

## Парадокс Клейна и клейновское туннелирование

А. И. Тернов<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), кафедра теоретической физики  
Россия, 141701, Московская область, Долгопрудный, Институтский пер. д. 9  
(Поступила в редакцию 21.06.2024; подписана в печать 12.07.2024)

Дается интерпретация парадокса Клейна на основе одночастичного приближения теории Дирака. С единых позиций рассматривается парадокс Клейна для дираковского электрона и клейновское туннелирование для носителей заряда в графене. Подчеркивается тесная связь между явлением «попятного движения» в релятивистской квантовой механике и распространением волн в «левых» средах в электродинамике. Данный методический материал используется в преподавании курса квантовой механики в Московском физико-техническом институте (национальном исследовательском университете).

PACS: 03.65.Pm, 03.65.Xp, 81.05.Xj

УДК: 530.145.6+530.145.85

Ключевые слова: уравнение Дирака, парадокс Клейна, попятное движение, левые среды, метаматериалы, клейновское туннелирование, графен.

### ВВЕДЕНИЕ

В 1928 г. Поль Дирак опубликовал свое знаменитое уравнение [1], которое заложило основу релятивистской квантовой механики электрона. Годом позже, в 1929 г. Оскар Клейн рассмотрел задачу о рассеянии дираковских частиц на одномерной прямоугольной потенциальной ступеньке [2] (ниже  $-e < 0$  — заряд электрона)

$$-e\varphi = V(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ V_0, & z \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Полученный Клейном результат оказался весьма необычным: при достаточно большой высоте ступеньки  $V_0 \geq E + mc^2$  (здесь  $E$  — энергия начального электрона,  $m$  — его масса) коэффициент прохождения принимал отрицательные значения ( $T < 0$ ), а коэффициент отражения был больше единицы ( $R > 1$ ). Именно в связи с этими особенностями данное явление и было названо *парадоксом*.

С тех пор прошло немало лет, и в текущем 2024 г. парадоксу Клейна исполняется уже 95 лет. Сегодня парадокс Клейна рассматривается в классических учебниках по квантовой механике (см., напр., [3–6]). Тем не менее, попытки дать различные интерпретации данному явлению продолжают, и этому посвящена весьма обширная литература (см., напр., [7–9]).

Основной причиной появления парадокса Клейна (и других подобных парадоксов) является наличие решений уравнения Дирака с отрицательным знаком энергии и возникающие при этом сложности с одночастичной интерпретацией теории. В этом состоит одно из существенных отличий релятивистской квантовой механики от нерелятивистской, где, как известно, состояний с отрицательным знаком энергии нет.

Состояния с отрицательной энергией возникают, разумеется, не только в теории Дирака. Они появляются в любой релятивистской теории, в том числе и в классической, поскольку формула релятивистской зависимости энергии от импульса (для свободной частицы)  $E^2 = c^2\mathbf{p}^2 + m^2c^4$  допускает в принципе существование обоих знаков энергии:

$$E = \xi\sqrt{c^2\mathbf{p}^2 + m^2c^4} = \xi E_p; \quad E_p = |E|, \quad \xi = \pm 1. \quad (2)$$

Таким образом, из формулы (2) следует, что энергия дираковского электрона может принимать значения, принадлежащие двум областям:  $E > 0$  ( $\xi = +1$ ) и  $E < 0$  ( $\xi = -1$ ). Эти области значений энергии разделены энергетической щелью шириной  $2mc^2$  (энергетический порог рождения электрон-позитронной пары), см. рис. 1.

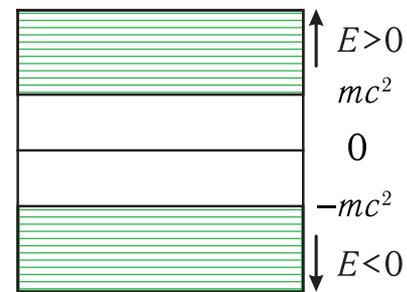


Рис. 1. Уровни энергии свободной дираковской частицы

Заметим, что в классической механике состояния с отрицательной энергией обычно вообще не рассматривают на том основании, что в процессе движения энергия частицы может изменяться лишь непрерывно, а «скачкообразные» переходы с  $\Delta E \geq 2mc^2$  в классике невозможны. Поэтому если исключить из рассмотрения состояния с отрицательной энергией в начальный момент времени, то они больше никогда и не появятся в теории.

