Об однонаправленном распространении волн Похгаммера–Кри в цилиндрическом ауксетике

Д. В. Ампилогов*
Образовательный и научный кластер «Институт высоких технологий», Балтийский федеральный университет им. И. Канта Россия 236041, Калининград, ул. А. Невского, д. 14
(Поступила в редакцию 03.04.2024; подписана в печать 22.10.2024)

В настоящей работе рассматривается задача о распространении волн Похгаммера–Кри в цилиндрическом ауксетике. Средствами метода операторов проектирования получены приближенное уравнение эволюции и общие решения для правых и левых волн для поля перемещений в частном случае аксиально-симметричного материала.

PACS: 62.30.+d,02.30.Ik УДК: 534-16.
Ключевые слова: метаматериалы, ауксетики, метод операторов проектирования.

ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия внимание ученых привлекают метаматериалы. В широком смысле это материалы с физическими свойствами, не встречающимися в природе. Примерами таких материалов являются среды с отрицательным показателем преломления (в литературе их называют «леворукими» средами, средами Веселаго, DNG-среды и т.п.), ауксетики — материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона. Термин «ауксетик» (по-английски auxetic) происходит от греческого слова $\alpha\acute{\upsilon}\xi\epsilon\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma$(ауксетикос), что означает «стремящийся расшириться». Имеется в виду, что упругий материал при растяжении в одном направлении растет в поперечном размере, то есть имеет отрицательный коэффициент Пуассона. Термин придумал К. Эванс в 1990 г. [1], внесший значительный вклад в изучение ауксетиков. Первое упоминание о материалах с отрицательным коэффициентом Пуассона встречается в работе А. Лява (1944) [2], который рассматривал кристаллы пирита FeS_2. В последнее время в связи с бурным развитием технологий машинного обучения и нейронных сетей следует отметить появление работ по проектированию ауксетиков с помощью методов глубинного обучения. Одной из таких работ можно назвать работу [3]. Хотя наблюдается значительный рост количества публикаций по метаматериалам–ауксетикам (так, по вопросу применения ауксетиков как цементирующих композитов отмечается рост в 230% за период с 2009 г. по август 2023 г. [4]), теоретическое описание довольно скудно.

Научный интерес представляет исследование распространения волн в заданном направлении. В контексте строительства вопрос об однонаправленном воздействии волн может возникнуть в задачах о распространении сейсмических волн, когда необходимо исследовать только продольную волну, либо только поперечную волну. Одним из методов, позволяющим расщепить исходное волновое возмущение, заданное соответствующим уравнением на две однонаправленные составляющие, является метод операторов проектирования, изложенный в монографии С.Б. Лебле [5] и его англоязычном издании [6]. Общие сведения были изложены в работе [7].

Данная работа является развитием работы [7], которая рассматривала построение уравнений для правых и левых волн в цилиндрическом метаматериале для скалярного потенциала волн Похгаммера–Кри. В рамках данной работы будет рассмотрено распространение волн Похгаммера–Кри в цилиндрическом метаматериале–ауксетике и с помощью аппарата метода операторов проектирования будут получены уравнения распространения однонаправленных волн для вектора напряжений в аксиально-симметричном цилиндрическом метаматериале–ауксетике а также частные решения для экспонециальных начальных условий.

1. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОНАПРАВЛЕННОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ СКАЛЯРНОГО И ВЕКТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛА ВОЛН ПОХГАММЕРА–КРИ

Поставим матричную задачу о распространении скалярного потенциала волн Похгаммера–Кри, решение задачи на собственные значения которой является первым этапом в построении проекционных операторов. Рассмотрим ауксетик цилиндрической формы. Уравнение движения для изотропного упругого тела в отсутствии массовых сил представляются в виде уравнения Похгаммера–Кри [8]:

$$c_1^2\nabla^2(\mathrm{div}\mathbf{u}) - c_2^2\mathrm{rotrot}\mathbf{u} = \partial_t^2\mathbf{u}, \tag{1}$$

где $\mathbf{u}$ — поле перемещений,

$$\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}, \tag{2}$$

c_1, c_2 — скорости продольной и поперечной составляющей объемных волн в среде, зависящие от коэффи-

* dm_ampil@list.ru

циентов Ламе λ и μ и плотности образца ρ:

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \tag{3}$$

Ось z подразумевается направленной вдоль центральной оси образца. Производные по r, φ,z и t далее будем обозначать следующим образом:

$$\partial_r \equiv \frac{\partial}{\partial r}, \quad \partial_\varphi \equiv \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \partial_z \equiv \frac{\partial}{\partial z}, \quad \partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}. \tag{4}$$

Пусть:

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi + \mathrm{rot}\Psi, \tag{5}$$

