7 \sin^2 \alpha}{\sqrt{r}} e^{-2i\omega t} \left[\sigma_{2\omega}(2kR_S) H_{5/2}^{(1)}(2kr) + \right. \\
& \left. + p_{2\omega}^{(1)}(2kr) H_{5/2}^{(1)}(2kr) - g_{2\omega}^{(1)}(2kr) H_{5/2}^{(2)}(2kr) \right] \sin^2 \theta e^{2i\phi}, \quad (44)
\end{aligned}$$

где Re обозначает действительную часть комплексного выражения. Функции $\sigma_{1\omega}(z)$ и $\sigma_{2\omega}(z)$ равны:

$$\begin{aligned}
\sigma_{1\omega}(z) &= -p_{1\omega}^{(1)}(z) - g_{1\omega}^{(1)}(z), \\
\sigma_{2\omega}(z) &= -p_{2\omega}^{(1)}(z) - g_{2\omega}^{(1)}(z), \quad (45)
\end{aligned}$$

а функции $p_{1\omega}^{(1)}(z)$, $g_{1\omega}^{(1)}(z)$, $p_{2\omega}^{(1)}(z)$ и $g_{2\omega}^{(1)}(z)$ определены следующим образом:

$$\begin{aligned}
p_{1\omega}^{(1)}(z) = & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi k^5}} \frac{1}{z^7} \left(\text{Ei}(2iz) e^{-2iz} \left[-iz^4 + \frac{3}{2}z^3 - 6iz^2 - 3z \right] + \ln(z) \left[-i\Phi_1 z^7 - z^5 + 4iz^4 + \frac{9}{2}z^3 + 3z \right] + \right. \\
& \left. + \left(\frac{3}{2}i\Phi_1 - \frac{1}{2}\mathcal{A} \right) z^5 + 2i\mathcal{A}z^4 + \left(\frac{9}{4}\mathcal{A} + \frac{9}{4}i\Phi_1 - \frac{11}{8} \right) z^3 + \frac{31}{10}iz^2 + \left(\frac{3}{2}\mathcal{A} + \frac{9}{4} \right) z + \frac{12}{7}i \right), \\
g_{1\omega}^{(1)}(z) = & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi k^5}} \frac{1}{z^7} e^{2iz} \left(\text{Ei}(2iz) e^{-2iz} \left[(i\Phi_1 - \frac{43}{35})z^7 - z^5 - 4iz^4 + \frac{9}{2}z^3 + 3z \right] + \right. \\
& + \ln(z) \left[iz^4 + \frac{3}{2}z^3 + 6iz^2 - 3z \right] - \frac{43}{70}iz^6 + \left(3i\Phi_1 - \frac{43}{140} \right) z^5 + \left(\frac{1}{2}\mathcal{A} + \frac{9}{2}i\Phi_1 - \frac{97}{140} \right) iz^4 + \\
& \left. \left(\frac{3}{4}\mathcal{A} - \frac{9}{4}i\Phi_1 + \frac{549}{280} \right) z^3 + \left(\frac{169}{35} + 3\mathcal{A} \right) iz^2 - \left(\frac{159}{28} + \frac{3}{2}\mathcal{A} \right) z - \frac{12}{7}i \right),
\end{aligned}$$

$$p_{2\omega}^{(1)}(z) = \frac{1}{32\sqrt{\pi k^5} z^7} \left(\text{Ei}(iz) e^{-iz} (iz^6 + 2z^5 - 7iz^4 - 3z^3 - 12iz^2 - 12z) - \ln(z) i\Phi_2 z^7 + \right. \\ \left. + \ln(z/2)(2z^5 + 4iz^4 + 9z^3 + 12z) + z^5 \left(\mathcal{A} + \frac{3}{2} i\Phi_2 - 1 \right) + iz^4(2\mathcal{A} + 5) + \right. \\ \left. + z^3 \left(\frac{9}{4} i\Phi_2 + \frac{9}{2} \mathcal{A} - \frac{1}{4} \right) + \frac{56}{5} iz^2 + z(6\mathcal{A} + 9) + \frac{48}{7} i \right),$$

$$g_{2\omega}^{(1)}(z) = \frac{1}{32\sqrt{\pi k^5} z^7} e^{2iz} \left(\text{Ei}(2iz) e^{-2iz} z^7 \left(i\Phi_2 - \frac{46}{35} \right) + \text{Ei}(iz) e^{-iz} (iz^6 - 2z^5 - 7iz^4 + 3z^3 - 12iz^2 + 12z) + \right. \\ \left. + \ln(z/2)(-2iz^4 + 15z^3 + 24iz^2 - 12z) - \frac{23}{35} iz^6 + z^5 \left(3i\Phi_2 - \frac{93}{70} \right) + iz^4 \left(\frac{23}{70} - \mathcal{A} + \frac{9}{2} i\Phi_2 \right) + \right. \\ \left. + z^3 \left(\frac{15}{2} \mathcal{A} - \frac{9}{4} i\Phi_2 + \frac{699}{140} \right) + iz^2 \left(\frac{718}{35} + 12\mathcal{A} \right) - z \left(\frac{159}{7} + 6\mathcal{A} \right) - \frac{48}{7} i \right).$$

