

Амплитудно-фазовые характеристики изображений фрактальных структур

П.В. Короленко^{1,2,a,*}, Р.Т. Кубанов^{1,b,†}, А.Ю. Мишин¹

¹Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
физический факультет, кафедра оптики, спектроскопии и физики наносистем
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр.2

²Физический институт имени П.Н.Лебедева РАН, отделение оптики
Россия, 119991, Москва, Ленинский проспект, д. 53

(Поступила в редакцию 09.12.2024; подписана в печать 14.04.2025)

На основе численного моделирования выполнена оценка скейлинга (масштабной инвариантности) пространственных спектров амплитудных и фазовых изображений фрактальных структур в оптической системе общего вида. Актуальность исследования обусловлена ключевой ролью пространственных спектров излучения в процессах восприятия и обработки оптической информации. Особое внимание уделено свойствам стохастических световых структур, получивших широкое использование в арт-терапии и офтальмологии. Для их построения использовались свойства двумерной функции Манделброта–Вейерштрасса, а также свойства стохастической модели конструктивных фракталов. Несмотря на неупорядоченный (спекловый) характер распределения поля в сгенерированных структурах, их пространственные спектры имели фрактальную форму с четко выраженным скейлингом. После прохождения через оптическую систему изначального распределения поля контрастность спектра снижалась, но форма распределения низкочастотных компонент обладала определенной устойчивостью. Этим свойством обладали как амплитудные, так и фазовые изображения. С ростом фрактальной размерности излучения область устойчивого расположения спектральных компонент расширялась, а с уширением функции рассеяния оптической системы резко уменьшалась. Были сопоставлены характеристики скейлинга в изображениях, формируемых в когерентном и некогерентном свете. Их сравнение показало, что из-за более широкой передаточной функции оптической системы искажения пространственных спектров в некогерентном свете оказываются менее значительными. Выполненное исследование указывает на перспективность использования фрактальных спекловых распределений в медицине при проведении сеансов светотерапии.

PACS: 42.25.-p

УДК: 535.8

Ключевые слова: фракталы, скейлинг, пространственные спектры, оптические изображения, светотерапия.

ВВЕДЕНИЕ

Фрактальные световые структуры приобрели в настоящее время разнообразное применение. В частности, они широко используются в таких областях медицины как арт-терапия и офтальмология [1–4], диагностика онкологических патологий [5]. Очень часто при проведении оптической фрактальной диагностики возникает необходимость в передаче фрактальных световых структур от плоскости, в которой находится изначальное распределение поля, в плоскость, где фиксируется распределение интенсивности. Такая передача осуществляется либо непосредственно зрительным аппаратом человека, либо с помощью специальной оптической системы. В любом случае в изображении световой структуры могут возникнуть те или иные искажения, с которыми придется считаться. Особенно нежелательными являются те искажения, которые приводят к трансформации пространственного спектра излучения, играющего ключевую роль в процессах восприятия и обработки оптической информации [6]. Величина и вид возникающих в изображении пучка изменений в значительной степени зависят от характера его структурирования. Сейчас наиболее хорошо изучены свойства фрактальных распределений, построенных с использованием свойств дей-

ствительной функции Вейерштрасса [7]. Возможности использования ее аналога — комплексной функции Манделброта–Вейерштрасса [8] — изучены слабее. Между тем моделирование процесса распространения фрактального излучения на основе этой функции обладает одной важной особенностью, так как включает описание изменения не только амплитудных, но и фазовых характеристик. Такое совместное изменение амплитудной и фазовой составляющей пучка имеет место, например, когда когерентное излучение проходит через тонкий срез биоткани [5]. Целью данной работы является оценка скейлинга (масштабной инвариантности) пространственных спектров амплитудных и фазовых изображений фрактальных структур в оптической системе общего вида. Особое внимание уделено спекловым световым структурам, получившим широкое использование в офтальмологии.

1. МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Для построения фрактальных световых структур воспользуемся свойствами двумерной фрактальной функции Манделброта–Вейерштрасса, имеющей вид [8, 9]:

$$E_{x,y} = \sigma \sum_{v=0}^V \sum_{n=-N}^N \frac{1 - e^{i \cdot b^n \cdot s \left[\left(x - \frac{K}{2}\right) \cos(\alpha \cdot v) + \left(y - \frac{K}{2}\right) \sin(\alpha \cdot v) \right]}}{b^{(2-D) \cdot n}} \cdot e^{i \cdot (\Psi_n + \Psi_v)}. \quad (1)$$

Здесь E — комплексная амплитуда световых колебаний, σ — нормировочный множитель, N — количество гармоник, $i = \sqrt{-1}$, V — количество азимутальных составляющих, n — номер гармоники, v — индекс азимутальной составляющей волны, α — элементарный азимутальный угол поворота образующей функции, b — параметр скейлинга, s — масштабирующий параметр, Ψ_n , Ψ_v — фазы компонент поля, D — фрактальная размерность образующей функции Вейерштрасса. Дискретные поперечные координаты x , y меняются в диапазоне $0 \leq x, y \leq K - 1$.

Систему, с помощью которой строится изображение фрактальной световой структуры, представим в виде оптического процессора, преобразующего по определенному закону структуру входного волнового пучка. Этот закон будет определяться переходной функцией системы, определяющей распределение поля по поперечным координатам x , y в выходной плоскости, если во входной плоскости находится точечный источник света. Для планарной системы, не содержащей нелинейных элементов, спектр $F(p, q)$, характеризующий распределение пространственных частот p и q изображения в направлении поперечных координатных осей x и y , равен произведению спектра $f(p, q)$ светового поля на входе в систему, умноженному на передаточную функцию $H(p, q)$ (фурье-образ переходной функции) [10]:

$$F(p, q) = f(p, q) \cdot H(p, q). \quad (2)$$

Это соотношение используется в дальнейшем при оценке связи между скейлинговыми характеристиками начальной световой структуры и ее изображения.

2. АМПЛИТУДНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

На рис. 1, *a* приведен один из вариантов начальной стохастической спекловой структуры, рассчитанной с помощью формулы (1). На рис. 1, *б* показана ее трансформация на выходе системы. Использовался следующий набор параметров: $K = 128$, $\sigma = 3.3$, $N = 5$, $V = 8$, $\alpha = 2\pi/8$, $b = 2$, $s = 0.07$, $D = 1.35$; фазы Ψ_n , Ψ_v считались случайными. На рис. 1, *б, г* показана полученная путем усреднения по реализациям форма пространственного спектра распределения амплитуды на входе и выходе.

На рис. 1 *a, в* — соответственно начальное $A_1(x, y)$ и конечное $A_2(x, y)$ распределения амплитуды поля,

b , g — соответствующие усредненные по реализациям пространственные спектры.

Расчеты пространственных спектров $f_{p,q}$ осуществлялись с помощью процедуры быстрого преобразования Фурье $f = \text{cfft}(A)$. Спектр представлен в виде зависимости $f_{p,q}$ от частоты p при фиксированной частоте q . Было установлено, что распределение спектральных компонент обладает четко выраженным скейлингом, поскольку сдвиг частотных компонент от центральной частоты последовательно увеличивается в два раза в соответствии с величиной коэффициента скейлинга b . Функция рассеяния системы задавалась гауссовым распределением

$$g_{x,y} = e^{-\frac{\left(x - \frac{K}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{K}{2}\right)^2}{w^2}}. \quad (3)$$

Характеризующий ширину распределения (3) параметр w принимался равным 3. При таком задании переходной функции распределение поля в изображении $A_2(x, y)$ заметно отличалось от первоначальной зависимости $A_1(x, y)$. Оценка коэффициента корреляции между этими полями дает значение $\text{corr}(A_1, A_2) = 0.71 \pm 0.02$. Однако несмотря на такое снижение качества изображения, его пространственный спектр в низкочастотной области, как видно из рис. 1, *б, г*, не претерпел сколь-нибудь существенной трансформации. В частности практически сохранилось соотношение между величинами помеченных на рисунках пиков 1 и 2. Гораздо более значительные изменения происходят в высокочастотной спектральной области, выражающиеся в сильном подавлении частотных компонент; но этот эффект, как правило, не оказывает негативного влияния на общее восприятие фрактальной структуры.

Проявление скейлинга в пространственных спектрах стохастических распределений зависит от фрактальной размерности световых пучков и ширины переходной функции оптической системы. Это иллюстрируют кривые на рис. 2, которые построены путем усреднения по реализациям, зависящим от фазовых соотношений компонент поля. Они соответствуют функциям рассеяния со значениями $w = 2$ и $w = 4$. Ход кривых показывает, что показателя контрастности r увеличивается с ростом D и заметным образом снижается при увеличении w .

