

Тормозное гравитационное излучение при электромагнитном взаимодействии

Ю. В. Грац,^{*} П. А. Спирин[†]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра теоретической физики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
(Поступила в редакцию 14.03.2025; подписана в печать 20.03.2025)

Рассматривается классическое тормозное гравитационное излучение, возникающее при столкновении двух ультрарелятивистских зарядов, характеризуемое лоренц-фактором γ и прицельным параметром b . В рамках теории возмущения вычисляется полная излученная энергия, а также спектрально-угловые и поляризационные характеристики. Показано, что для излучения характерен биминг в конус с углом раствора порядка $1/\gamma$, при этом основной вклад в излучение вносят частоты порядка γ^2/b .

PACS: 11.27.+d, 98.80.Cq, 98.80.-k, 95.30.Sf

УДК: 53.02

Ключевые слова: гравитационная волна, тормозное излучение, биминг, нелокальная амплитуда.

ВВЕДЕНИЕ

Успехи гравитационно-волновой астрономии последних лет позволяют по-новому подойти и к старым теоретическим проблемам, практическая реализация которых в те годы считалась абсолютно недостижимой. Одними из таковых являются задачи гравитационного излучения, возникающего от электродинамических систем, и в частности, классическое тормозное гравитационное излучение. Поскольку электромагнитное излучение во много раз интенсивнее гравитационного за счет значений констант связи, задача гравитационного излучения носила сугубо теоретический характер.

Тормозное излучение от взаимодействия зарядов рассматривалось Петерсом [1, 2]. Далее в серии работ Гальцова, Граца и Матюхина [3–5] предпочтение отдавалось импульсному пространству как позволяющему вычислить поляризацию излучения. Тогда поток излучения представляет собой квадрат модуля амплитуды, усредненный по фазовому пространству.

Существенной особенностью амплитуды излучения в этой задаче является ее нелокальность. Технически вычисление производится с помощью фейнмановой параметризации. Это обстоятельство делает похожей нашу задачу на задачу обратную: тормозного излучения электромагнитных волн при гравитационном взаимодействии. Такие задачи также рассматривались вышеперечисленными авторами [1, 2, 6–9]. Сравнительно недавно методы вычисления амплитуд классического излучения полей были продолжены на многомерные модели, и в частности ADD [10–14]. Для нелокальных амплитуд с фейнмановым параметром в области характерных частот и углов (биминг) в [12–15] строилась последовательная теория, позволяющая получать амплитуду излучения методами теории возмущения.

В настоящей работе мы хотим уточнить и дополнить известные результаты более детальным изучением ха-

рактеристик гравитационного излучения. Целью работы является:

- проверка и применение метода оценки импульсных фейнмановых интегралов, предложенного в [13] для гравитационного взаимодействия, для взаимодействия электромагнитного;
- построение спектрально-угловых и поляризационных характеристик;
- подтверждение результатов [1] для полной излученной энергии.

Используются единицы $\hbar = c = 1$ и сигнатура метрики пространства-времени $+- --$. Для заряда используется система единиц Хевисайда–Лоренца.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для нашей задачи рассмотрим действие следующего вида:

$$S = - \int d^4x \sqrt{|g|} \left(\frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) - \sum_{\alpha=1}^2 \int \left(m_{\alpha} \sqrt{\dot{z}_{\alpha}^2} + e_{\alpha} A_{\mu} \dot{z}_{\alpha}^{\mu} \right) d\tau_{\alpha}, \quad (1)$$

где G — ньютонова константа гравитационного взаимодействия, $F_{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля, z_{α}^{μ} — мировая линия заряда с номером α .

Варьирование (1) по траекториям приводит к уравнению движения зарядов

$$m D\dot{z}^{\mu} = e F^{\mu\nu} \dot{z}_{\nu}, \quad (2)$$

где D — ковариантная производная по собственному времени, согласованная с метрикой $g_{\mu\nu}$.

^{*} grats@phys.msu.ru

[†] salotop@list.ru

Варьирование действия по A^μ дает уравнение Максвелла на римановом фоне:

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = -j^\mu, \quad j^\mu(x) = e \int \dot{z}^\mu(\tau) \frac{\delta^4(x - z(\tau))}{\sqrt{|g|}} d\tau, \quad (3)$$

а варьирование по метрике $g_{\mu\nu}$ приводит к уравнениям Эйнштейна

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 8\pi G T^{\mu\nu}, \quad (4)$$

где $T^{\mu\nu}$ – полный тензор энергии-импульса, включающий материю

$$T_m^{\mu\nu} = m \int \frac{\dot{z}^\mu \dot{z}^\nu \delta^4(x - z(\tau))}{\sqrt{-g}} d\tau, \quad (5)$$

$$T_{m'}^{\mu\nu} = m' \int \frac{\dot{z}'^\mu \dot{z}'^\nu \delta^4(x - z'(\tau'))}{\sqrt{-g}} d\tau'$$

и электромагнитное поле:

$$T_{em}^{\mu\nu} = F^{\mu\lambda} F_\lambda^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\lambda\rho} F^{\lambda\rho}. \quad (6)$$

Классическое рассмотрение задачи тормозного излучения при рассеянии с прицельным параметром $b > 0$ предполагает дальние пролеты по сравнению с классическим радиусом заряда:

$$b \gg r_{cl} = e^2/m.$$

Гравитационное излучение традиционно рассматривается как волновое возмущение фоновой метрики Минковского, поэтому введем гравитационные возмущения

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \quad \psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\lambda\rho} h_{\lambda\rho},$$

где $\kappa = \sqrt{16\pi G}$.

Таким образом, задача состоит в вычислении гравитационного поля, создаваемого взаимодействующей системой двух зарядов, и в вычислении соответствующего потока гравитационного излучения.

2. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Будем использовать метод итераций, формально представляя все величины как сумму соответствующих порядков,

$$\phi = {}^0\phi + {}^1\phi + {}^2\phi + \dots, \quad (7)$$

где ϕ может быть полями ($g_{\mu\nu}$, A^μ), источниками ($T^{\mu\nu}$, j^μ), координатами зарядов (z^μ), а также их производными. Законность разложения означает, что начиная с какого-то порядка каждая последующая итерация много меньше предыдущей по модулю.

Фактически, мы рассматриваем комбинированную теорию возмущений: по электромагнитному и гравитационному полям. Слабость первого описывается малостью r_{cl}/b , а слабость второго — малостью r_E/b , где $r_E = 2GE$ – энергия зарядов. Поскольку $r_{cl} \gg r_E$, то эффективным параметром теории возмущений будет r_{cl}/b . Иными словами, мы считаем r_E/b меньше любой степени r_{cl}/b .

Нулевой порядок. В нулевом порядке предполагаем пустое плоское пространство и отсутствие полей: ${}^0g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, ${}^0h_{\mu\nu} = 0$, ${}^0A^\mu = 0$. Тогда оба заряда движутся равномерно ${}^0\dot{z}^\mu = {}^0\dot{z}'^\mu = 0$ с постоянными скоростями ${}^0\dot{z}^\mu \equiv u^\mu$ и ${}^0\dot{z}'^\mu \equiv u'^\mu$. Выберем систему отсчета, связанную с зарядом e' в его невозмущенном состоянии: $u'^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Тогда лоренц-фактор движущейся частицы $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2} \gg 1$ является лоренц-инвариантным параметром столкновения: $\gamma = (uu')$. Направление движения заряда e выберем за ось z , а вектор прицельного параметра b^μ — за ось x . Выберем начало отсчета времени $\tau = 0$ за момент прохождения ${}^0z^\mu - {}^0z'^\mu = b^\mu$; тогда

$$u^\mu = \gamma(1, 0, 0, v), \quad {}^0z^\mu = u^\mu \tau + b^\mu, \quad b^\mu = (0, b, 0, 0). \quad (8)$$

Вектор тока и тензоры энергии-импульса частиц строятся по плоскому фону от равномерно движущихся зарядов:

$$\left\{ \begin{array}{c} {}^0j^\mu(x) \\ {}^0T_m^{\mu\nu} \\ {}^0T_{em}^{\mu\nu} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} eu^\mu \\ mu^\mu u^\nu \\ 0 \end{array} \right\} \int \delta^4(x - {}^0z(\tau)) d\tau \quad (9)$$

Наконец, в каждом порядке наложим на электромагнитное поле лоренцеву $({}^{(k)}A^\mu{}_{,\mu} = 0)$ калибровку, а на гравитационное поле — калибровку Фока – де Донде $({}^{(k)}\psi^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0)$ относительно плоской метрики.

Первый порядок. Токи нулевого порядка (9) являются источниками полей ($A^\mu, \psi_{\mu\nu}$) первого порядка: соответствующие источники распадаются на сумму по двум частицам, а полевые уравнения являются уравнениями д'Аламбера; их решения для полей приведем в импульсном представлении

$${}^1A^\mu(q) = -\frac{2\pi e}{q^2} e^{iqb} \delta(qu) u^\mu, \quad (10)$$

$${}^1\psi_{\mu\nu}(q) = -\frac{2\pi \kappa m}{q^2} e^{iqb} \delta(qu) \left(u_\mu u_\nu - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \right),$$

которое понадобится для практических вычислений. Поля $A'^\mu, \psi'_{\mu\nu}$, создаваемые второй частицей, получаются заменой $u \rightarrow u'$, $e^{i(kb)} \rightarrow 1$.

Для последовательного применения итераций мы должны проигнорировать самодействие зарядов и считать, что каждая частица движется в поле, рожденном частицей-партнером: для движения в электромагнитном поле тогда имеем

$${}^1\dot{z}_{em}^\mu = \frac{e}{m} F^{\mu\nu} \dot{z}_\nu, \quad {}^1\dot{z}'_{em}{}^\mu = \frac{e'}{m'} F^{\mu\nu} \dot{z}'_\nu. \quad (11)$$

Двойное интегрирование с начальными условиями ${}^1z_{\text{em}}^\mu(0) = 0$, ${}^1\dot{z}_{\text{em}}^\mu(0) = 0$ дает решение

$${}^1z_{\text{em}}^\mu(\tau) = -i \frac{e'e}{m} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4q \frac{1}{q^2(qu)^2} e^{-iqb} \times \\ \times \left(e^{-i(qu)\tau} - 1 + i(qu)\tau \right) \delta(qu') \left[\gamma q^\mu - (qu)u'^\mu \right]. \quad (12)$$

Соответствующий угол рассеяния равен

$$\alpha = \text{arctg} \frac{e'e}{2\pi m \gamma v^2 b} \ll 1. \quad (13)$$

Поля первого порядка, созданные равномерно движущимися зарядами, не могут приводить к излучению волн. Поэтому обратимся ко второму порядку, где нас будет интересовать только гравитационное решение.

$${}^1T_{\text{m}}^{\mu\nu} \equiv T^{\mu\nu}(x) = m \int \left(2 {}^1\dot{z}^{(\mu} u^{\nu)} - u^\mu u^\nu ({}^1z \cdot \nabla) \right) \delta^4(x - u\tau - b) d\tau, \\ {}^1T_{\text{m}'}^{\mu\nu} \equiv T'^{\mu\nu}(x) = m' \int \left(2 {}^1\dot{z}'^{(\mu} u'^{\nu)} - u'^\mu u'^\nu ({}^1z' \cdot \nabla) \right) \delta^4(x - u'\tau' - b) d\tau', \\ {}^1T_{\text{em}}^{\mu\nu} \equiv \sigma^{\mu\nu}(x) = {}^1F^{\mu\lambda} {}^1F_{\lambda}{}^\nu + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} {}^1F_{\lambda\rho} {}^1F^{\lambda\rho}. \quad (15)$$

Здесь мы пренебрегли гравитационным взаимодействием зарядов как намного более слабым, чем электромагнитное. Это выражается как в пренебрежении влиянием ньютоновых сил на динамику зарядов ${}^1z^\mu$, так и в пренебрежении влиянием ньютоновых полей первого порядка на метрику.