6. ИНТЕНСИВНОСТЬ ГЕНЕРАЦИИ ДИЛАТОНОВ

Тензор энергии-импульса свободного дилатонного поля Ψ , следующий из действия (1), имеет вид:

$$T^{ik} = 2a_0 g^{in} g^{km} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial x^n} \frac{\partial \Psi}{\partial x^m} - \frac{1}{2} g_{mn} g^{sq} \frac{\partial \Psi}{\partial x^s} \frac{\partial \Psi}{\partial x^q} \right\}.$$

Вектор плотности потока энергии дилатонного поля $\mathbf{W}$ можно построить следующим образом:

$$W^\alpha = cT^{0\alpha} = 2a_0 g^{00} g^{\alpha\alpha} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial x^\alpha}.$$

По определению, количество энергии дилатонного поля dI , излучаемое источником в единицу времени через величину телесного угла $d\Omega$, задается формулой [13, 19]:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \lim_{r \rightarrow \infty} r(\mathbf{W} \cdot \mathbf{r}) = - \lim_{r \rightarrow \infty} 2a_0 r(\mathbf{r} \cdot \nabla \Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (46)$$

Для дальнейшего анализа генерации дилатонов от электромагнитных полей вращающейся нейтронной звезды с учётом собственного гравитационного поля нам потребуется только волновая часть от выражения (44). Иными словами, нас будут интересовать только те слагаемые, которые при $kr \gg 1$ убывают как $1/r$. Также учтём, что для многих пульсаров и магнетаров выполняется соотношение $kR_S \ll 1$. По этой причине оставим только основные члены при $kR_S \ll 1$. Таким образом, получим следующее выражение для $\Psi = \Psi^{(0)} + \Psi^{(1)}$ в волновой зоне:

$$\Psi_{1\omega} = \frac{2\chi m^2 k^2 \sin 2\alpha}{5r} \left[\frac{1}{R_S} \left(1 - \frac{2r_g}{3R_S} \right) \cos(\omega t - kr - \phi) - \right. \\ \left. - k \frac{r_g}{R_S} \left(\ln\left(\frac{R_S}{r}\right) + \frac{23}{12} \right) \sin(\omega t - kr - \phi) \right] \sin \theta \cos \theta, \\ \Psi_{2\omega} = \frac{4\chi m^2 k^2 \sin^2 \alpha}{5r} \left[\frac{1}{R_S} \left(1 - \frac{2r_g}{3R_S} \right) \cos[2(\omega t - kr - \phi)] - \right. \\ \left. - k \frac{r_g}{R_S} \left(2 \ln\left(\frac{R_S}{r}\right) + \frac{41}{12} \right) \sin[2(\omega t - kr - \phi)] \right] \sin^2 \theta. \quad (47)$$

Подставив полученное выражение для (47) в формулу (46), получим распределение интенсивности генерации дилатонов в единицу телесного угла, усреднённое по периоду магнитного дипольного излучения вращающейся нейтронной звезды:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \left(\frac{dI_{1\omega}^{(0)}}{d\Omega} + \frac{dI_{2\omega}^{(0)}}{d\Omega} \right) \left(1 - \frac{4r_g}{3R_S} \right), \quad (48)$$

где величины $dI_{1\omega}^{(0)}/d\Omega$ и $dI_{2\omega}^{(0)}/d\Omega$ посчитаны в [13] и равны:

$$\frac{dI_{1\omega}^{(0)}}{d\Omega} = \frac{4}{25} ca_0 \chi^2 B_0^4 R_S^{10} k^6 \sin^2 2\alpha \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\ \frac{dI_{2\omega}^{(0)}}{d\Omega} = \frac{64}{25} ca_0 \chi^2 B_0^4 R_S^{10} k^6 \sin^4 \alpha \sin^4 \theta,$$

где B_0 — магнитное поле на поверхности нейтронной звезды, а R_S — радиус нейтронной звезды. В выражениях выше учтено, что $m^4 = B_0^4 R_S^{12}$.

Интересно отметить, что слагаемое, пропорциональное $\ln(\frac{R_S}{r})$ в выражении (47), даёт вклад только во второй порядок по r_g/R_S .

Проинтегрировав (46) по углам θ, ϕ , получим выражение для полной интенсивности генерации дилатонов, усреднённой по периоду электромагнитного излучения:

$$I = (I_{1\omega}^{(0)} + I_{2\omega}^{(0)}) \left(1 - \frac{4r_g}{3R_S} \right), \quad (49)$$

где $I_{1\omega}^{(0)}$ и $I_{2\omega}^{(0)}$ равны [13]:

$$I_{1\omega}^{(0)} = \frac{32\pi}{375} ca_0 \chi^2 B_0^4 R_S^{10} k^6 \sin^2 2\alpha, \\ I_{2\omega}^{(0)} = \frac{2048\pi}{375} ca_0 \chi^2 B_0^4 R_S^{10} k^6 \sin^4 \alpha.$$

Как видно из выражения (49), интенсивность генерации дилатонов от вращающегося магнитного дипольного момента нейтронной звезды с учётом собственного гравитационного поля оказывается меньше по сравнению с аналогичным результатом на фоне плоского

пространства-времени. Это связано с тем, что с учётом собственного гравитационного поля становится меньше и интенсивность электромагнитного излучения вращающейся нейтронной звезды [18].