В процессе моделирования были сопоставлены характеристики скейлинга в изображениях, формируемых в когерентном и некогерентном свете. Для некогерентного света функция рассеяния должна быть изменена. Ее вид должен соответствовать выражению $P_{x,y} = |g_{x,y}|^2$ [10]. Такое изменение функции рассеяния вызывает уширение передаточной функции опти-

* pvkorolenko@rambler.ru

† tytyfytgfg@gmail.com

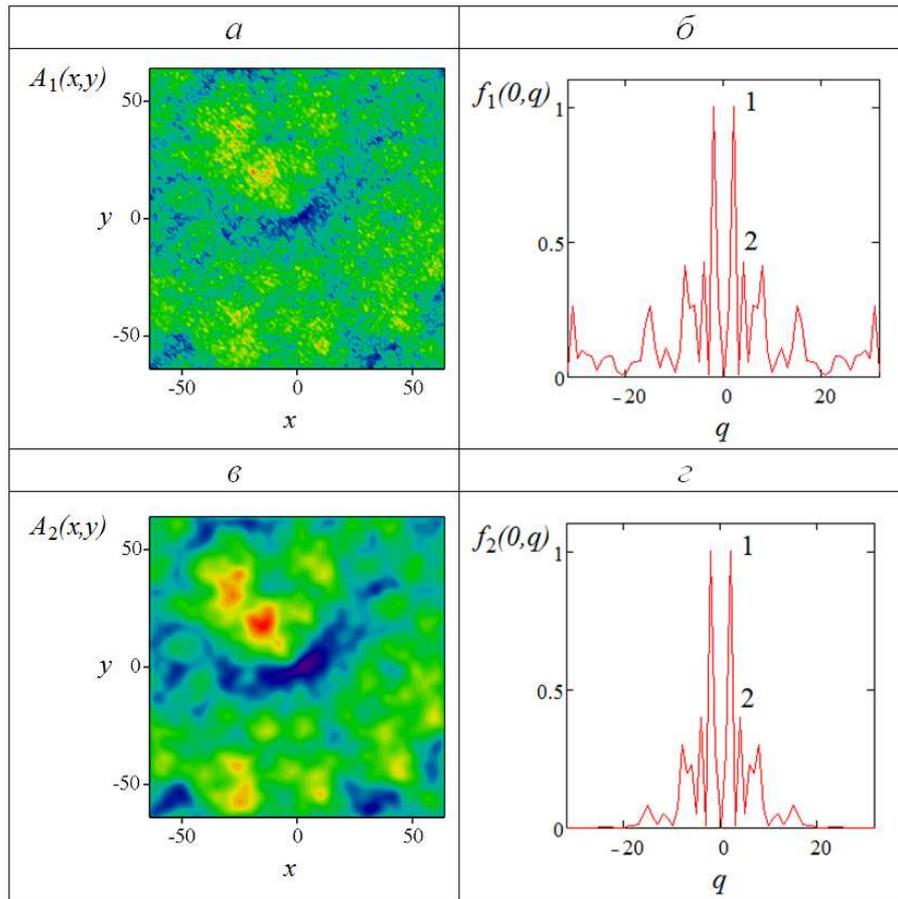


Рис. 1. Построение изображения стохастической структуры

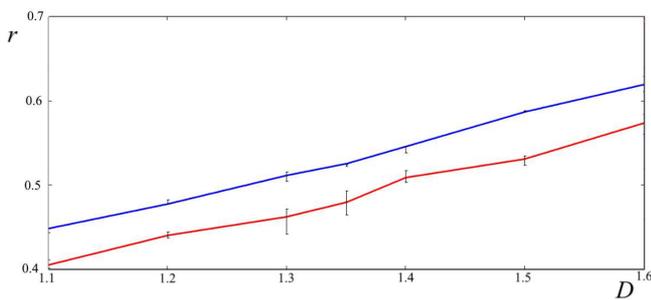


Рис. 2. Зависимость контрастности пространственных спектров от фрактальной размерности и ширины функции рассеяния. $w = 2$ — синяя кривая, $w = 4$ — красная кривая

ческой системы, из-за которого искажения пространственных спектров в некогерентном свете оказываются менее значительными.

3. ФАЗОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФРАКТАЛЬНЫХ СТРУКТУР

Было изучено также проявление скейлинга при фазовом представлении когерентного спеклового поля. Распределение фазы $\Phi_{x,y}$ на входе в оптическую си-

стему задавалось с помощью функции (1) посредством выражения $\Phi_{x,y} = \arg(V_{x,y})$ при неизменности задаваемых ранее параметров. Рассчитанное распределение фазы $\Phi_{x,y}$ показано на рис. 3, а. Оно, если судить по форме поперечных фрагментов и цветовой палитре, существенно отличается от распределения амплитуды (рис. 1, а). Но даже при этих отличиях форма пространственного спектра фазового распределения (рис. 3, б) и ее трансформация оказались аналогичными соответствующим спектральным характеристикам распределения амплитуды. При использовании фазовых представлений следует учитывать, что степень соответствия распределений на входе и выходе оптической системы снижается. В рассматриваемом случае коэффициент корреляции между этими распределениями стал равным 0.59 ± 0.02 .

4. ПЕРЕХОД К КОНСТРУКТИВНОМУ ФРАКТАЛУ

Для того, чтобы выяснить, насколько общий характер носят те результаты, которые были получены с использованием функций Вейерштрасса и Мандельброта–Вейерштрасса был рассмотрен дополнительный тестовый пример со структурой констук-

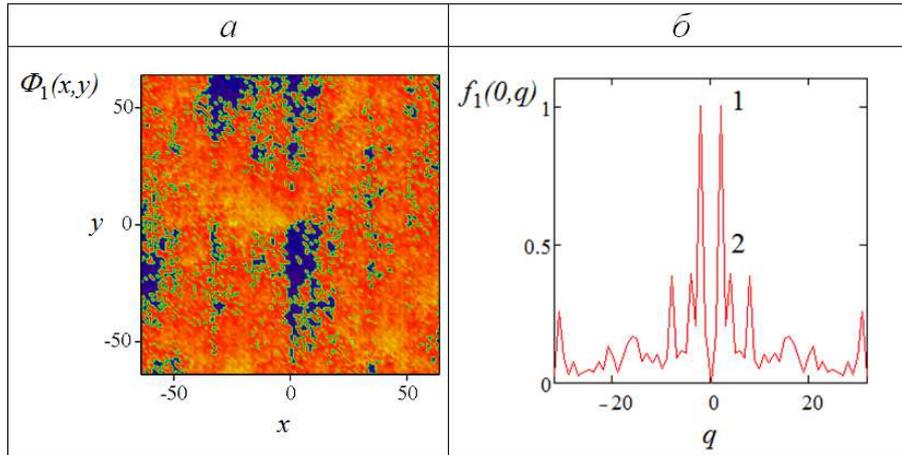


Рис. 3. Построение фазового изображения стохастической структуры. *a, б* — Соответственно начальная структура фазы и её Фурье-спектр

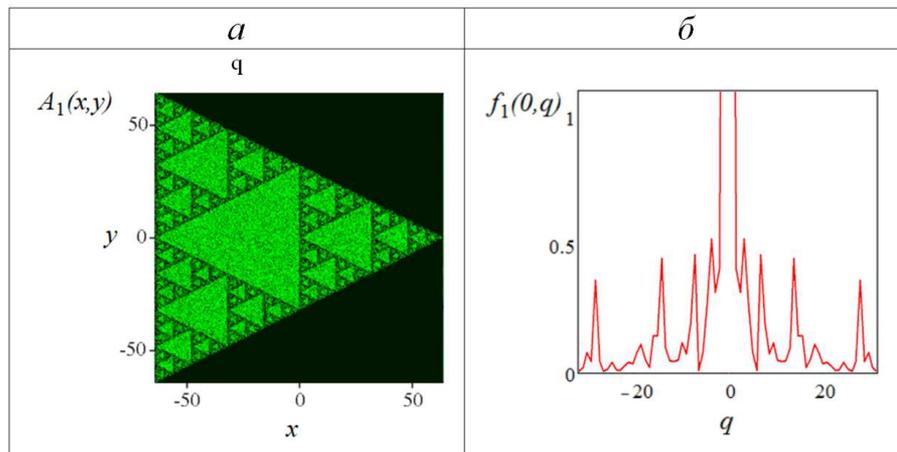


Рис. 4. Стохастическая модификация треугольника Серпинского с распределением поля $A_1(x,y)$ (*a*) и ее пространственный спектр $f_1(0,q)$ (*б*)

