Движение обруча с массивной точкой по абсолютно шероховатой плоскости

А.А. Аглаев[11,2,*] А.К. Ковальджи[21,2,†]

[11]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет*
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
[22]*ГБОУ города Москвы «Лицей «Вторая школа» имени В.Ф. Овчинникова»*
Россия, 119333, Москва, ул. Фотиевой, д. 18

(Поступила в редакцию 19.09.2024; подписана в печать 22.10.2024)

В данной статье решена в более общей постановке известная задача о «прыгающем обруче», которая некорректно решена Дж. Литтлвудом в книге «Математическая смесь» [1]. Найдены в аналитической форме условия, связывающие массу обруча, его радиус, массу грузика и его начальную скорость, при которых сила реакции опоры положительна, и, следовательно, прыжок невозможен. Найдено условие, при выполнении которого отрыв обруча от плоскости происходит в начальный момент времени, когда грузик находится в верхней точке обруча. Показано, что модель качения с абсолютно жесткими и шероховатыми обручем и плоскостью при определенном соотношении параметров некорректна и приводит к противоречию, названному «квазипрыжком». Также, было замечено, что фаза движения «skimming», описанная в работе «The dynamics of a massless hoop» [6], не выводится, а ошибочно постулируется.

PACS: 45.40.-f УДК: 531.3
Ключевые слова: прыгающий обруч, катящийся обруч, квазипрыжок.

ВВЕДЕНИЕ

На одном экзамене предлагалось объяснить парадокс: «На абсолютно шероховатой плоскости (бесконечный коэффициент трения) стоит невесомый недеформируемый обруч, к которому на ободе изнутри прикреплена массивная точка (грузик). Под действием малого возмущения обруч начал катиться по плоскости без проскальзывания. Когда грузик окажется в нижней точке обруча, потенциальная энергия грузика будет равна нулю, и его кинетическая энергия будет равна нулю (нижняя точка катящегося колеса имеет нулевую скорость)». Популярный ответ, что энергия перешла в тепло, неверен, т.к. в отсутствии проскальзывания сила трения не совершает работы. Дж. Литтлвуд ошибочно считал, что движение грузика при качении обруча полностью эквивалентно скольжению грузика по горке, имеющей форму циклоиды, и утверждал [1], что в процессе движения обруч оторвется от плоскости. В [2] ошибочно утверждается, что отрыв обруча произойдет в момент обнуления силы реакции опоры (сила реакции опоры обнулится, когда грузик будет на уровне центра обруча). Однако автор не проверяет наличие необходимого условия для отрыва обруча — направленной вверх компоненты ускорения центра обруча. В [3] рассматривается похожая задача с конечным коэффициентом трения, но принятые в ней начальные условия приводят к проскальзыванию и изменению модели движения, поскольку в момент обнуления силы реакции опоры происходит квазипрыжок, о котором будет сказано ниже. В [4] описывается качение массивного обруча с начальной скоростью в случае бесконечного коэффициента трения. Однако в ней не рассмотрен случай, когда отрыв обруча происходит раньше, чем грузик окажется в верхней точке обруча. Кроме того, при обнулении силы реакции опоры указанная модель может привести к квазипрыжкам и стать некорректной. Об ошибочности подходов в [?] говорится в работе [5]. В последней утверждается, что безмассовый обруч без начальной скорости не оторвется от пола, поскольку ускорение его центра не будет направлено вверх. Авторы статьи [6], критикуя результаты работы [5], добавляют в условие задачи начальную скорость грузика и показывают, что при движении невесомого обруча в случае достаточно большого коэффициента трения проскальзывания не произойдет до обнуления силы реакции опоры, а после этого говорят об «особом» виде скольжения, называемого ими «skimming». Движение и отрыв обруча конечной массы при конечном коэффициенте трения рассмотрены в [7–10]. Авторы считают, что перед обнулением силы реакции опоры начнется проскальзывание. Результаты работы [9] подтверждены авторами статьи [11]. В [12] экспериментально установлено, что легкий диск (а не обруч) с грузиком, имеющем большую начальную скорость в верхней точке, сразу отрывается от пола. Исходя из работ [11, 13], мы предполагаем, что описанный в [12] отрыв может быть связан с упругим взаимодействием обруча и плоскости. В [13], где обруч считался упругим, показано, что отрыв происходит при обнулении силы реакции опоры. В [14] сообщается о совпадении результатов работ [1, 2] с экспериментом. Несмотря на это, рассуждения в [1, 2] остаются необоснованными, поскольку в случае абсолютно жестких обруча и плоскости, обнуление силы реакции опоры недостаточно для его отрыва. По нашему мнению, для объяснения экспериментов нельзя игнорировать деформации при взаимодействии обруча с плоскостью, т.е. нельзя