\* [ternov.ai@mipt.ru](mailto:ternov.ai@mipt.ru)

В квантовой механике, как известно, могут происходить и дискретные переходы. Переход из состояния с энергией  $+mc^2$  в состояние с энергией  $-mc^2$  имеет, как можно убедиться, конечную вероятность; таким образом, состояния нижнего континуума (с  $E < 0$  или  $\xi = -1$ ) из теории исключить нельзя.

При анализе парадокса Клейна существуют два основных подхода. Первый подход можно назвать *одночастичным*, он аналогичен традиционному подходу нерелятивистской квантовой механики, когда предполагается, что уравнение Дирака (3) описывает *одночастичную систему* — релятивистский электрон. При таком подходе нужно считать, что у электрона существуют состояния с отрицательным знаком энергии и знать особенности движения электронов, находящихся в таких состояниях. Парадокс Клейна проявляется, когда падающий на потенциальную ступеньку (1) начальный электрон с положительной энергией, перейдя в область  $z \geq 0$ , оказывается в состоянии с отрицательной энергией (подробнее см. в разделе 3).

Второй подход можно назвать *многочастичным*, в этом случае вспоминают, что уравнение Дирака — это в то же время и теоретико-полевое уравнение, и оно может описывать как частицы (электроны), так и античастицы (позитроны). При этом состояния с отрицательным знаком энергии интерпретируются, как состояния античастиц. В рамках этого подхода объяснение парадокса Клейна достигается при учете рождения электрон-позитронных пар пар потенциальной ступенькой (в рамках формализма вторичного квантования). Важные результаты в этой области получены А.И. Никишовым [10], А. Хансенем и Ф. Рэндалом [11], а также С.П. Гавриловым и Д.М. Гитманом [12]. Мы не будем углубляться в эти вопросы<sup>1</sup>, поскольку в первую очередь нас интересует объяснение парадокса Клейна именно в рамках первого подхода.

В 2004 г. А.К. Геймом и К.С. Новосёловым был экспериментально получен графен [14, 15] — новый двумерный материал, представляющий собой слой углерода толщиной всего в один атом. С фундаментальной точки зрения графен интересен тем, что носители заряда в нем описываются при помощи безмассового двумерного уравнения Дирака. Поэтому ряд электронных явлений, возможных в графене, имеет аналоги в релятивистской квантовой механике. К таким явлениям относится, в частности, парадокс Клейна, который в теории графена обычно называется *клейновским туннелированием* (более подробно см. в разделе 4). Это явление в графене в настоящее время активно изучается как теоретически, так и экспериментально, поэтому исследования графена находятся на стыке физики конденсированных сред и физики высоких энергий [16].

<sup>1</sup> Укажем, что в работе [13] авторы анализируют парадокс Клейна в рамках *многочастичного подхода*, используя наглядную визуализацию, основанную на движении дираковских волновых пакетов и демонстрирующую рождение пар потенциальной ступенькой.

### 1. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА И ЕГО РЕШЕНИЯ

Уравнение Дирака для свободной частицы в гамильтоновой форме имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \hat{H}_D \Psi = \left\{ c(\hat{\boldsymbol{\alpha}}\hat{\mathbf{p}}) + \hat{\beta}mc^2 \right\} \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (3)$$

Обсудим решения этого уравнения (см., например, [16–18]). Для стационарных состояний можно записать  $\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-iEt/\hbar} \psi(\mathbf{r})$ , причем функция  $\psi(\mathbf{r})$  удовлетворяет стационарному уравнению — уравнению на собственные значения гамильтониана Дирака  $\hat{H}_D$ . С гамильтонианом  $\hat{H}_D$  коммутируют операторы трех компонент импульса  $\hat{\mathbf{p}}$ , а также оператор продольной поляризации спина  $(\hat{\Sigma}\mathbf{p})/p$ , где  $p = |\mathbf{p}|$ . Собственное значения этого оператора  $s = \pm 1$  характеризует проекцию спина на направление движения частицы и называется *спиральностью*.