Оценим величину интенсивности генерации дилатонов $I^{(0)}$ из выражения (49). Типичный радиус нейтронных звезд $R_S \sim 10^6$ см [20], а максимальное магнитное поле на поверхности может достигать $B_0 \sim 10^{13}$ Гс для пульсаров [16] и 10^{15} Гс для магнетаров [17]. Учитывая, что период вращения миллисекундных нейтронных звезд $T \sim 10^{-3}$ с, $k \sim \frac{1}{cT} \sim 10^{-7}$ см $^{-1}$. Используя формулу (3) и подставляя значения $a_0 = \frac{c^4}{32\pi G}$, $a_1 = -\frac{1}{16\pi}$ из [7], можно оценить интенсивность (49) следующим образом:

$$I \sim \frac{GB_0^4 R_S^{10} k^6}{c^3} \quad (50)$$

Таким образом интенсивность генерации дилатонов может достигать $I^{(0)} \sim 10^{32}$ эрг с $^{-1}$ для миллисекундных пульсаров и 10^{40} эрг с $^{-1}$ для магнетаров. При этом, в работе [13] показано, что интенсивность генерации дилатонов значительно меньше интенсивности электромагнитного излучения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Согласно электродинамике Максвелла с дилатоном [8], дилатоны могут генерироваться электромагнитными полями с ненулевым инвариантом электромагнитного поля $F_{mn}F^{mn}$ (2). В частности, перспективным источником дилатонов являются вращающиеся нейтронные звезды: пульсары и магнетары, так как они обладают сильным магнитным полем (10^8 - 10^{15} Гаусс) [16]. Генерация дилатонов от вращающегося магнитно-

го дипольного момента подробно рассмотрена в работе [13]. Генерация дилатонов происходит на частотах ω и 2ω (20), где ω — частота вращения нейтронной звезды. Этот результат был получен на фоне плоского пространства-времени.

Так как нейтронные звезды являются массивными [21] и компактными объектами с радиусом $R_S \sim 10$ км [20], они обладают собственным гравитационным полем, близким к сферически-симметричному. Поэтому в качестве метрики псевдориманова пространства было выбрано решение Шварцшильда в изотропных координатах (14).

В приближении слабого гравитационного поля $r_g/r < r_g/R_S \ll 1$ (r_g — Радиус Шварцшильда) было найдено решение (35) для электромагнитного поля, а затем решения дилатонного поля (44) в первом порядке малости по r_g/r .

Далее была получена поправка к интенсивности генерации дилатонов в первом порядке (49) по r_g/R_S :

$$I = (I_{1\omega}^{(0)} + I_{2\omega}^{(0)}) \left(1 - \frac{4r_g}{3R_S}\right).$$

Как видно, интенсивность генерации дилатонов от вращающегося магнитного дипольного момента с учетом собственного гравитационного поля оказывается меньше по сравнению со значением на фоне плоского пространства-времени. Это можно объяснить тем, что с учетом собственного гравитационного поля и интенсивность электромагнитного излучения меньше [18].

Благодарности

Исследование выполнено в рамках научной программы Национального центра физики и математики, направление № 5 «Физика частиц и космология»

Приложение 1: Решение уравнений поля через взятие интеграла в виде запаздывающего потенциала

Рассмотрим уравнение следующего вида за пределами нейтронной звезды радиуса R_S :

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \psi(r, \theta, \phi, t) = C \rho(kr) Y(\theta, \phi) e^{-i(\omega t - kr)}, \quad (51)$$

где C — некоторая постоянная.

Решение этого уравнения можно найти в виде запаздывающего потенциала:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{C}{4\pi} e^{-i\omega t} \int d^3r' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} e^{ikr'} \rho(kr') Y(\theta', \phi'). \quad (52)$$

Для вычисления интеграла воспользуемся теоремой Гегенбауэра [22], согласно которой функцию $e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ можно разложить в бесконечный ряд по полиномам Лежандра от косинуса угла γ между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$:

$$\begin{aligned} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} &= \frac{\pi i}{2\sqrt{rr'}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) J_{n+1/2}(kr') H_{n+1/2}^{(1)}(kr) P_n(\cos\gamma), \quad r > r', \\ \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} &= \frac{\pi i}{2\sqrt{rr'}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) J_{n+1/2}(kr) H_{n+1/2}^{(1)}(kr') P_n(\cos\gamma), \quad r < r', \end{aligned} \quad (53)$$

где $\cos \gamma = \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') + \cos \theta \cos \theta'$, $H_{n+1/2}^{(1)}(x)$ — функция Ганкеля 1-го рода, а $J_{n+1/2}(x)$ — функция Бесселя.

Подставляя (53) в (52), получим:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{iC}{8\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (\eta_n(kr) H_{n+1/2}^{(1)}(kr) + g_n(kr) J_{n+1/2}(kr)) Y_n(\theta, \phi), \quad (54)$$

где введены обозначения:

$$\eta_n(kr) = k^{-\frac{5}{2}} \int_{kR_S}^{kr} dz z^{\frac{3}{2}} \rho(z) e^{iz} J_{n+1/2}(z), \quad g_n(kr) = k^{-\frac{5}{2}} \int_{kr}^{\infty} dz z^{\frac{3}{2}} \rho(z) e^{iz} H_{n+1/2}^{(1)}(z), \quad (55)$$

$$Y_n(\theta, \phi) = \int_0^{\pi} \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' Y(\theta', \phi') P_n(\cos \gamma). \quad (56)$$

В выражении (55) была произведена замена переменной $z = kr'$. Интегрирование по углам θ' и ϕ' полинов Лежандра (55) подробно рассмотрено в работе [23].