Источники T и T' мы будем называть локальными, поскольку их носитель сосредоточен на мировых линиях зарядов, а источник σ , содержащий произведение полей F и F' будет называться нелокальным, соответственно.

Сохранение калибровки. Сохранению калибровки для излученной гравитационной волны $\psi_{\mu\nu}$ соответствует сохранение ее источника: $j^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$. Проверим это утверждение в нашей схеме, учитывая, что траектория заряда определяется полем, создаваемым зарядом-партнером.

Начнем с локальных источников $T^{\mu\nu}$ и $T'^{\mu\nu}$.

$$\partial_\nu \sigma^{\mu\nu} = {}^1F^{\mu\lambda, \nu} {}^1F'_{\lambda\nu} - {}^1F^{\mu\lambda} {}^1F'^{\nu}{}_{\lambda, \nu} + \frac{1}{2} {}^1F^{\lambda\rho, \mu} {}^1F'_{\lambda\rho} + \{F \longleftrightarrow F'\} = \frac{1}{2} ({}^1F^{\mu\lambda, \rho} + {}^1F^{\rho\mu, \lambda} {}^1F^{\lambda\rho, \mu}) {}^1F'_{\lambda\rho} - \\ - {}^1F^{\mu\lambda} {}^1F'^{\nu}{}_{\lambda, \nu} + \{F \longleftrightarrow F'\} = -{}^1F^{\mu\nu} {}^0j'_\nu - {}^1F'^{\mu\nu} {}^0j_\nu, \quad (16)$$

поскольку и 1F , и ${}^1F'$ удовлетворяют тождествам Бъянки независимо. Таким образом,

$$\partial_\nu j^{\mu\nu}(x) = 0.$$

Второй порядок. Изменение гравитационного поля $h_{\mu\nu}$ (и гравитационное излучение, соответственно) возникает во втором порядке теории возмущения. Поэтому для его источника нам достаточно брать электромагнитное поле первого порядка. Тогда вводя стандартным образом $\psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - (h/2)\eta_{\mu\nu}$ и налагая калибровку Фока-де Донде $\psi^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$, в приближении слабого поля уравнения Эйнштейна вырождаются в соответствующее уравнение д'Аламбера

$$\square {}^2\psi^{\mu\nu} = -j^{\mu\nu}(x), \\ j^{\mu\nu}(x) \equiv {}^1T_{\text{m}}^{\mu\nu}(x) + {}^1T_{\text{m}'}^{\mu\nu}(x) + {}^1T_{\text{em}}^{\mu\nu}(x), \quad (14)$$

с источниками, являющимися первыми поправками по r_{cl}/b к соответствующим общим выражениям для тензоров-энергии-импульса (5,6). Далее для краткости проведем переобозначения:

Поскольку

$$\partial_\nu \int (u^\mu {}^1\dot{z}^\nu - u^\mu u^\nu ({}^1z \cdot \nabla)) \delta^4(x - u\tau - b) d\tau = \\ = u^\mu \int d[({}^1z \cdot \nabla) \delta^4(x - u\tau - b)] = 0$$

как полная производная, то

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = m \int {}^1\dot{z}^\mu \delta^4(x - u\tau - b) d\tau, \\ \partial_\nu T'^{\mu\nu}(x) = m' \int {}^1\dot{z}'^\mu \delta^4(x - u'\tau' - b) d\tau'$$

Подставляя ускорения из уравнений движения, получим:

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = e \int {}^1F'^{\mu\nu} u_\nu \delta^4(x - u\tau - b) d\tau = {}^1F'^{\mu\nu} {}^0j_\nu, \\ \partial_\nu T'^{\mu\nu} = {}^1F^{\mu\nu} {}^0j'_\nu.$$

Вычисляя дивергенцию нелокального источника и опуская самодействие (слагаемые FF и $F'F'$), получим

Гравитационное излучение. Выраженная через ньютонову константу гравитационного взаимодействия, плотность гравитационного излучения в единицу фазового объема дается известным выражением [18]

$$\frac{dE_{\text{gr}}}{d\omega d\Omega} = \frac{G}{2\pi^2} \omega^2 \sum_a |j_{\mu\nu}(k) \varepsilon_{(a)}^{\mu\nu}| \quad (17)$$

(ω — частота гравитона) в виде суммы по двум поляризациям.

Два вектора поляризации $g_{1,2}^\mu$ и волновой вектор k^μ взаимно ортогональны. Удобно выбрать векторы поляризации в ковариантном виде, т.е. построенными по векторам нашей задачи:

$$g_1^\mu = N^{-1} \left[(ku) u'^\mu - (ku') u^\mu + \left(uu' - \frac{ku}{ku'} \right) k^\mu \right],$$

$$g_2^\mu = N^{-1} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} u_\nu u'_\lambda k_\rho, \quad (18)$$

где $N^2 = -[(ku')u - (ku)u']^2$ — нормировочная константа.