* andrey.a.aglaev@gmail.com
† koval-dji@yandex.ru

считать, что катящийся обруч касается пола в одной точке.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И УСЛОВИЕ НАЛИЧИЯ СИЛЫ РЕАКЦИИ ОПОРЫ

Плоскость, по которой катится обруч, назовем полом. Пусть недеформируемый обруч массой M и радиусом R, к которому изнутри прикреплен грузик (м.т.) массой m, начинает катиться по полу без проскальзывания по недеформируемой, абсолютно шероховатой плоскости, а грузик в момент времени $t = 0$ находится в верхней точке обруча и имеет скорость v_0, которая параллельна полу в направлении качения. Тогда декартовы координаты грузика в момент времени t можно задать формулами:

$$x = R\left(\theta - \sin\theta\right), \quad y = R(1-\cos\theta),$$

где $\theta \in [\pi; 2\pi)$ — угол между лучом, направленным вниз, и лучом, проведенным из центра обруча к грузику в момент времени t (при $t = 0$ угол $\theta = \pi$). В отсутствие проскальзывания модуль скорости грузика v и модуль скорости $w = Rw = R(d\theta/dt)$ центра обруча связанные соотношением:

$$v = 2w\sin\frac{\theta}{2}, \tag{1}$$

могут быть найдены из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} + Mw^2 + mgR\left(1-\cos\theta\right) = \left(\frac{m}{2}+\frac{M}{4}\right){v_0}^2 + 2mgR. \tag{2}$$

Решая систему(1), (2), получим:

$$v = \sqrt{\frac{2gR(1-\cos^2\theta) + {v_0}^2(1+0.5\varepsilon)(1-\cos\theta)}{\varepsilon + 1 - \cos\theta}}, \tag{3}$$

$$w = \frac{v}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}}, \tag{4}$$

где $\varepsilon = M/m$. Вертикальная проекция ускорения грузика a_y находится с помощью (3), (4):

$$a_y = \frac{d(w\sin\theta)}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \\ = g\frac{-z^3 \ + [(1.5\varepsilon+1) - (1+0.5\varepsilon)\,\sigma]z^2 + 2(\varepsilon+1)[(1+0.5\varepsilon)\sigma + 2gR]z - (1+0.5\varepsilon)\sigma - (0.5\varepsilon+1)}{(\varepsilon+1-z)^2}, \tag{5}$$

где $z = \cos\theta$, $\sigma = {v_0}^2/4gR$ — отношение начальной кинетической энергии системы к ее потенциальной энергии (взятой относительно пола с учетом потенциальной энергии обруча). Второй закон Ньютона, с учетом третьего, для вертикальных проекций сил, действующих на грузик и обруч, записывается в виде:

$$F_y - mg = ma_y, \quad N_y - Mg - F_y = 0, \tag{6}$$

где F_y — проекция силы, действующей со стороны обруча на грузик, N_y — проекция силы реакции опоры, действующей на обруч.