Воспользуемся связью функций Бесселя J_ν и функций Ганкеля:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2} (H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)).$$

Выражение (54) удобно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta, \phi, t) = & -\frac{iC}{16\sqrt{r}} e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (\sigma_n(kR_S) H_{n+1/2}^{(1)}(kr) + \\ & + G_{(2)n}(kr) H_{n+1/2}^{(1)}(kr) - G_{(1)n}(kr) H_{n+1/2}^{(2)}(kr)) Y_n(\theta, \phi), \end{aligned} \quad (57)$$

где введены следующие обозначения:

$$G_{(1)n}(z) = k^{-\frac{5}{2}} \int dz z^{\frac{3}{2}} \rho(z) e^{iz} H_{n+1/2}^{(1)}(z), \quad G_{(2)n}(z) = k^{-\frac{5}{2}} \int dz z^{\frac{3}{2}} \rho(z) e^{iz} H_{n+1/2}^{(2)}(z), \quad (58)$$

$$\sigma_n(z) = -G_{(1)n}(z) - G_{(2)n}(z). \quad (59)$$

Приложение 2: Решение уравнения для электромагнитного поля через интеграл запаздывающего потенциала

Для временно-зависимой части вектор-потенциала $\mathbf{A}_t^{(1)}$ в первом порядке (31) имеем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}_t^{(1)}(r, \theta, \phi, t) = & -\frac{r_g m \sin \alpha}{r^2} \left[2ik^3 - \frac{3k^2}{r} - \frac{ik}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right] \times \\ & \times (\cos \theta (-i\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) + i \sin \theta e^{i\phi} \mathbf{e}_z) e^{-i(\omega t - kr)}. \end{aligned} \quad (60)$$

Это уравнение (60) можно представить в виде:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A^{(1)\alpha}(r, \theta, \phi, t) = C \rho(kr) Y^\alpha(\theta, \phi) e^{-i(\omega t - kr)}, \quad (61)$$

где

$$C = -r_g k^5 m \sin \alpha, \quad \rho(z) = \frac{1}{z^2} \left[2i - \frac{3}{z} - \frac{i}{z^2} + \frac{1}{z^3} \right],$$

а вектор-функция $Y^\alpha(\theta, \phi)$ определена следующим образом:

$$\begin{aligned} Y^1(\theta, \phi) &= -i \cos \theta = -i N^3(\theta, \phi), & Y^2(\theta, \phi) &= \cos \theta = N^3(\theta, \phi), \\ Y^3(\theta, \phi) &= i \sin \theta e^{i\phi} = i (N^1(\theta, \phi) + i N^2(\theta, \phi)). \end{aligned}$$

Вектор $\mathbf{N}$ имеет следующие координаты: $N^\alpha = \frac{x^\alpha}{r} = \{\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta\}$.

Далее воспользуемся схемой решения через интеграл запаздывающего потенциала, описанной в приложении 1. Первоначально возьмем интеграл по углам θ', ϕ' (56). Для этого воспользуемся следующим интегралом [23]:

$$\int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' P_n(\cos \gamma) N^\alpha(\theta', \phi') = \frac{4\pi}{3} N^\alpha(\theta, \phi) \delta_{1n}. \quad (62)$$

Таким образом, из суммы по n в выражении (57) останутся только слагаемые с $n = 1$.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(1)} = & -\frac{i\pi k^5 r_g m \sin \alpha}{4\sqrt{r}} e^{-i\omega t} (\cos \theta (-i\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) + i \sin \theta e^{i\phi} \mathbf{e}_z) \times \\ & \times \left[\sigma_1(kR_S) H_{3/2}^{(1)}(kr) + G_{(2)1}(kr) H_{3/2}^{(1)}(kr) + G_{(1)1}(kr) H_{3/2}^{(2)}(kr) \right], \quad (63) \end{aligned}$$

где $G_{(1)1}(z)$ и $G_{(2)1}(z)$ вычислены по формуле (58) и равны:

$$\begin{aligned} G_{(1)1}(z) &= i\sqrt{\frac{2}{\pi}} k^{-5/2} \times \left[\left(\frac{1}{4z^4} - \frac{i}{2z^3} - \frac{3}{2z^2} + \frac{2i}{z} \right) e^{2iz} + 2\text{Ei}(2iz) \right], \\ G_{(2)1}(z) &= i\sqrt{\frac{2}{\pi}} k^{-5/2} \left[-2\ln(z) + \frac{i}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{4z^4} \right], \end{aligned} \quad (64)$$

а σ_1 по аналогии с (59) определена выражением:

$$\sigma_1(z) = -G_{(1)1}(z) - G_{(2)1}(z). \quad (65)$$

Подставляя выражения (64) и выражения для функций Ганкеля в (60), в итоге получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(1)}(r, \theta, \phi, t) = & \frac{ir_g m \sin \alpha}{2r} \times (\cos \theta (-i\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) + i \sin \theta e^{i\phi} \mathbf{e}_z) e^{-i\omega t} \times \\ & \times \left[-k(2\ln(kr) + \mathcal{A}) \times \left(\frac{1}{r} - ik \right) e^{ikr} + \frac{i}{r} \left(ik + \frac{1}{2r} \right) e^{ikr} + 2k \left(\frac{1}{r} + ik \right) \text{Ei}(2ikr) e^{-ikr} \right], \quad (66) \end{aligned}$$