В системе отсчета, связанной со вторым зарядом, введем углы: полярный θ отсчитывается от направления $\mathbf{u}$ (положительное направление оси z), а азимутальный φ откладывается в плоскости xy от направления $\mathbf{b}$. Тогда $N = \gamma v \sin \vartheta (ku')$, и среди скалярных произведений векторов поляризации с векторами задачи ненулевыми являются только следующие три:

$$(g_1 b) = -b \cos \theta \cos \varphi, \quad (g_1 u) = \gamma v \sin \theta, \quad (19)$$

$$(g_2 b) = -b \sin \varphi.$$

Из векторов поляризации строим два поляризационных тензора стандартным образом:

$$\varepsilon_+^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} [g_1^\mu g_1^\nu - g_2^\mu g_2^\nu], \quad \varepsilon_\times^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} [g_1^\mu g_2^\nu + g_2^\mu g_1^\nu]. \quad (20)$$

Оба тензора поляризации бесследовы, поэтому те вклады в гравитационный источник, что содержат метрику $\eta^{\mu\nu}$ тензорно, могут быть отброшены. Поэтому нелокальный источник эффективно представим в виде

$$\sigma^{\mu\nu}(x) = {}^1F^{\mu\lambda} {}^1F_\lambda{}^\nu + {}^1F'^{\mu\lambda} {}^1F_\lambda{}^\nu. \quad (21)$$

3. АМПЛИТУДЫ ИЗЛУЧЕНИЯ

Наша задача — вычислить источник $j^{\mu\nu}$, задаваемый (14), в импульсном представлении.

Локальная амплитуда. Преобразование Фурье локального источника (15) для быстрого заряда равно

$$T^{\mu\nu}(k) = m e^{i(kb)} \int \left[2 {}^1\dot{z}^{(\mu} u^{\nu)} + i(k {}^1z) u^\mu u^\nu \right] e^{i(ku)\tau} d\tau. \quad (22)$$

Возмущение траектории первого порядка при электромагнитном взаимодействии дается выражением (12).

Внеэкспоненциальные слагаемые $(-1 + i(qu)\tau)$, возникающие при учете начальных условий ${}^1\dot{z}^\mu(0) = 0$, ${}^1z^\mu(0) = 0$, соответствуют равномерному движению

и не дадут вклад в излучение, поэтому их можно эффективно отбросить.

Подставляя (12) в (22) и интегрируя по τ , мы получим

$$T^{\mu\nu}(k) = \frac{ee'e^{i(kb)}}{(2\pi)^2} \left[2I u^{(\mu} u^{\nu)} - \frac{2\gamma}{(ku)} I^{(\mu} u^{\nu)} - \frac{(ku')}{(ku)} I u^\mu u^\nu + \frac{\gamma k \cdot I}{(ku)^2} u^\mu u^\nu \right], \quad (23)$$

где интегралы I и I^μ определены как

$$I = \int \frac{\delta(qu') \delta(ku - qu) e^{-i(qb)}}{q^2} d^4q,$$

$$I^\mu = \int \frac{\delta(qu') \delta(ku - qu) e^{-i(qb)}}{q^2} q^\mu d^4q.$$

Их можно вычислить [11] в виде функций Макдональда

$$I = -\frac{2\pi}{\gamma v} K_0(z),$$

$$I^\mu = -\frac{2\pi}{\gamma v b^2} \left(bz K_0(z) \frac{\gamma u'^\mu - u^\mu}{\gamma v} + i \hat{K}_1(z) b^\mu \right) \quad (24)$$

от аргументов

$$z \equiv \frac{(ku)b}{\gamma v}, \quad z' \equiv \frac{(ku')b}{\gamma v},$$

где мы используем экономичное (неофициальное!) обозначение $\hat{K}_\nu(x) \equiv x^\nu K_\nu(x)$, позволяющее легко проводить оценку при малых значениях аргумента в терминах медленно меняющихся на $[0, \mathcal{O}(1)]$ функций.

Подставляя значения (24) в (23), мы получим:

$$T^{\mu\nu}(k) = -\frac{ee'}{2\pi\gamma^2 v^3} e^{i(kb)} \left[\frac{i}{z^2} \hat{K}_1(z) \Sigma^{\mu\nu} + \left(1 + \frac{z'}{\gamma z} \right) K_0(z) u^\mu u^\nu - \frac{2}{\gamma} K_0(z) u^{(\mu} u^{\nu)} \right], \quad (25)$$

где $\Sigma^{\mu\nu} \equiv (kb) u^\mu u^\nu - 2(ku) u^{(\mu} b^{\nu)}$. Вследствие выбора векторов поляризации, последнее слагаемое, содержащее вектор u'^μ , можно опустить.

Локальная амплитуда излучения $T^{\mu\nu}(k)$ содержит функции Макдональда $K_{0,1}(z)$ и, будучи квадрирована и объединена с элементом объема $\omega^2 \sin \theta d\omega d\theta d\varphi$, дает максимальный вклад в излучаемую энергию при частотах порядка $\omega \sim \gamma^2/b$ и углах порядка $\vartheta \sim \gamma^{-1}$, т.е. при значениях аргумента функций Макдональда $z \sim 1$. Такое угловое распределение (биминг в направлении вперед) характерно для классических ультрарелятивистских зарядов, испытывающих ускорение. В этой области фазового пространства мы можем разложить $T^{\mu\nu}(k)$ по степеням $1/\gamma$. Поскольку все три скалярных произведения (19) — порядка $\mathcal{O}(1)$ в области биминга, для проведения оценок мы можем сравнивать просто коэффициенты перед тензорными мономами $u^\mu u^\nu$,

$u^{(\mu}b^{\nu)}$ и $b^{\mu}b^{\nu}$, без непосредственного проектирования тензорного источника на тензоры поляризации. Соответствующие оценки скалярных произведений: $z' \sim \gamma$, $(ku)b \sim \gamma$, $(ku')b \sim \gamma^2$, $(kb) \sim \gamma$, все макдональды порядка единицы.