Из (5), (6) следует условие:

$$f\left(z\right) = -N_y = z^3 - \left[2.5\varepsilon + 2 - \left(1+0.5\varepsilon\right)\sigma\right]z^2 + \\ + \left(\varepsilon+1\right)\left[2\varepsilon + 1 - \left(2+\varepsilon\right)\sigma\right]z + \\ + \left(1+0.5\varepsilon\right)\sigma - \left(\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 + 2.5\varepsilon\right) < 0, \tag{7}$$

определяющее на плоскости $(\sigma;\ \varepsilon)$ область значений параметров, при которых $N_y > 0$. $f(z)$ имеет два локальных экстремума и две граничные точки, которые надо проверить. Получаем систему неравенств: $f\left(-1\right) < 0$, $f\left(1\right) < 0$, $\left(f\left(z_1\right) < 0,\ -1 \le z_1 \le 1\right)$, $\left(f\left(z_2\right) < 0,\ -1 \le z_2 \le 1\right)$, где $z_1,\ z_2$ — корни $f'\left(z\right) = 0$.

$f\left(-1\right) < 0 \Leftrightarrow \varepsilon > \sigma - 1$.

$f\left(1\right) < 0$ верно всегда, кроме $\varepsilon = 0$, тогда $f\left(1\right) = 0$.

$f'\left(z\right) = 3\left(z - (\varepsilon+1)\right)\left(z - \frac{2\varepsilon+1-(\varepsilon+2)\sigma}{3}\right) = 0.$

Только один корень $z_0 = \frac{2\varepsilon+1-(\varepsilon+2)\sigma}{3}$ может попасть в $[-1;1]$. $z_0[-1;1] \Leftrightarrow \left(\sigma < 2; \varepsilon > \frac{2(\sigma+1)}{2-\sigma}\right) \cup \sigma > 2.$

$z_0[-1;1] \Leftrightarrow \left(\sigma < 2; \varepsilon \le \frac{2(\sigma+1)}{2-\sigma}\right) \cup \sigma = 2.$

$f\left(\frac{2\varepsilon+1-(\varepsilon+2)\sigma}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{2(\sigma+1)^2}{26-\sigma^2-2\sigma};\ \sigma < \sqrt{27}-1.$

С учётом всех ограничений получим, что реакция опоры положительна в процессе всего движения $\Leftrightarrow$ $\left(\varepsilon > \frac{2(\sigma+1)^2}{26-\sigma^2-2\sigma};\ \sigma < 2\right) \cup \left(\varepsilon > \sigma - 1;\ \sigma \ge 2\right)$ — это закрашенная область на рис. 1. При $\sigma = 0$ сила реакции опоры никогда не обращается в нуль $\varepsilon > \frac{1}{13}$.

2. УСЛОВИЕ ОТРЫВА ОБРУЧА ОТ ПОЛА

Если σ и ε не лежат в закрашенной области (рис. 1), то реакция опоры N_y может впервые исчезнуть при некотором $\theta^* \in [\pi; 2\pi)$. Естественно предположить, что при нулевой силе реакции опоры и бесконечном коэффициенте трения сила трения отсутствует. В момент исчезновения силы реакции опоры, вертикальная составляющая скорости центра обруча равна нулю, а, следовательно, отрыв обруча определяется вертикальным ускорением центра обруча. В этот момент центр обруча участвует в двух движениях: поступательном и вращательном с угловой скоростью $\omega^* = \omega(\theta^*)$ (последнее равенство следует из абсолютной жесткости обруча) вокруг центра масс системы обруч-грузик.

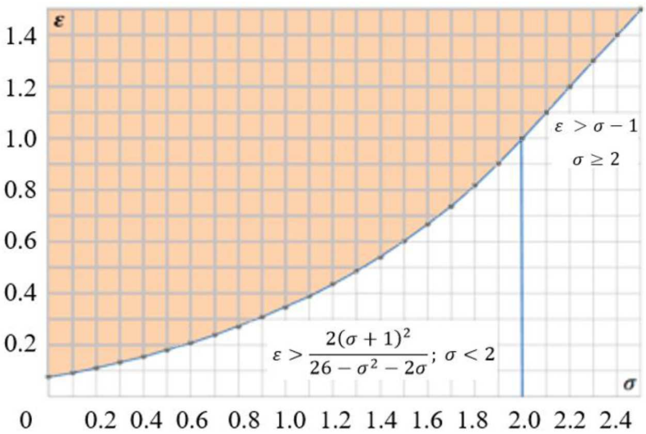

Рис. 1. Область параметров, где сила реакции опоры положительная

Центр обруча находится на расстоянии $R_M = R/(1+\varepsilon)$ от центра масс. Сила тяжести $(M+m)g$ приложена к центру масс, поэтому вертикальная составляющая ускорения центра обруча a_0 складывается из ускорения центра масс g и центростремительного ускорения центра обруча:

$$a_0 = -g - \frac{R}{1+\varepsilon}\omega^{*2}\cos\theta^*. \tag{8}$$

Отрыв обруча произойдет, если $a_0 > 0$. Подчеркнем необходимость строгого неравенства, т.к. при $a_0 = 0$ в следующий момент времени после отрыва обруча от горизонтальной плоскости ускорение его центра станет направленным вниз. Это связано с тем, что обруч провернется вокруг центра масс и вертикальная составляющая центростремительного ускорения уменьшится.

Найдем условие отрыва обруча от горизонтальной плоскости. Подставляя ω^* в условие (8), получаем: получаем:

$$\cos^2\theta^* + [(2+\varepsilon)\sigma - \varepsilon]\cos\theta^* + (1+\varepsilon)^2 < 0.$$

Решение этого квадратного неравенства $C_1 < \cos\theta^* < C_2$, где

$$C_{1,2} = \frac{\varepsilon - (2+\varepsilon)\sigma \mp \sqrt{[(2+\varepsilon)\sigma - \varepsilon]^2 - 4(1+\varepsilon)^2}}{2},$$

существует, если выполнены три условия: подкоренное выражение не отрицательно, $C_1 < 1$ и $C_2 > -1$. Система этих трех условий эквивалентна условию:

$$\sigma > \varepsilon + 1,$$

которое дает критерий того, что ускорение центра обруча может быть направлено вверх.

Заметим, что неравенство, обратное условию (7), $N_y \leq 0$ (отсутствие силы реакции опоры) выполняется в момент времени $t = 0$, если $\sigma \geq \varepsilon + 1$. Можно показать, что при $\sigma > \varepsilon + 1$ ускорение a_0 в этот момент положительно. Это означает, что, если начальные условия допускают отрыв обруча от пола, то это произойдет в момент начала движения. Аналогичное утверждение делалось в [6], где M считалось равным нулю.

3. КВАЗИПРЫЖОК И ОСОБЫЕ ФАЗЫ ДВИЖЕНИЯ

Если $\sigma \leq \varepsilon + 1$, то в момент обнуления вертикальной составляющей силы реакции опоры, вертикальная составляющая ускорения центра обруча направлена вниз или равна нулю, то обруч будет вновь прижиматься к плоскости. В результате опять начнется качение без проскальзывания, это явление мы назвали «квазипрыжком». Переход от первоначального качения к квазипрыжку длится бесконечно малый (нулевой) промежуток времени. Это приводит к противоречию: грузик движется по циклоиде так, как если бы проекция силы реакции опоры, действующей на обруч, была отрицательной, но последняя не может быть отрицательной. Устранить это противоречие возможно, если считать обруч и плоскость упруго деформируемыми. В этом случае можно говорить о появлении «высоты взаимодействия», когда обруч поднимается, но продолжает касаться деформированной плоскости, чем обеспечивается вертикальная скорость центра обруча. Противоречие такого типа может возникать и в других задачах, в которых абсолютно твердые объекты движутся в отсутствие проскальзывания.