Существенную роль в классификации решений уравнения (3) играет так называемый *знаковый оператор*, введенный впервые В. Паули [19]:

$$\hat{\Lambda} = \frac{\hat{H}_D}{(\hat{H}_D^2)^{1/2}} = \frac{c(\hat{\boldsymbol{\alpha}}\hat{\mathbf{p}}) + \hat{\beta}mc^2}{E_p}, \quad (4)$$

записанный здесь в общем виде и в импульсном представлении. Он коммутирует с гамильтонианом  $\hat{H}_D$ , и поэтому его собственные значения могут быть использованы для классификации состояний, собственных для  $\hat{H}_D$ . Собственные значения оператора  $\hat{\Lambda}$  есть  $\xi = \pm 1$ , причем  $\xi = +1$  отвечает положительному, а  $\xi = -1$  — отрицательному знаку энергии. Для свободного движения энергия  $E = \xi E_p$ , импульс  $\mathbf{p}$  и  $\xi$  (знак энергии) являются интегралами движения и могут одновременно принимать определенные значения.

В результате решение уравнения (3)  $\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-iEt/\hbar} \psi(\mathbf{r})$ , где  $\psi(\mathbf{r})$  есть общая собственная функция операторов  $\hat{H}_D$ ,  $\hat{\mathbf{p}}$ ,  $(\hat{\Sigma}\mathbf{p})/p$  и  $\hat{\Lambda}$ , т. е.

$$\begin{aligned} \hat{H}_D \psi(\mathbf{r}) &= E \psi(\mathbf{r}), \\ \hat{\mathbf{p}} \psi(\mathbf{r}) &= \mathbf{p} \psi(\mathbf{r}), \\ (\hat{\Sigma}\mathbf{p}) \psi(\mathbf{r}) &= s p \psi(\mathbf{r}), \\ \hat{\Lambda} \psi(\mathbf{r}) &= \xi \psi(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

может быть представлено в виде [16, 18]

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{p}, \xi, s}(\mathbf{r}, t) &= \\ &= \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(\xi E_p t - \mathbf{p}\mathbf{r})}}{2\sqrt{V}} \begin{pmatrix} \sqrt{\left(1 + \xi \frac{mc^2}{E_p}\right) \left(1 + s \frac{p_z}{p}\right)} \\ s \sqrt{\left(1 + \xi \frac{mc^2}{E_p}\right) \left(1 - s \frac{p_z}{p}\right)} e^{i\delta} \\ s \xi \sqrt{\left(1 - \xi \frac{mc^2}{E_p}\right) \left(1 + s \frac{p_z}{p}\right)} \\ \xi \sqrt{\left(1 - \xi \frac{mc^2}{E_p}\right) \left(1 - s \frac{p_z}{p}\right)} e^{i\delta} \end{pmatrix}. \quad (5) \end{aligned}$$

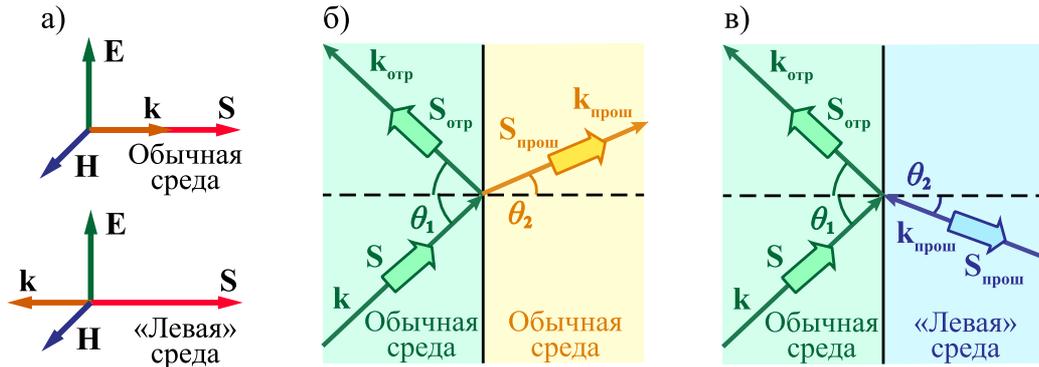


Рис. 2. а — Ориентация векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{k}$  в обычной и в «левой» среде; прохождение луча света через границу со средой с положительным (б) и отрицательным (в) показателем преломления