Это дает: первое слагаемое в выражении (25) для $T^{\mu\nu}(k)$ имеет порядок $\mathcal{O}(\gamma)$, второе слагаемое — $\mathcal{O}(1)$, а третье эффективно зануляется. Таким образом, в главном слагаемом

$$T^{\mu\nu}(k) = -\frac{ee'}{2\pi\gamma} e^{i(kb)} iK_1(z) \left[\frac{(kb)}{\gamma z} u^{\mu}u^{\nu} - \frac{2v}{b} u^{(\mu}b^{\nu)} \right]. \quad (26)$$

Соответствующая амплитуда $T'^{\mu\nu}(k)$ получается из $T^{\mu\nu}(k)$ заменой $u \longleftrightarrow u'$, $e^{i(kb)} \longrightarrow 1$. Поскольку все тензорные мономы будут содержать вектор u'^{μ} , при проектировании на поляризации $T'^{\mu\nu}(k)$ занулятся целиком.

Нелокальная (полевая) амплитуда. Преобразование Фурье (21) задается выражением

$$\sigma^{\mu\nu}(k) = \frac{2ee' e^{i(kb)}}{(2\pi)^2} \int \frac{\delta(pu') \delta(ku - pu) e^{-i(pb)}}{p^2 (k - p)^2} \left[(qu)q^{(\mu}u'^{\nu)} - (qu)k^{(\mu}u'^{\nu)} + \right. \\ \left. + \gamma k^{(\mu}q^{\nu)} - (q^2 - kq)u^{(\mu}u'^{\nu)} - \gamma q^{\mu}q^{\nu} - (ku' - qu')q^{(\mu}u'^{\nu)} \right] d^4q.$$

Учитывая аргументы двух дельта-функций и эффективно отбрасывая все слагаемые со свободными индексами у векторов k и u' , получаем

$$\sigma^{\mu\nu}(k) = -\frac{2ee' e^{i(kb)}}{(2\pi)^2} \left[\gamma J^{\mu\nu} + (ku')J^{(\mu}u'^{\nu)} \right], \quad (27)$$

где введены интегралы

$$J^{\mu}(k) \equiv \int \frac{\delta(qu') \delta(ku - qu) e^{-i(qb)}}{q^2 (k - q)^2} q^{\mu} d^4q, \\ J^{\mu\nu}(k) \equiv \int \frac{\delta(qu') \delta(ku - qu) e^{-i(qb)}}{q^2 (k - q)^2} q^{\mu} q^{\nu} d^4q. \quad (28)$$

В таком виде они были проанализированы в [12, 13] в фейнмановой параметризации. Их можно преобразовать к виду фейнмановых интегралов от функций Макдональда сложного аргумента:

$$J^{\mu} = \frac{\pi}{\gamma v} \int_0^1 dx e^{-i(kb)x} \left[b^2 N^{\mu} \hat{K}_{-1}(\zeta) + ib^{\mu} K_0(\zeta) \right] \\ J^{\mu\nu} = \frac{\pi}{\gamma v} \int_0^1 dx e^{-i(kb)x} \left[b^2 N^{\mu} N^{\nu} \hat{K}_{-1}(\zeta) + \right. \\ \left. + \left(2iN^{(\mu}b^{\nu)} - \frac{u^{\mu}u^{\nu}}{v^2\gamma^2} \right) K_0(\zeta) - \frac{b^{\mu}b^{\nu}}{b^2} \hat{K}_1(\zeta) \right]$$

(плюс $\eta^{\mu\nu}$ -пропорциональное слагаемое, опущенное вследствие поляризаций), где

$$\zeta^2(x) = z'^2 x^2 + 2\gamma z z' x(1 - x) + z^2(1 - x)^2, \\ N^{\mu} = -\frac{(1 - x)(ku) + x\gamma(ku')}{\gamma^2 v^2} u^{\mu}.$$

Таким образом, возникает семейство производных скалярных интегралов

$$J_{(\sigma,\tau)} \equiv \int_0^1 x^{\sigma} e^{-i(kb)x} \hat{K}_{\tau}(\zeta) dx, \quad \sigma \geq 0, \tau \geq -1 \quad (29)$$

с целыми σ и τ .

В [13] доказывалось, что в области биминга определяющий вклад в эти интегралы вносит сегмент переменной интегрирования $x \in [0, \mathcal{O}(\gamma^{-2})]$, а значение τ не влияет на оценку всего интеграла по степеням $1/\gamma$. Отсюда следует, что каждая степень x в подынтегральном выражении снижает оценку интеграла в γ^2 раз:

$$J_{(\sigma+1,\tau)} = \frac{\mathcal{O}(1)}{\gamma^2} J_{(\sigma,0)}.$$

На основании этого можно сразу сделать оценку $N^{\mu} \sim \gamma^{-1}$, поэтому в (27) доминирует второе слагаемое, а в самом J^{μ} — слагаемое с $K_0(\zeta)$:

$$\sigma^{\mu\nu}(k) = -\frac{iee' e^{i(kb)}}{2\pi\gamma v} (ku')b^{(\mu}u'^{\nu)} \int_0^1 dx e^{-i(kb)x} K_0(\zeta). \quad (30)$$

Согласно [13], требуемый интеграл $J_{(0,0)}$ глобально представим в виде суммы двух рядов

$$J_{(0,0)} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \hat{K}_n(z) + e^{-i(kb)} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha'_n \hat{K}_n(z'),$$

поэтому в биминговой области все $\hat{K}_n(z') \sim \exp(-\gamma)$ экспоненциально подавлены, а коэффициенты α_n убывают с ростом индекса. В результате, основной по γ вклад дает первое слагаемое:

$$J_{(0,0)} = \frac{1}{\gamma z z'} \hat{K}_1(z) + \mathcal{O}(\gamma^{-3}).$$

Подстановка в (30) дает окончательное выражение

$$\sigma^{\mu\nu}(k) = -\frac{iee' e^{i(kb)}}{2\pi\gamma b} K_1(z) b^{(\mu}u'^{\nu)}. \quad (31)$$

в области биминга.