Авторы [6] утверждают, что при $M = 0$ и $m \neq 0$ возможна особая фаза движения обруча по плоскости, названная ими «skimming», в которой обруч сохраняет контакт с плоскостью; сила, действующая на него в точке касания, равна нулю, а грузик находится в состоянии свободного падения. Центр масс обруча с грузиком в этом случае совпадает с точкой нахождения грузика на обруче, и момент инерции I обруча с грузиком относительно оси, проходящей через центр масс, равен нулю. Относительно нее равен нулю и момент внешних сил M_f, действующих на обруч с грузиком. При этом, по мнению авторов, возникает необходимое для такого движения конкретное значение углового ускорения β центра обруча вокруг центра масс. На самом деле, $\beta = \lim\limits_{I\to 0}\frac{M_f}{I}$, но авторы [6] без каких-либо оснований говорят (постулируют), что раскрытие неопределенности в этой формуле приводит именно к необходимому им значению β, обеспечивающему движение «skimming». Заметим, что при таком движении M_f строго равно нулю, а момент инерции системы вокруг центра масс стремится к нулю $M \to 0$, и поскольку разрыв функции $\frac{0}{I}$ при $I = 0$ — устранимый разрыв, то угловое ускорение при $I = 0$ определяется как предел $\beta = \lim\limits_{I\to 0} = 0$. Основываясь на голословном (неверном) утверждении, что $\beta \neq 0$, авторы [6] говорят о некорректности исследований в [5], где говорится о том, что ускорение центра безмассового обруча будет направлено вниз при отсутствии начальной скорости.

Вернемся к качению без проскальзывания невесомого обруча с грузиком в случае бесконечно малой начальной скорости, рассмотренному в [1]. В ней Литтлвуд пишет: «Обруч подскакивает, когда радиус-вектор массы становится горизонтальным. Я не нахожу отрыв обруча от грунта непосредственно очевидным; можно, однако, усмотреть, что движение эквивалентно гладкому скольжению массы под действием силы тяжести по циклоиде, которую масса описывает, и тогда уже интуитивно ясно, что рано или поздно масса должна покинуть эту траекторию». Интуитивное утверждение, что грузик слетает с горки-циклоиды и после этого обруч отрывается, неверно. Качение невесомого обруча с прикрепленным к нему грузиком, в общем виде, не эквивалентно скольжению грузика по циклоиде, поскольку в тот момент, когда грузик «слетает» со скользкой циклоиды (сила реакции опоры становится равной нулю), модель горки не эквивалентна модели качения обруча. При $\sigma \leq \varepsilon + 1$, в момент схождения с циклоиды, ускорение центра обруча будет направлено вниз, т.е. обруч должен опускаться, что невозможно, если не допускать наличие упругой деформации обруча и пола. Используемая в [1] модель скольжения грузика по горке этого не учитывает. При $\sigma = 0$ и $\varepsilon = 0$ в момент обнуления силы реакции опоры у центра обруча ускорение будет направлено вниз, что, по нашему мнению, приводит к квазипрыжкам, о которых говорилось выше.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами найден критерий невозможности отрыва обруча в процессе всего движения (связывающий массу обруча, его размеры, массу грузика и начальную скорость грузика) — это сочетание параметров, при котором всегда есть сила реакции опоры, действующая на обруч в точке его касания с горизонтальной плоскостью в случае его качения без проскальзывания. Были введены две важных величины σ и ε, которые позволили упростить все преобразования и удобно сформулировать критерий. Аналитически решено кубическое неравенство с параметрами, которое раньше решалось только численно. Показано, что отсутствие силы реакции опоры является необходимым, но не достаточным условием для отрыва обруча, который происходит только тогда, когда ускорение центра обруча направлено вверх, что совпадает с выводом в работе [6]. Найдено условие, при выполнении которого отрыв обруча от плоскости происходит в начальный момент времени, когда грузик находится в верхней точке обруча. Введено понятие и найдено условие возникновения «квазипрыжков», приводящее к противоречию, преодолеть которое можно, допустив наличие упругого взаимодействия обруча с деформируемой горизонтальной поверхностью. Показано, что описанная в работе [6] фаза движения «skimming» не обоснована. Объяснен приведенный в начале статьи парадокс, который связан с некорректностью используемой модели — недеформируемым обручем и плоскостью, при отсутствии проскальзывания. В задаче в более сложной постановке, в которой учитывается конечность коэффициента трения для массивного обруча с грузиком, решаемой в ряде работ исключительно численно, естественно данное противоречие не имеет места, поскольку начинается проскальзывание.