где введено следующее обозначение:

$$\mathcal{A} = i\sqrt{\frac{\pi}{2}} k^{\frac{5}{2}} \sigma_1(kR_S).$$

Приложение 3: Решение уравнение дилатонного поля для спектра 1ω

Уравнение дилатонного поля $\Psi_{1\omega}^{(1)}$ в первом порядке (43) в сферических координатах имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi_{1\omega}^{(1)}(r, \theta, \phi) = & \chi r_g m^2 \sin 2\alpha e^{-i(\omega t - kr)} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi} \left[-\frac{4}{r^7} + \frac{ik}{r^6} \left(3\mathcal{A} + \frac{17}{2} \right) + \right. \\ & + \frac{3k^2}{r^5} \mathcal{A} + \frac{ik^3}{r^4} (\mathcal{A} + 3i\Phi_1 - 1) + \frac{3ik^4\Phi_1}{r^3} + \frac{k^5\Phi_1}{r^2} + \left(\frac{6ik}{r^6} + \frac{6k^2}{r^5} + \frac{2ik^3}{r^4} \right) \ln(kr) - \\ & \left. - \left(\frac{6ik}{r^6} - \frac{6k^2}{r^5} + \frac{2ik^3}{r^4} \right) \text{Ei}(2ikr) e^{-2ikr} \right]. \quad (67) \end{aligned}$$

Приведем это уравнение к виду (51). В данном случае:

$$C = \chi r_g m^2 k^7 \sin 2\alpha,$$

$$\begin{aligned} \rho(z) = & -\frac{4}{z^7} + \frac{i}{z^6} \left(3\mathcal{A} + \frac{17}{2} \right) + \frac{3\mathcal{A}}{z^5} + \frac{i}{z^4} (\mathcal{A} + 3i\Phi_1 - 1) + \frac{3i\Phi_1}{z^3} + \frac{\Phi_1}{z^2} \\ & + \left(\frac{6i}{z^6} + \frac{6}{z^5} + \frac{2i}{z^4} \right) \ln(z) - \left(\frac{6i}{z^6} - \frac{6}{z^5} + \frac{2i}{z^4} \right) \text{Ei}(2iz) e^{-2iz}, \end{aligned}$$

$$Y(\theta, \phi) = \sin \theta \cos \theta e^{i\phi} = (N^1 + iN^2)N^3.$$

Для взятия интеграла по углам θ' , ϕ' (56), воспользуемся следующей формулой [23]:

$$\int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' N^\alpha N^\beta P_n(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{3} \left\{ \delta^{\alpha\beta} \delta_{0n} + \frac{1}{5} \delta_{2n} [3N^\alpha N^\beta - \delta^{\alpha\beta}] \right\}. \quad (68)$$

С учётом этого:

$$Y_n(\theta, \phi) = \frac{4\pi}{5} \delta_{2n} \sin(\theta) \cos \theta e^{i\phi}. \quad (69)$$

Тогда точное решение уравнения (67) согласно формуле (57) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \Psi_{1\omega}^{(1)}(r, \theta, \phi, t) = & -\frac{i\pi\chi r_g m^2 k^7 \sin 2\alpha}{4\sqrt{r}} e^{-i\omega t} \times \\ & \times \left[\sigma_{1\omega}(kR_S) H_{5/2}^{(1)}(kr) + p_{1\omega}^{(1)}(kr) H_{5/2}^{(1)}(kr) - g_{1\omega}^{(1)}(kr) H_{5/2}^{(2)}(kr) \right] \sin(\theta) \cos \theta e^{i\phi}, \quad (70) \end{aligned}$$

где $p_{1\omega}^{(1)}(z) = G_{(2)2}(z)$, а $g_{1\omega}^{(1)}(z) = G_{(1)2}(z)$, а функции $G_{(1)2}(z)$ и $G_{(2)2}(z)$ вычислены по формулам (58) и равны:

$$\begin{aligned} G_{(1)2}(z) = & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi k^5}} \frac{1}{z^7} e^{2iz} \left(\text{Ei}(2iz) e^{-2iz} \left[(i\Phi_1 - \frac{43}{35}) z^7 - z^5 - 4iz^4 + \frac{9}{2} z^3 + 3z \right] + \right. \\ & + \ln(z) \left[iz^4 + \frac{3}{2} z^3 + 6iz^2 - 3z \right] - \frac{43}{70} iz^6 + \left(3i\Phi_1 - \frac{43}{140} \right) z^5 + \left(\frac{1}{2} \mathcal{A} + \frac{9}{2} i\Phi_1 - \frac{97}{140} \right) iz^4 + \\ & \left. + \left(\frac{3}{4} \mathcal{A} - \frac{9}{4} i\Phi_1 + \frac{549}{280} \right) z^3 + \left(\frac{169}{35} + 3\mathcal{A} \right) iz^2 - \left(\frac{159}{28} + \frac{3}{2} \mathcal{A} \right) z - \frac{12}{7} i \right), \\ G_{(2)2}(z) = & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi k^5}} \frac{1}{z^7} \left(\text{Ei}(2iz) e^{-2iz} \left[-iz^4 + \frac{3}{2} z^3 - 6iz^2 - 3z \right] + \ln(z) \left[-i\Phi_1 z^7 - z^5 + 4iz^4 + \frac{9}{2} z^3 + 3z \right] + \right. \\ & \left. + \left(\frac{3}{2} i\Phi_1 - \frac{1}{2} \mathcal{A} \right) z^5 + 2i\mathcal{A} z^4 + \left(\frac{9}{4} \mathcal{A} + \frac{9}{4} i\Phi_1 - \frac{11}{8} \right) z^3 + \frac{31}{10} iz^2 + \left(\frac{3}{2} \mathcal{A} + \frac{9}{4} \right) z + \frac{12}{7} i \right), \end{aligned}$$