Здесь  $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$ ,  $\text{tg } \delta = p_y/p_x$ , а для дираковских матриц  $\hat{\alpha}_i$  и  $\hat{\beta}$  принято стандартное представление [20], причем  $\hat{\alpha}_i = \gamma^0 \gamma^i$ ,  $\hat{\beta} = \gamma^0$ ,  $\gamma^5 = -i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ ,  $\hat{\Sigma}_i = -\gamma^5 \gamma^0 \gamma^i$ . Функция (5) нормирована на полный объем  $V$ , доступный для частицы, в дальнейшем для упрощения вычислений можно принять, что  $V = 1$ .

Найдем теперь, чему равна плотность тока вероятности в состоянии, описываемом волновой функцией (5). Для простоты можно считать, что частица движется, например, вдоль оси  $z$ . Тогда несложные вычисления дают, что

$$j_z = c \Psi^+ (\mathbf{r}, t) \hat{\alpha}_3 \Psi (\mathbf{r}, t) = \xi \frac{c^2 p_z}{E_p} \equiv \xi (v_{\text{рел}})_z. \quad (6)$$

В случае состояния с положительной энергией ( $\xi = +1$ ) формула (6) соответствует обычному классическому соотношению

$$v_{\text{рел}} = \frac{c^2 \mathbf{p}}{E}$$

между скоростью и импульсом в релятивистском движении. Для состояния с отрицательной энергией ( $\xi = -1$ ) из соотношения (6) следует, что направления импульса частицы и тока вероятности противоположны. Данное явление носит название «попятного движения» дираковской частицы.

Существует точка зрения, в соответствии с которой явление «попятного движения» можно объяснить только в рамках многочастичной интерпретации теории. При этом вместо плотности тока вероятности рассматривают плотность электрического тока  $\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j}_e = e\mathbf{j}$ , и тогда «попятному движению» будет отвечать электрический ток античастиц.

Заметим, что феномен «попятного движения» может быть понят и в рамках одночастичного подхода, мы обсудим это в следующем разделе.

## 2. «ПОПЯТНОЕ ДВИЖЕНИЕ» И «ЛЕВЫЕ» СРЕДЫ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Может показаться удивительным, но у явления «попятного движения» есть классический аналог, однако он относится не к механике, а к электродинамике. Движение дираковского электрона в состоянии с отрицательной энергией имеет много общего с распространением электромагнитных волн в специальных средах, которые называются «левыми» средами или средами Веселаго [21]. Они были названы так по имени русского физика В.Г. Веселаго, который в 1967 г. [22] рассмотрел возможность распространения в специальных средах волн, для которых вектор Умова–Пойнтинга антипараллелен волновому вектору (или, что то же самое, — групповая скорость антипараллельна фазовой скорости).

Следует упомянуть, что работе В.Г. Веселаго предшествовали и другие исследования на эту тему. Ещё в 1904 г. английский математик и гидродинамик Г. Лэмб [23] предположил существование так называемых обратных волн, т. е. волн, для которых фазовая и групповая скорости волн направлены противоположно друг другу. А. Шустер в своей монографии [24] впервые обсуждал вопрос об обратных электромагнитных волнах в оптике.

Великолепное педагогическое введение в данную проблему было дано Л.И. Мандельштамом. В своих знаменитых лекциях, которые он читал в 40-х годах прошлого века в МГУ, Мандельштам дал детальный анализ явлению отрицательного преломления на границе раздела двух сред, в одной из которых могут распространяться волны с групповой скоростью, противоположной по направлению скорости распространения фазы волны [25].

Существенный вклад в развитие данной области науки внесли также и другие отечественные ученые<sup>2</sup>:

<sup>2</sup> Об истории вопроса можно прочитать в [26, 27].