где Φ — скалярный потенциал поля перемещений, Ψ — векторный потенциал. Подставив в уравнение (1) получим следующую систему:

$$\begin{cases} \nabla(c_1^2(\Delta\Phi)) = \nabla(\partial_t^2\Phi), \\ c_2^2\Delta(\mathrm{rot}\Psi) = \partial_t^2\mathrm{rot}\Psi. \end{cases} \tag{6}$$

Введем обозначение:

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{p}. \tag{7}$$

Тогда:

$$\begin{cases} c_1^2\nabla(\Delta\Phi) = \nabla(\partial_t^2\Phi), \\ c_2^2\Delta\mathbf{p} = \partial_t^2\mathbf{p}. \end{cases} \tag{8}$$

Мы будем рассматривать аксиально-симметричный случай, в котором поле смещений, и, как следствие, скалярный потенциал не зависит от φ. Кроме того, проекция вектора $\mathbf{u}$ на ось φ равна 0 [8]. Функцию $\Phi(r, z, t)$ разложим по базису и функции Бесселя по переменной r:

$$\Phi(r, z, t) = \sum_\nu A_\nu(z, t) J_\nu(a_\nu r) + c.c., \tag{9}$$

где
textitc.c. — комплексно сопряженная часть. Используя метод операторов проектирования (подробное изложение см. в работе [7]), можно получить уравнения однонаправленного распространения скалярного потенциала волн Похгаммера–Кри:

$$\begin{aligned} \partial_t\Pi_\Phi &= c_1\partial_z\Pi_\Phi(z, t), \\ \partial_t\Lambda_\Phi &= -c_1\partial_z\Lambda_\Phi(z, t), \end{aligned} \tag{10}$$

Общие решения есть:

$$\begin{aligned} \Pi_\Phi &= \Pi_\Phi(z + c_1 t), \\ \Lambda_\Phi &= \Lambda_\Phi(z - c_1 t). \end{aligned} \tag{11}$$

Рассмотрим теперь ротор векторного потенциала. Подставив во второе уравнение набора (8) выражение для лапласиана векторного поля в цилиндрической системе координат, получим для проекций ротора векторного потенциала:

$$p_\varphi = 0, \partial_\varphi p_r = \partial_\varphi p_z = 0, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} c_2^2\left(\Delta p_r - \frac{p_r}{r^2}\right) &= \partial_t^2 p_r, \\ c_2^2\Delta p_z &= \partial_z^2 p_z. \end{aligned} \tag{13}$$

Раскладывая проекцию p_r по базису функции Бесселя первого порядка по r:

$$p_r = \sum_\theta B_\theta(z, t) J_1(b_\theta r) + c.c. \tag{14}$$

Получим уравнение (опустив значки суммы и индексы:

$$c_2^2(\partial_z^2 B(z, t) - b^2 B(z, t)) = \partial_t^2 B(z, t). \tag{15}$$

Для параметра b достаточно малого по сравнению с производной по z, уравнение (15) перейдет в:

$$c_2^2\partial_z^2 B(z, t) = \partial_t^2 B(z, t). \tag{16}$$

Сравнив структуру данного уравнения с уравнением для амплитуды скалярного потенциала:

$$c_1^2\partial_z^2 A(z, t) = \partial_t^2 A(z, t). \tag{17}$$

видно, что вид операторов проектирования будет полностью аналогичен. Имеем операторы проектирования в k-представлении:

$$\widehat{P}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & c_2 \\ c_2^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$\widehat{P}_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -c_2 \\ -c_2^{-1} & 1 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Как и в случае для скалярного потенциала, уравнения для соответствующих правых и левых волн для проекции векторного потенциала на ось r есть:

$$\begin{aligned} \partial_t\Pi_r &= c_2\partial_z\Pi_r(z, t), \\ \partial_t\Lambda_r &= -c_2\partial_z\Lambda_r(z, t). \end{aligned} \tag{20}$$

Общие решения есть:

$$\begin{aligned} \Pi_r &= \Pi_r(z + c_2 t), \\ \Lambda_r &= \Lambda_r(z - c_2 t). \end{aligned} \tag{21}$$

Задача для проекции векторного потенциала на ось z полностью аналогична таковой для скалярного потенциала. Используя разложение:

$$p_z = \sum_\theta B_\theta(z, t) J_0(b_\theta r) + c.c., \tag{22}$$

и проведя в точности ту же процедуру, что и для скалярного потенциала, мы получим операторы проектирования вида (18,19). Соответствующие уравнения для правой и левой волн будут аналогичны:

$$\begin{aligned} \partial_t\Pi_z &= c_2\partial_z\Pi_z(z, t), \\ \partial_t\Lambda_z &= -c_2\partial_z\Lambda_z(z, t). \end{aligned} \tag{23}$$

Общие решения которых совпадают с решениями (21).