Полная эффективная амплитуда. Складывая (31) с (26) для полной тензорной амплитуды излучения в биминговой области, мы получаем выражение

$$j^{\mu\nu}(k) = -\frac{ee'}{2\pi\gamma} e^{i(kb)} iK_1(z) \left[\frac{(kb)}{\gamma z} u^\mu u^\nu - \frac{v}{b} u^{(\mu} b^{\nu)} \right]. \quad (32)$$

Таким образом, локальная и нелокальная амплитуды интерферируют так, что оценка полной амплитуды относительно степени лоренц-фактора не меняется. Такое взаимодействие разумно назвать неструктивной интерференцией.

Проектируя на тензоры поляризаций, получим поля-

$$\frac{d}{d\omega d\theta d\varphi} \left\{ \frac{E_+}{E_\times} \right\} = \frac{(ee')^2 G}{2^4 \pi^4} \frac{\sin^3 \theta}{\gamma^2 \psi^2} K_1^2 \left(\frac{\omega b \psi}{v} \right) \omega^2 \left\{ \frac{(\gamma^2 \psi^2 - \sin^2 \theta) \cos^2 \varphi}{\gamma^2 \psi^2 \sin^2 \varphi} \right\}, \quad (34)$$

где использовано тождество $2\psi = \gamma^{-2} + \sin^2 \theta + \mathcal{O}(\gamma^{-4})$, справедливое при $\theta \lesssim \mathcal{O}(1/\gamma)$.

Интегрируя по азимутальному углу, получим частотно-угловое распределение

$$\frac{d}{d\omega d\theta} \left\{ \frac{E_+}{E_\times} \right\} = \frac{(ee')^2 G}{2^4 \pi^3} \frac{\sin^3 \theta}{\gamma^2 \psi^2} K_1^2 \left(\frac{\omega b \psi}{v} \right) \omega^2 \left\{ \frac{\gamma^2 \psi^2 - \sin^2 \theta}{2\gamma^2 \psi^2 - \sin^2 \theta} \right\}. \quad (35)$$

Дальнейшее интегрирование по частотам производится с помощью табличного интеграла [19]

$$\int_0^\infty K_\mu(z) K_\nu(z) z^{\alpha-1} dz = \frac{2^{\alpha-3} \Gamma\left(\frac{\alpha+\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+\mu-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha-\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha-\mu-\nu}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \quad (36)$$

($\alpha > \mu + \nu$), а по полярному углу — с помощью интеграла

$$\int_0^\pi \frac{\sin^n \theta d\theta}{(1 - v \cos \theta)^m} = \frac{2^{m-1} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2m-n-1}{2}\right)}{\Gamma(m)} \gamma^{2m-n-1}, \quad 2m > n+1, \quad (37)$$

плюс слагаемые относительно порядка $\mathcal{O}(\gamma^{-2})$. Соотношение $2m > n+1$ как раз соответствует тому, что основной вклад в интеграл собирается с углов $0 < \theta \lesssim \mathcal{O}(\gamma^{-1})$ (биминг). Легко убедиться в том, что после интегрирования (35) по частотам все интегралы по полярному углу принадлежат этому типу. Таким образом, наше исходное предположение о частотно-угловой зависимости в доминирующей области, на основании которого делались оценки амплитуд излучения, подтверждено.

Интегрируя по частотам, получим угловое распределение относительно полярного угла:

$$\frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{E_+}{E_\times} \right\} = \frac{3(ee')^2 G}{2^9 \pi b^3} \frac{\sin^3 \theta}{\gamma^2 \psi^5} \left\{ \frac{\gamma^2 \psi^2 - \sin^2 \theta}{2\gamma^2 \psi^2 - \sin^2 \theta} \right\}. \quad (38)$$

Наконец, интегрируя по θ , получим полную излу-

чационные амплитуды ($j_{(a)} = j_{\mu\nu} \varepsilon_{(a)}^{\mu\nu}$):

$$\left\{ \begin{matrix} j_+ \\ j_\times \end{matrix} \right\} = \frac{ee'}{2^{3/2} \pi} \sin \theta K_1(z) \left\{ \frac{[1/(\gamma^2 \psi) - 1] \cos \varphi}{\sin \varphi} \right\}, \quad (33)$$

где введена $\psi = 1 - v \cos \theta$ и были опущены фазовые множители $e^{i[(kb)+\pi/2]}$, сокращающиеся при последующем квадрировании. При углах θ , соответствующих бимингу, ψ имеет оценку $\psi \sim \sin^2 \theta \sim \gamma^{-2}$.

4. ЭНЕРГИЯ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Результаты будем приводить для парциальных вкладов поляризаций (E_+ и $E_\times$) и для полного гравитационного излучения E_{gr} . Подставляя (33) в (17), получим

ему энергию на одно столкновение:

$$\left\{ \frac{E_+}{E_\times} \right\} = \frac{(ee')^2 G}{2^8 \pi b^3} \gamma^2 \left\{ \frac{1}{3} \right\}. \quad (39)$$

Соответствующее распределение по азимутальному углу равно

$$\frac{d}{d\varphi} \left\{ \frac{E_+}{E_\times} \right\} = \frac{(ee')^2 G}{2^8 \pi^2 b^3} \gamma^2 \left\{ \frac{\cos^2 \varphi}{3 \sin^2 \varphi} \right\}. \quad (40)$$

Спектральные характеристики. Сначала рассмотрим предел нулевой частоты. Учитывая фактор ω^2 в фазовом объеме, в амплитудах удобно искать предел от величины $\omega T^{\mu\nu}(k)$. Тогда для локальной амплитуды