а функция $\sigma_{1\omega}(z)$ по аналогии с (59) определена следующим образом:

$$\sigma_{1\omega}(z) = -G_{(1)2}(z) - G_{(2)2}(z). \quad (71)$$

Приложение 4: Решение уравнения дилатонного поля для спектра 2ω

Уравнение дилатонного поля $\Psi_{2\omega}^{(1)}$ в первом порядке (43) в сферических координатах имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi_{2\omega}^{(1)} = & \chi r_g m^2 \sin^2 \alpha e^{-2i(\omega t - kr)} \sin^2 \theta e^{2i\phi} \left\{ -\frac{2}{r^7} + \frac{ik}{r^6} \left(3a + \frac{17}{2} \right) + \frac{k^2}{r^5} (6a + 3) + \right. \\ & + \frac{ik^3}{r^4} (-2a + 3i\Phi_2 + 3) + \frac{k^4}{r^3} (6i\Phi_2 - 2) + 4\Phi_2 \frac{k^5}{r^2} + \left(\frac{6ik}{r^6} + \frac{12k^2}{r^5} - \frac{4ik^3}{r^4} \right) \ln(kr) + \\ & \left. + \left[-\frac{6ik}{r^6} - \frac{8ik^3}{r^4} + \frac{4ik^5}{r^2} \right] \text{Ei}(2ikr) e^{-2ikr} \right\}. \quad (72) \end{aligned}$$

Приведем это уравнение к виду (51):

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi_{2\omega}^{(1)}(r, \theta, \phi, t) = C\rho(k'r) Y(\theta, \phi) e^{-i(\omega' t - k'r)}, \quad (73)$$

где $\omega' = 2\omega$, а $k' = \omega'/c = 2k$. В данном случае:

$$C = \chi r_g m^2 k'^7 \sin^2 \alpha,$$

$$Y(\theta, \phi) = \sin^2 \theta e^{2i\phi} = [N^1(\theta, \phi) + iN^2(\theta, \phi)]^2,$$

$$\begin{aligned} \rho(z) = & -\frac{2}{z^7} + \frac{i}{2z^6} \left(3\mathcal{A} + \frac{17}{2} \right) + \frac{1}{4z^5} (6\mathcal{A} + 3) + \frac{i}{8z^4} (-2\mathcal{A} + 3i\Phi_2 + 3) + \frac{1}{8z^3} (3i\Phi_2 - 1) + \\ & + \Phi_2 \frac{1}{8z^2} + \left(\frac{3i}{z^6} + \frac{3}{z^5} - \frac{i}{2z^4} \right) \ln \left(\frac{z}{2} \right) + \left[-\frac{3i}{z^6} - \frac{i}{z^4} + \frac{i}{8z^2} \right] \text{Ei}(iz) e^{-iz}. \end{aligned}$$

Чтобы взять интеграл по углам θ', ϕ' (56), воспользуемся формулой (68) и получим:

$$Y_n(\theta, \phi) = \frac{4\pi}{5} Y(\theta, \phi) = \frac{4\pi}{5} \sin^2 \theta e^{2i\phi}. \quad (74)$$

Согласно (57), точное решение уравнения (72) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \Psi_{2\omega}^{(1)}(r, \theta, \phi, t) = & -\frac{32i\pi\chi r_g m^2 k^7 \sin^2 \alpha}{\sqrt{r}} e^{-2i\omega t} \times \\ & \times \left[\sigma_{2\omega}(2kR_S) H_{5/2}^{(1)}(2kr) + p_{2\omega}^{(1)}(2kr) H_{5/2}^{(1)}(2kr) - g_{2\omega}^{(1)}(2kr) H_{5/2}^{(2)}(2kr) \right] \sin^2 \theta e^{2i\phi}, \quad (75) \end{aligned}$$