2. ПРАВЫЕ И ЛЕВЫЕ ВОЛНЫ ПОХГАММЕРА–КРИ В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ МЕТАМАТЕРИАЛЕ-АУКСЕТИКЕ

Получим правые и левые волны Похгаммера–Кри для поля $\mathbf{u}$. Для этого воспользуемся определением (5). Мы получим в проекциях:

$$\begin{aligned}
(\Pi_u)_r &= (\nabla\Pi_\Phi)_r + \Pi_r = \partial_r\Pi_\Phi + \Pi_r,\\
(\Pi_u)_z &= (\nabla\Pi_\Phi)_z + \Pi_z = \partial_z\Pi_\Phi + \Pi_z,\\
(\Lambda_u)_r &= (\nabla\Lambda_\Phi)_r + \Lambda_r = \partial_r\Lambda_\Phi + \Lambda_r,\\
(\Lambda_u)_z &= (\nabla\Lambda_\Phi)_z + \Lambda_z = \partial_z\Lambda_\Phi + \Lambda_z,
\end{aligned} \tag{24}$$

В силу того, что волны Π_Φ и Λ_Φ не зависят от r, их частные производные по r равны 0. Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned}
(\Pi_u)_r &= \Pi_r(z + c_2 t),\\
(\Pi_u)_z &= \partial_z\Pi_r + \Pi_z(z + c_2 t),\\
(\Lambda_u)_r &= \Lambda_r(z - c_2 t),\\
(\Lambda_u)_z &= \partial_z\Lambda_r + \Lambda_z(z - c_2 t).
\end{aligned} \tag{25}$$

При подстановке экспоненциальных начальных условий для $\Pi_{r,z}$ и $\Lambda_{r,z}$:

$$\begin{aligned}
\Pi_r(z,0) &= \alpha_r \exp(ikz) + c.c.,\\
\Pi_z(z,0) &= \alpha_z \exp(ikz) + c.c.,\\
\Lambda_r(z,0) &= \beta_r \exp(ikz) + c.c.,\\
\Lambda_z(z,0) &= \beta_z \exp(ikz) + c.c.,
\end{aligned} \tag{26}$$

мы получим:

$$\begin{aligned}
(\Pi_u)_r &= \alpha_r \exp(ik(z + c_2 t)) + c.c.,\\
(\Pi_u)_z &= \alpha_z \exp(ik(z + c_2 t)) + c.c.,\\
(\Lambda_u)_r &= \beta_r \exp(ik(z - c_2 t)) + c.c.,\\
(\Lambda_u)_z &= \beta_r \exp(ik(z - c_2 t)) + c.c.,
\end{aligned} \tag{27}$$

как и ранее, *c.c.* обозначает комплексно сопряженную часть. Видно, что правая и левая волны при экспоненциальном начальном условии зависят от фазовой скорости распространения волны и поперечной составляющей скорости объемных волн.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках данной работы средствами аппарата операторов проектирования были получены уравнения распространения однонаправленных волн Похгаммера–Кри для цилиндрического аксиально-симметричного метаматериала–ауксетика, получены общие решения для правых и левых волн и их частные решения при экспоненциальном начальном условии.

Благодарности

Автор выражает благодарность профессору ОНК «Институт высоких технологий» М. А. Дмитриевой за обсуждение и ценные замечания.

[1] *Evans K. E.* // Endeavour. 15, N 4. 170. (1991).
[2] *Love E.H.* A treatise on the mathematical theory of elasticity. 4th ed. Dover, New York, 1944.
[3] *Zhang C., Xie J., Shanian A., Kibsey M., Zhao Y.F.* // J. Eng. App. AI 10641 (2023).
[4] *Momoh E.* et. al. // J. TWS. **196**. 111447 (2024).
[5] *Лебле С.Б.* Волноводное распространение нелинейных волн в стратифицированных средах. / С.Б. Лебле. Ленинград: Издательство Ленинградского университета, 1988.
[6] *Leble S.* Nonlinear Waves in Waveguides with stratification. Berlin, 1991.
[7] *Ампилогов Д.В., Дмитриева М.А.* // Ученые записки физического ф-та Московского ун-та. № 3, 2330101 (2023).
[8] *Ilyashenko A.V., Kuznetsov S.V* // Journal of Mechanics. **35**. 327. (2019).

On unidirectional propagation of Pocchammer-Chree waves in cylindrical auxetic

D. V. Ampilogov
Scientific and education cluster «Institute of Hi-Technologies»,
Immanuel Kant Baltic Federal University
Kaliningrad 236041, Russia
E-mail: dm_ampil@list.ru

The problem of propagation of Pocchammer–Chree waves in cylindrical auxetic is discussed in this work. The approximated evolution equation and general solution for displacement field are built by means of projection operators method in particular case of axial symmetric material.

PACS: 62.30.+d,02.30.Ik
Keywords: metamaterials, auxetics, projecting operators method.
Received 03 April 2024.

Сведения об авторе

Ампилогов Дмитрий Владимирович — ст. преподаватель; тел.: (4012) 237-00-67, e-mail: dm_ampil@list.ru.