тивного фрактала, построенного с помощью стохастической итерационной модели так называемого треугольника Серпинского [11]. На рис.4, *a* показана модификация треугольника Серпинского, в которой положение на рабочем поле 60% образующих значащих точек определяется случайным законом. Ее пространственный спектр (рис.4, *б*), несмотря на высокий уровень стохастизации изначальной структуры, обладает четко выраженным скейлингом с коэффициентом равным 2. Именно такой коэффициент скейлинга будет у треугольника Серпинского, не подвергнувшегося процедуре стохастизации [11]. Спектр изображения пучка в оптической системе в низкочастотной области характеризовался незначительными изменениями. Дополнительные расчеты показали, что скейлинг пространственных спектров характерен и для ряда других типов конструктивных фракталов. Таким образом, приведенный дополнительный пример указывает

на то, что устойчивым скейлингом пространственного спектра могут обладать фрактальные структуры, существенно различающиеся своей геометрией и принципом построения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ оптических изображений фрактальных структур, построенных с использованием зависимости Мандельброта–Вейерштрасса и стохастической итерационной модели фракталов показал, что им свойственен скейлинг пространственных спектров как при амплитудном, так и при фазовом представлении. Наиболее устойчивым является проявление скейлинга в низкочастотной области спектра, что указывает на перспективность использования этих фрактальных распределений в медицине при проведении сеансов светотерапии.

- [1] Пьянкова С.Д. // Псих. Исс. **12**, № 63. 12 (2019).
[2] Матросова Ю.В., Фабрикантов О.Л. // Офтальмология. **15**, № 2S. 52 (2018).
[3] Fabrikantov O.L., Matrosova Yu.V., Shutova S.V. // Vestn. Volgograd. Gos. Med. Univ. N 4. 62 (2018).
[4] Ćielil A.B., Pahnvar A.J. Engin, M. et al. // Univ. J. Sci. **16**, N 1. 47 (2020).
[5] Ульянов А.С. // Кв. эл-ка. **38**, № 6. 557 (2008).
[6] Шелепин Ю.Е. Введение в нейроиконику. СПб.: Троицкий мост, 2017.
[7] Зотов А.М., Короленко П.В., Мишин А.Ю., Рыжикова Ю.В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. № 6. 52 (2019).
[8] Короленко П.В., Кубанов Р.Т., Мишин А.Ю. // Изв. РАН. Сер. физ. **85**, № 1. 68 (2021).
[9] Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002.
[10] Короленко П.В. Когерентная оптика. М.: Юрайт, 2020.
[11] Короленко П.В., Маганова М.С., Меснянкин А.В. Новационные методы анализа стохастических процессов и структур в оптике. М.: Юрайт, 2004.

Amplitude-phase characteristics of images of fractal structures

P.V. Korolenko^{1,2,a}, R.T. Kubanov^{1,b}, A.Yu. Mishin¹

¹Department of Optics, Spectroscopy and Physics of Nanosystems, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia

²P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences
Moscow 119991, Russia

E-mail: ^apvkorolenko@rambler.ru, ^bytytyfgtgf@gmail.com

Based on numerical modeling, the scaling (scale invariance) of spatial spectra of amplitude and phase images of fractal structures in a general optical system was estimated. The relevance of the study is due to the key role of spatial radiation spectra in the processes of optical information perception and processing. Particular attention is paid to the properties of stochastic light structures, which are widely used in art therapy and ophthalmology. For their construction, the properties of the two-dimensional Mandelbrot-Weierstrass function, as well as the properties of the stochastic model of constructive fractals, were used. Despite the disordered (speckle-like) nature of the field distribution in the generated structures, their spatial spectra had a fractal shape with clearly expressed scaling. After passing through the optical system of the initial field distribution, the spectrum contrast decreased, but the shape of the distribution of low-frequency components had a certain stability. Both amplitude and phase images had this property. With the growth of the fractal dimension of radiation, the region of stable arrangement of spectral components expanded, and with the broadening of the scattering function of the optical system, it sharply decreased. The scaling characteristics in images formed in coherent and incoherent light were compared. Their comparison showed that due to the wider transfer function of the optical system, distortions of spatial spectra in incoherent light are less significant. The study indicates the prospects of using fractal speckle distributions in medicine during light therapy sessions.

PACS: 42.25.-p

Keywords: fractals, scaling, spatial spectra, optical images, light therapy.

Received 09 December 2024.

Сведения об авторах

1. Короленко Павел Васильевич — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: pvkorolenko@rambler.ru.
2. Кубанов Рустам Татарханович — инженер; тел.: (495) 939-17-17, e-mail: ytytyfgtgf@gmail.com.
3. Мишин Алексей Юрьевич — инженер; тел.: (495) 939-17-17, e-mail: physic_tx@list.ru.