где $p_{2\omega}^{(1)}(z) = G_{(2)2}(z)$, $g_{2\omega}^{(1)}(z) = G_{(1)2}(z)$, а функции $G_{(1)2}(z)$ и $G_{(2)2}(z)$ вычислены по формуле (58) и равны:

$$\begin{aligned} G_{(1)2} = & \frac{1}{32\sqrt{\pi k^5} z^7} e^{2iz} \left(\text{Ei}(2iz) e^{-2iz} z^7 \left(i\Phi_2 - \frac{46}{35} \right) + \text{Ei}(iz) e^{-iz} (iz^6 - 2z^5 - 7iz^4 + 3z^3 - 12iz^2 + 12z) + \right. \\ & + \ln(z/2)(-2iz^4 + 15z^3 + 24iz^2 - 12z) - \frac{23}{35} iz^6 + z^5 \left(3i\Phi_2 - \frac{93}{70} \right) + iz^4 \left(\frac{23}{70} - \mathcal{A} + \frac{9}{2} i\Phi_2 \right) + \\ & \left. + z^3 \left(\frac{15}{2} \mathcal{A} - \frac{9}{4} i\Phi_2 + \frac{699}{140} \right) + iz^2 \left(\frac{718}{35} + 12\mathcal{A} \right) - z \left(\frac{159}{7} + 6\mathcal{A} \right) - \frac{48}{7} i \right), \quad (76) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{(2)2} = & \frac{1}{32\sqrt{\pi k^5} z^7} \left(\text{Ei}(iz) e^{-iz} (iz^6 + 2z^5 - 7iz^4 - 3z^3 - 12iz^2 - 12z) - \right. \\ & - \ln(z) i\Phi_2 z^7 + \ln(z/2)(2z^5 + 4iz^4 + 9z^3 + 12z) + z^5 (\mathcal{A} + \frac{3}{2} i\Phi_2 - 1) + \\ & \left. + iz^4 (2\mathcal{A} + 5) + z^3 \left(\frac{9}{4} i\Phi_2 + \frac{9}{2} \mathcal{A} - \frac{1}{4} \right) + \frac{56}{5} iz^2 + z(6\mathcal{A} + 9) + \frac{48}{7} i \right). \quad (77) \end{aligned}$$

Функция $\sigma_{2\omega}(z)$ по аналогии с (59) определена следующим образом:

$$\sigma_{2\omega}(z) = -G_{(1)2}(z) - G_{(2)2}(z). \quad (78)$$

В выражениях (75), (76), (77) учтено, что в уравнении (73): $w' = 2\omega$, $k' = 2k$.

Приложение 5: Поле дилатона в волновой зоне

Получим асимптотическое выражение для $\Psi_{1\omega}$ и $\Psi_{2\omega}$ (44) при $kr \gg 1$. Для этого сначала запишем асимптотики функций Ганкеля $H_{5/2}^{(1)}$:

$$\frac{1}{\sqrt{r}} H_{5/2}^{(1)}(kr) \sim i \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \frac{e^{ikr}}{r}, \quad \frac{1}{\sqrt{r}} H_{5/2}^{(1)}(2kr) \sim i \sqrt{\frac{1}{\pi k}} \frac{e^{2ikr}}{r}.$$

Асимптотики для функций Ганкеля 2 рода можно получить, произведя операцию комплексного сопряжения: $H_{5/2}^{(2)}(z) = (H_{5/2}^{(1)}(z))^*$. Учтем, что функция $\text{Ei}(iz)$ имеет следующую асимптотику при больших значениях аргумента $z \gg 1$:

$$\text{Ei}(2ikr) \sim \frac{e^{2ikr}}{r}.$$

В случае $kr \gg 1$ функции $g_{1\omega}^{(1)}(kr)$ и $g_{2\omega}^{(1)}(2kr)$ стремятся к 0, а функции $p_{1\omega}^{(1)}(kr)$ и $p_{2\omega}^{(1)}(2kr)$ имеют следующие асимптотические члены:

$$p_{1\omega}^{(1)}(kr) = -i\Phi_1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi k^5}} \ln(kr), \quad p_{2\omega}^{(1)}(2kr) = -i\Phi_2 \frac{1}{32\sqrt{\pi k^5}} \ln(2kr).$$

В нулевом порядке малости все функции $p_{1\omega}^{(0)}(kr)$, $g_{1\omega}^{(0)}(kr)$, $p_{2\omega}^{(0)}(2kr)$ и $g_{2\omega}^{(0)}(2kr)$ стремятся к 0 при $kr \rightarrow \infty$.

В случае $kR_S \ll 1$ оставим главные асимптотические члены функций $\sigma_{1\omega}(kR_S)$ и $\sigma_{2\omega}(2kR_S)$. Из выражений (45) следует, что при $kR_S \ll 1$:

$$\begin{aligned} \sigma_{1\omega}(kR_S) &= -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi k^5}} \left(\frac{8}{15k^2 R_S^2} + \frac{4i}{5kR_S} \ln(kR_S) + \frac{23i}{15kR_S} \right), \\ \sigma_{2\omega}(2kR_S) &= -\frac{1}{4\sqrt{\pi k^5}} \left(\frac{1}{15k^2 R_S^2} + \frac{i}{5kR_S} \ln(2kR_S) + \frac{41i}{120kR_S} \right). \end{aligned}$$