Авторы благодарны профессору В.А. Макарову, доценту С.Б. Рыжикову и Н.Д. Гуку за полезные обсуждения и ценные замечания.

[1] *Литтлвуд Дж.* Математическая смесь. М.: Наука, 1990. Стр. 18–19.
[2] *Tadashi F. Tokieda* // The Hopping Hoop. The American Mathematical Monthly. **104**, Issue 2. 152–154 (1997).
[3] *Чудновский А.В., Григорьев Ю.М., Муравьев В.М., Потапов В.Ф.* Теоретические задачи по физике. Международная олимпиада «Туймаада». 1994–2012: Под ред. Чудновского А.В. Задача 13. М.: МЦНМО, 2013.
[4] *Абрамов А.А., Гайдуков Г.Н., Горбатый И.Н.* и др. Задачи физических олимпиад МИЭТ (1974–2006 гг.) Задача 53. М.: 2008.
[5] *Butler J.P.* // Hopping hoop don't hop. Am. Math. Monthly. **106**. 565 (1999).
[6] *Theron W.F.D., du Plessis N.M.* // The dynamics of a massless hoop. Am. J. Phys. **69**, N 3. 354 (2001).
[7] *Pritchett T.* // The hopping hoop revisited. Am. Math. Monthly **106**. 609 (1999).
[8] *Theron W.F.D.* // The rolling motion of an eccentrically loaded wheel. Am. J. Phys. **68**. 812 (2000).
[9] *Theron W.F.D., Maritz M.F.* // The amazing variety of motions of a loaded hoop. Math. Comput. Model. **47**. 1077 (2008).
[10] *Liu Y.Z., Xue Y.* // Qualitative analysis of a rolling hoop with mass unbalance. Acta Mech. Sinica. **20**. 672 (2004).
[11] *Maritz M.F., Theron W.F.D.* // Experimental verification of the motion of a loaded hoop. Am. J. Phys. **80**. 594 (2012).
[12] *Северинов А., Грушецкий Н., Щетников А.* // Диск с грузом. «Квантик» № 6, Стр. 19. М.: МЦНМО, 2014.
[13] *Theron W.F.D.* // The dynamics of an elastic hopping hoop. Math. Comput. Modelling. **35**. 1135 (2002).
[14] *Mackenzie D.* // Fred. Almgren. (1933-1997), Notices Am. Math. Society. **44**. 1102 (1997).

Dynamics of a hopping hoop with a massive point on an absolutely rough plane

A.A. Aglaev[1,a], **A.K. Kovaldji**[2,b]

[1]*Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*
Moscow 119991, Russia
[2]*Litsey «Vtoraya Shkola» named after V.F. Ovchinnikov»*
Moscow 119333, Russia
E-mail: [a]*andrey.a.aglaev@gmail.com,* [b]*koval-dji@yandex.ru*

In this article, the well-known problem of the «hopping hoop», which was incorrectly solved by J. Littlewood in his book «A Mathematician's miscellany» [1], is solved in a more general formulation. The conditions connecting the hoop mass, its radius, the mass of the point and its initial velocity under which the plane reaction force is positive, and, therefore, a jump is impossible, are found in analytical form. A condition is found under which hopping occurs at the initial moment of time, when the point is at the top of the hoop. It is shown that the rolling model with an absolutely rigid and rough hoop and plane at a certain ratio of parameters is incorrect and leads to a contradiction called a «quasijump». It was also noted that the «skimming» phase of the motion, described in the work of W.F.D. Theron and N.M. du Plessis «The dynamics of a massless hoop» [6], is not derived, but wrongly postulated.

PACS: 45.40.-f
Keywords: Hopping hoop, rolling hoop, quasijump.
Received 19 September 2024.

Сведения об авторах

1. Аглаев Андрей Андреевич — студент; e-mail: andrey.a.aglaev@gmail.com.
2. Ковальджи Александр Кириллович — старший методист; e-mail: koval-dji@yandex.ru.