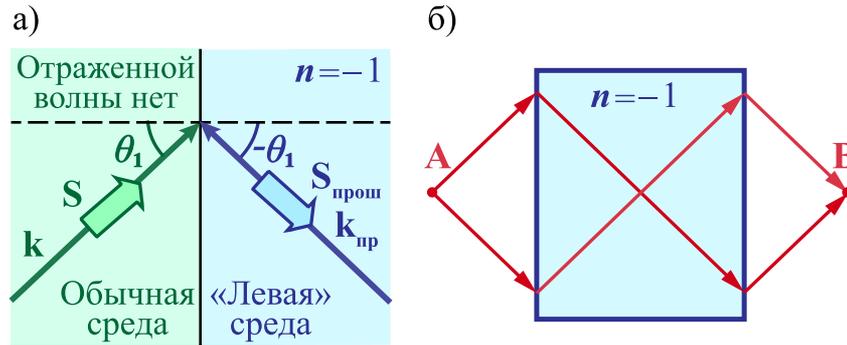


Рис. 3. а — Преломление светового луча в среде с  $n = -1$ ; б — Ход лучей в «линзе» Веселаго

следует упомянуть работы Д.В. Сивухина (1957 г.) [28], В.Е. Пафомова (1959 г.) [29], Р.А. Силина (1959 г. и позже, см. [30] и приведенные там ссылки).

Однако все упомянутые работы очень сильно определили свое время, и физика сред с отрицательным преломлением начала активно развиваться только в XXI веке после того, как такие среды были созданы искусственным путем [31, 32]. Они получили название электромагнитных *метаматериалов*. Заметим, что работа В.Г. Веселаго [22] содержит всю современную терминологию, характерную для этой области физики, и сейчас общепринято считать, что физика метаматериалов стартует именно с работы Веселаго [22].

В своей работе В.Г. Веселаго ввел понятие «левых» и «правых» сред. «Правые», т. е. обычные среды — это среды, где векторы напряженностей электрического и магнитного поля плоской электромагнитной волны  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  вместе с волновым вектором  $\mathbf{k}$  образуют правую тройку векторов, а в «левых» средах они образуют левую тройку (см. рис. 2, а). Отсюда следует, что для «левых» сред волновой вектор  $\mathbf{k}$  и вектор Умова–Пойнтинга  $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$  (определяющий направление переноса энергии) имеют противоположные направления.

На рис. 2 изображена схема преломления волн, падающих на границу раздела двух обычных сред (б) и обычной и «левой» (в) среды. В случае (б) (когда  $\mathbf{k}_{\text{прош}} \uparrow \uparrow \mathbf{S}_{\text{прош}}$ ) мы имеем обычный закон преломления Снеллиуса

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1} = n, \quad (7)$$

где  $\theta_1$  — угол падения, а  $\theta_2$  — угол преломления. В случае (в) угол преломления — это угол между вектором  $\mathbf{k}_{\text{прош}}$  и нормалью, и он равен  $\pi - \theta_2$ , поэтому закон преломления вновь имеет вид (7), а показатель преломления  $n > 0$ , т. е. отрицательный показатель преломления при этом вводить не требуется [33, 34]. Но если мы запишем закон преломления для лучей (направление луча совпадает с направлением потока энергии  $\mathbf{S}$ ), то мы получим, что  $n < 0$ , поскольку теперь  $\theta_2 < 0$ . Поэтому, говоря об отрицательном коэффициенте преломления (или просто об отрицательном

преломлении), имеют в виду так называемый *лучевой* показатель преломления [35].

В случае, если показатель преломления для «левой» среды равен  $n = -1$  (см. рис. 2, в и рис. 3, а), отраженной волны не будет, и можно, в принципе, реализовать устройство, получившее название «линза» Веселаго. Данное устройство представляет собой преломляющую систему, которая состоит из плоскопараллельной пластинки толщиной  $d$ , изготовленной из «левого» вещества с  $n = -1$  и находящейся в вакууме. На рис. 3, б показано, что такая пластинка может фокусировать в точку излучение точечного источника  $A$ , находящегося на расстоянии  $l < d$  от пластинки. Тем не менее это не есть линза в обычном понимании, так как она не будет фокусировать в точку пучок параллельных лучей, приходящих из бесконечности.