(25) получим

$$[\omega T^{\mu\nu}(k)]_{\omega \rightarrow 0} = \frac{ee'}{2\pi\gamma^2 v b^2} \frac{i}{\psi^2} \left[b \sin \theta \cos \varphi u^\mu u^\nu + 2\gamma\psi u^{(\mu} b^{\nu)} \right]. \quad (41)$$

Нелокальная амплитуда (27) сама имеет конечный предел нулевой частоты, поэтому $[\omega \sigma^{\mu\nu}(k)]_{\omega \rightarrow 0} = 0$. Проектируя (41) на поляризации, квадратируя и интегрируя по углам, получим

$$\frac{dE_{\text{gr}}}{d\omega} \Big|_{\omega=0} = \frac{(ee')^2 G}{\pi^3 b^2} \left(\ln 2\gamma - \frac{11}{12} \right). \quad (42)$$

Таким образом, на низких частотах вклад в частотное распределение происходит со всей области углов, а не только с конуса основного биминга. На области частот $0 \leq \omega \lesssim b^{-1}$ частотное распределение практически не зависит от частоты и задается значением предела нулевой частоты.

В области частот $1/b \lesssim \omega \lesssim \gamma^2/b$ по-прежнему локальная амплитуда $T^{\mu\nu}$ доминирует над полевой $\sigma^{\mu\nu}$, поэтому можно использовать (26) в качестве полной амплитуды. Проектируя на поляризации, квадратируя и интегрируя по φ , получим

$$\frac{d}{d\omega d\theta} \left\{ \frac{E_+}{E_\times} \right\} = \frac{(ee')^2 G}{2^4 \pi^3} K_1^2 \left(\frac{\omega b \psi}{v} \right) \omega^2 \times \sin^3 \theta \left\{ \frac{(\gamma^2 \psi)^{-2}}{4 + (\gamma^2 \psi)^{-2}} \right\}. \quad (43)$$

При последующем интегрировании по θ сделаем замену переменной $\theta \rightarrow z$:

$$\frac{dE_{\text{gr}}}{d\omega} = \frac{(ee')^2 G}{2^4 \pi^3} \frac{\omega^2}{w} \times \int_{w(1-v)}^{w(1+v)} dz K_1^2(z) \left(\frac{2z}{w} - \gamma^{-2} \right) \left(4 + \frac{w^2}{z^2 \gamma^4} \right),$$

где $w = \omega b/v$. Тогда наименее быстро спадающим на интервале слагаемым будет содержащее максимальную степень z в подынтегральном выражении:

$$\frac{dE_{\text{gr}}}{d\omega} \simeq \frac{(ee')^2 G}{2\pi^3} \frac{\omega^2}{w^2} \int_{w(1-v)}^{w(1+v)} dz z K_1^2(z).$$

Это слагаемое происходит от $\times$ -поляризации. Таким образом, на частотах $\omega \lesssim \gamma^2/b$ гравитационное излучение $\times$ -поляризовано. Первообразная известна [19]; вклад от верхнего предела экспоненциально подавлен, тогда

$$\frac{dE_{\text{gr}}}{d\omega} \simeq \frac{(ee')^2 G}{4\pi^3 b^2} \left[K_0(z_{\min}) \hat{K}_2(z_{\min}) - \hat{K}_1^2(z_{\min}) \right], \quad z_{\min} = \omega b(1/v - 1).$$

Разлагая по степеням γ , получаем малый аргумент всех функций Макдональда, разлагая которые получаем с принятой точностью:

$$\frac{dE_{\text{gr}}}{d\omega} \simeq \frac{(ee')^2 G}{2\pi^3 b^2} \ln \frac{4\gamma^2}{\omega b}, \quad (44)$$

и на указанном интервале частотное распределение спадает логарифмически.

Наконец, на частотах, больших характерной частоты γ^2/b , частотно-угловое распределение задается выражением (35). Замена переменной интегрирования на z дает теперь

$$\frac{dE_{\text{gr}}}{d\omega} = \frac{(ee')^2 G}{2^4 \pi^3} \frac{\omega^2}{w} \int_{w(1-v)}^{\infty} dz K_1^2(z) \times \left(\frac{2z}{w} - \frac{1}{\gamma^2} \right) \left(2 - \frac{2w}{z\gamma^2} + \frac{w^2}{2z^2\gamma^4} \right),$$

где верхний предел $w(1+v)$ можно с экспоненциальной точностью заменить на ∞ . Опять, выделяя наименее сильно спадающее слагаемое, получим

$$\frac{dE_{\text{gr}}}{d\omega} \simeq \frac{(ee')^2 G}{8\pi^3 b^2} \left[K_0 \left(\frac{\omega b}{2\gamma^2} \right) \hat{K}_2 \left(\frac{\omega b}{2\gamma^2} \right) - \hat{K}_1^2 \left(\frac{\omega b}{2\gamma^2} \right) \right].$$

Разлагая макдональды при больших значениях аргумента, получим окончательно

$$\frac{dE_{\text{gr}}}{d\omega} \simeq \frac{(ee')^2 G}{16\pi^2 b^2} \exp \left(- \frac{\omega b}{\gamma^2} \right). \quad (45)$$

График частотного распределения изображен на рис. 1 при логарифмической шкале оси абсцисс.