Приведем также асимптотики для Φ_1 и Φ_2 , определенные выражением (22), при $kR_S \ll 1$:

$$\Phi_1(kR_S) = -\frac{4}{5kR_S}, \quad \Phi_2(2kR_S) = -\frac{8}{5kR_S}.$$

Таким образом, при $kr \gg 1$ дилатонное поле $\Psi^{(1)}$ в первом порядке по r_g/r (44) примет вид:

$$\begin{aligned} \Psi_{1\omega}^{(1)} &= -\frac{2\chi r_g m^2 k^4 \sin 2\alpha}{5r} e^{-i(\omega t - kr - \phi)} \left(\frac{2}{3k^2 R_S^2} + \frac{i}{kR_S} \ln\left(\frac{R_S}{r}\right) + \frac{23i}{12kR_S} \right) \sin \theta \cos \theta, \\ \Psi_{2\omega}^{(1)} &= -\frac{4\chi r_g m^2 k^4 \sin^2 \alpha}{5r} e^{-2(i\omega t - kr - \phi)} \left(\frac{2}{3k^2 R_S^2} + \frac{2i}{kR_S} \ln\left(\frac{R_S}{r}\right) + \frac{41i}{12kR_S} \right) \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

-
- | | |
|---|--|
| <p>[1] Overduin J.M., Wesson P.S. // Physics reports. 283, N 5-6. 303 (1997).</p> <p>[2] Gibbons G.W., Maeda K. // Nuclear Physics B. 298, N 4. 741 (1988).</p> <p>[3] Youm D. // Physics Reports. 316, N 1-3. 1 (1999).</p> <p>[4] Chacko Z., Mishra R.K. // Physical Review D. 87, N 11. 115006 (2013).</p> <p>[5] Burgess C.P. // Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 57. 329 (2007).</p> <p>[6] Minazzoli O., Santos E. // The European Physical Journal C. 81. 1 (2021).</p> <p>[7] Gibbons G.W., Wells C.G. // Classical and Quantum Gravity. 11, N 10. 2499 (1994).</p> <p>[8] Кечкин О.В., Мошарев П.А. О // Ученые записки физического факультета Московского университета. № 6. 1960102 (2019).</p> <p>[9] Bruggisser S. et al. // Journal of High Energy Physics. 5 1 (2023).</p> <p>[10] Banerjee D. et al. // Physical review letters 125, N 8 081801 (2020).</p> <p>[11] CAST Collaboration. // Nat. Phys. 13. 584 (2017).</p> <p>[12] Denisova I.P. // Gravitation and Cosmology. 27. 392 (2021).</p> | <p>[13] Denisov V.I., Denisova I.P., Einiev E.T. // The European Physical Journal C. 82, N 4. 311 (2022).</p> <p>[14] Denisov V.I., Garmayev B.D., Denisova I.P. // Physical Review D. 104, N 5. 055018 (2021).</p> <p>[15] Denisov V.I. et al. // Gravitation and Cosmology 30, N 2. 160 (2024).</p> <p>[16] Manchester R.N. et al. // The Astronomical Journal 129, N 4. 1993 (2005).</p> <p>[17] Olausen S.A., Kaspi V.M. // The Astrophysical Journal Supplement Series. 212, N 1. 6 (2014).</p> <p>[18] Cohen J.M., Kearney M.W. // Astrophysics and Space Science. 70. 295 (1980).</p> <p>[19] Landau L.D., Lifshitz E.M. The classical theory of fields. Course of theoretical physics. V. 2 (1975).</p> <p>[20] Capano C.D. et al. // Nature Astronomy. 4, N 6. 625 (2020).</p> <p>[21] Horvath J.E., Valentim R. The Masses of Neutron Stars. In: Alsabti A., Murdin P. (eds) Handbook of Supernovae. Springer, Cham, 2017.</p> <p>[22] Watson G.N. A treatise on the theory of Bessel functions. The University Press, 1922. 3.</p> <p>[23] Vshivtseva P.A., Denisov V.I., Denisova I.P. // Theoretical and Mathematical Physics. 166. 186 (2011).</p> |
|---|--|

Dilaton generation by electromagnetic field of rotating magnetic dipole momentum of neutron star in it's own gravitational field

M. O. Astashenkov^{1,2,a}, V. I. Denisov^{1,2}, I. P. Denisova^{3,4}

¹*Department of Quantum theory and High energy Physics, Faculty of Physics Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia*

²*Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia*

³*Bauman Moscow State Technical University. Moscow, 105005, Russia*

⁴*The State University of Management. Moscow, 109542, Russia*

E-mail: ^amixa.astash@yandex.ru

According to dilaton-Maxwell theory, dilatons can be generated by electromagnetic fields with a nonzero electromagnetic field invariant $F_{mn}F^{mn}$, where F_{mn} is the tensor of the electromagnetic field. The paper considers the generation of dilatons in the electromagnetic field of a rotating magnetic dipole moment of a neutron star, taking into account its own gravitational field. Solutions of dilaton field equations were obtained in the weak gravitational field approximation. Based on them, the intensity of dilaton generation was obtained in the approximation $r_g/R_S \ll 1$, where r_g is the Schwarzschild radius and R_S is the radius of the neutron star. It is shown that the intensity of dilaton generation from the rotating magnetic dipole moment of a neutron star is lower in the first order of magnitude than in the case of a flat space-time.

PACS: 14.80.-j

Keywords: dilaton, Dilaton-Maxwell theory, neutron star.

Received 11 June 2025.

Сведения об авторах

1. Асташенков Михаил Олегович — e-mail: mixa.astash@yandex.ru.
2. Денисов Виктор Иванович — доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой; тел. (495) 939-16-47, e-mail: vid.msu@yandex.ru.
3. Денисова Ирина Павловна — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: pm.mati813@gmail.com.