Заметим, что отрицательное преломление и «линза» Веселаго в настоящее время успешно исследуются экспериментально в графене (см. раздел 4), и это подчеркивает глубокую связь между явлением «попятного движения» в релятивистской квантовой механике и распространением электромагнитных волн в «левых» средах в электродинамике.

### 3. ПАРАДОКС КЛЕЙНА ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ СТУПЕНЬКИ

Перейдем теперь к рассмотрению рассеяния дираковских частиц на одномерной прямоугольной потенциальной ступеньке. Напомним, что именно при исследовании этой задачи Клейн обнаружил впервые свой знаменитый парадокс.

Итак, потенциал ступеньки выберем в виде (1). Введение потенциала  $V(z)$  ведет к модификации гамильтониана свободной частицы  $\hat{H}_D$  (см. (3)) по следующей схеме:

$$\hat{H}_D \rightarrow \hat{H}'_D = \hat{H}_D + V(z).$$

Далее, в области  $z < 0$  в качестве решений уравнения Дирака можно взять функции, описываемые формулой (5) без изменений, а в области  $z \geq 0$  эти решения должны быть модифицированы. В частности, мо-

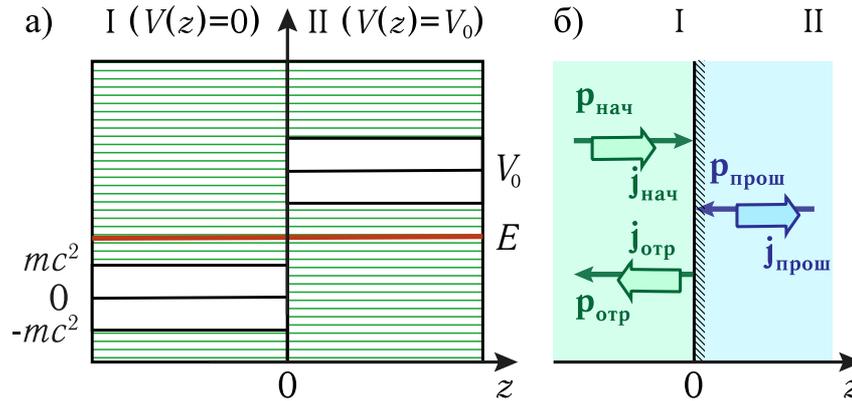


Рис. 4. Рассеяние частиц на потенциальной ступеньке: а — конфигурация уровней энергии, б — направления импульсов и токов для начальной, отраженной и прошедшей частицы (частица переходит из зоны I в зону II)

дуль энергии частицы  $E_p$  (см. (2) и (5)) необходимо заменить согласно соотношению

$$E_p = |E| \rightarrow E'_p = |E - V_0|, \quad (8)$$

то есть теперь  $E'_p$  — это абсолютное значение *кинетической энергии*. Соответствующую замену нужно осуществить также и в знаковом операторе  $\hat{\Lambda}$  (4). Таким образом, абсолютное значение трехмерного импульса частицы теперь будет вычисляться по формуле

$$p' = \frac{1}{c} \sqrt{E'^2_p - m^2 c^4} = \frac{1}{c} \sqrt{(E - V_0)^2 - m^2 c^4}. \quad (9)$$

Наибольший интерес представляет рассмотрение достаточно высокой ступеньки (1), для которой  $V_0 \geq E + mc^2$  (см. рис. 4). Именно в этом случае реализуется такая ситуация, когда состояния с различными знаками энергии оказываются разделенными *лишь пространственно*.