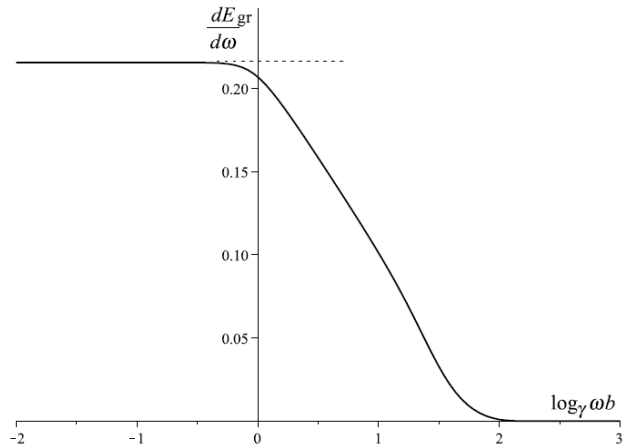


Рис. 1. График частотного распределения при логарифмической шкале оси абсцисс (в единицах $G(ee'/b)^2$) для $\gamma = 10^3$

Характерные переходные частоты $\omega = 1/b$ и $\omega = \gamma^2/b$ соответствуют абсциссам $x = 0$ и $x = 2$, соответственно. Они делят весь спектр на три характерных

области, рассмотренных выше. В области ультранизких частот $dE_{\text{gr}}/d\omega$ имеет почти постоянное значение, задаваемое пределом нулевой частоты (42). В средней области ($0 \lesssim x \lesssim 2$) кривая имеет почти прямой вид, что подтверждает логарифмическую зависимость (44); угол наклона соответствует теоретическому значению. Наконец, при ультравысоких частотах, падение спектра с частотой носит экспоненциальный характер (45).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено классическое тормозное гравитационное излучение, возникающее при столкновении двух ультрарелятивистских зарядов. В системе отсчета одного из зарядов излучение представляет собой биминг с конусом вокруг направления быстрого заряда.

В области частот и углов, дающих основной вклад в излучение, локальная и полевая амплитуды интерфе-

рируют неструктивно: полная амплитуда уменьшается (по сравнению с локальной), но итоговая степень лоренц-фактора в итоговом выражении не изменяется. Показано, что вычисление нелокального (полевого) вклада в амплитуды излучения (поляризации) может быть осуществлено технически гораздо проще, чем это производилось ранее.

Подтвержден результат для полной энергии излучения на одно столкновение. Уточнены оценки спектральной плотности излучения на характерных областях изменения частоты.

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М. В. Ломоносова.

Исследование выполнено в рамках научной программы Национального центра физики и математики, направление №5 «Физика частиц и космология».

-
- [1] Peters P. C. // *Phys. Rev. D.* **7**. 368 (1973).
 - [2] Peters P. C. // *Phys. Rev. D.* **8**. 4628 (1973).
 - [3] Гальцов Д. В., Грац Ю. В., Матюхин А. А. // Изв. высших учебных заведений. Физика. № 5. 40 (1980). (Galtsov D. V., Grats Yu. V., Matyukhin A. A. // *Sov. Phys. J.* **23** 389 (1980).)
 - [4] Гальцов Д. В., Грац Ю. В., Петухов В. И. Излучение гравитационных волн электродинамическими системами. М.: Издательство МГУ, 1984.
 - [5] Грац Ю. В. Нелокальные эффекты в теории гравитационного взаимодействия. Дисс. д.ф.-м.н., 1995.
 - [6] Peters P. C. // *Phys. Rev. D.* **5**. 2476. (1972).
 - [7] Peters P. C. // *Phys. Rev. D.* **1**. 1559 (1970).
 - [8] Matzner R. A., Nutku Y. // *Proc. Roy. Soc. Lond.* **336** 285 (1974).
 - [9] Smarr L. // *Phys. Rev. D.* **15**. 2069 (1977).
 - [10] Gal'tsov D. V., Kofinas G., Spirin P., Tomaras T. N. // *JHEP.* **0905**. 074 (2009).
 - [11] Gal'tsov D. V., Kofinas G., Spirin P., Tomaras T. N. // *JHEP.* **1005**. 055 (2010).
 - [12] Constantinou Y., Gal'tsov D. V., Spirin P., Tomaras T. N. // *JHEP.* **1111**. 118 (2011).
 - [13] Gal'tsov D. V., Spirin P., Tomaras T. N. // *JHEP.* **1301**. 087 (2013).
 - [14] Constantinou Y., Spirin P. // *JHEP.* **01**. 111 (2014).
 - [15] Gal'tsov D. V., Kofinas G., Spirin P., Tomaras T. N. // *Phys. Lett. B.* **683**. 331 (2010).
 - [16] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 2 Теория поля. 7-е изд. М.: Наука, 1988. (Landau L. D., Lifshitz E. M. The classical theory of fields. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962.)
 - [17] Байер В. Н., Катков В. М., Фадин В. С. Излучение релятивистских электронов. М.: Атомиздат. 1973.
 - [18] Weinberg S. Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity. Wiley, 1972.
 - [19] Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. Integrals and Series, Vol. 1. Elementary Functions. New York, Gordon & Breach Sci. Publ., 1986.

Gravitational bremsstrahlung by electromagnetic interaction

Y. V. Grats^a, P. A. Spirin^b

Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia
E-mail: ^agrats@phys.msu.ru, ^bsalotop@list.ru

We revisit the problem of classical gravitational bremsstrahlung which occurs by collisions of ultra-relativistic charges. The collision is characterized by the Lorentz-factor γ and the impact parameter b . Within the perturbation theory, we compute the total energy, radiated as a gravitational wave, as well as numerous spectral, angular and polarization distributions. The most of radiation is emitted into a beaming cone with linear angle of order $1/\gamma$. The average frequency is of order γ^2/b .

PACS: 11.27.+d, 98.80.Cq, 98.80.-k, 95.30.Sf

Keywords: gravitational wave, bremsstrahlung, beaming, non-local amplitude.

Received 14 March 2025.

Сведения об авторах

- Грац Юрий Владимирович — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495)939-53-89, e-mail: grats@phys.msu.ru.
- Спирин Павел Алексеевич — канд. физ.-мат. наук, ст. преподаватель; тел.: (495)939-53-89, e-mail: salotop@list.ru.