Действительно, как видно из рис. 4, а, электрон, имеющий *определенную* энергию  $E$ , находится в состоянии с положительным знаком энергии при  $z < 0$  (область I) и в состоянии с отрицательным знаком энергии при  $z \geq 0$  (область II). Но на самом-то деле (см. рис. 4) энергия электрона при этом — одна и та же! Значит, *при наличии взаимодействия* (в отличие от свободного случая) не может быть строгого разделения состояний на состояния с положительной и отрицательной энергией [16, 36]. Более того, возможен *переход* из нижнего континуума в верхний (или наоборот). Этот эффект и представляет собой *парадокс Клейна*. Заметим, что в данном случае для перехода из одного континуума состояний в другой электрону даже не потребуется туннелировать через классически запрещенную зону, поскольку классически запрещенная зона здесь отсутствует.

Найдем коэффициенты прохождения и отражения для рассеяния на потенциальной ступеньке (1). Бу-

дем считать, что начальный электрон с положительной спиральностью движется в области I в положительном направлении оси  $Oz$ , приближаясь к ступеньке слева. При этом энергия электрона положительная, поэтому (как для начальной, так и для отраженной частицы) направление импульса будет совпадать с направлением тока вероятности, как это изображено на рис. 4, б (см. соотношение (6)).

С другой стороны, из формулы (6), которая для области II принимает вид

$$j_z = \xi \frac{c^2 p'_z}{E'_p} \equiv \xi (v'_{\text{рел}})_z, \quad (10)$$

следует, что в области II (при  $\xi = -1$ ) направления тока вероятности и импульса частицы должны быть противоположны.

Уравнение непрерывности (в стационарном случае) требует сохранения проекции вектора плотности тока вероятности на ось  $z$ . Это означает, что направление тока вероятности для прошедшей в область II частицы должно совпадать с направлением тока для начальной частицы. Поэтому ток вероятности в области II должен быть направлен вдоль положительного направления оси  $z$ . Но это автоматически приводит к тому, что импульс частицы в прошедшей волне должен иметь направление, противоположное по отношению к направлению импульса начальной частицы, то есть он должен быть направлен *вдоль отрицательного направления* оси  $z$ ! Это есть простое следствие граничных условий при  $z = 0$  и явления «попятного» движения электрона в состоянии с отрицательным знаком энергии (см. рис. 4, б).

Имея в виду все эти обстоятельства, учитывая явный вид решений (5), условия (8) и (9), а также тот факт, что решения для отраженной и прошедшей волн могут представлять собой суперпозиции состояний с разными значениями спиральности, выберем решения для начальной, отраженной и прошедшей волн в виде

$$\psi_{\text{нач}} = a \frac{e^{ik_z z}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \frac{mc^2}{E_p}} \\ 0 \\ \sqrt{1 - \frac{mc^2}{E_p}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{\text{отр}} = b \frac{e^{-ik_z z}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{1 + \frac{mc^2}{E_p}} \\ 0 \\ \sqrt{1 - \frac{mc^2}{E_p}} \end{pmatrix} + b' \frac{e^{-ik_z z}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \frac{mc^2}{E_p}} \\ 0 \\ -\sqrt{1 - \frac{mc^2}{E_p}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\psi_{\text{прош}} = d \frac{e^{-ik'_z z}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{1 - \frac{mc^2}{E'_p}} \\ 0 \\ -\sqrt{1 + \frac{mc^2}{E'_p}} \end{pmatrix} + d' \frac{e^{-ik'_z z}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \frac{mc^2}{E'_p}} \\ 0 \\ \sqrt{1 + \frac{mc^2}{E'_p}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

где мы ввели обозначения:  $p = \hbar k$ ,  $p' = \hbar k'$ .

Решение должно быть непрерывно при  $z = 0$ , это следует из условия сохранения тока вероятности (см. выше). Поэтому имеем соотношение

$$\psi_{\text{нач}}(z = 0) + \psi_{\text{отр}}(z = 0) = \psi_{\text{прош}}(z = 0),$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} (a + b') \sqrt{1 + \frac{mc^2}{E_p}} &= d' \sqrt{1 - \frac{mc^2}{E'_p}}, \\ (a - b') \sqrt{1 - \frac{mc^2}{E_p}} &= d' \sqrt{1 + \frac{mc^2}{E'_p}}, \\ b &= d = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Используя соотношения (11), находим связи между коэффициентами  $a$ ,  $b'$  и  $d'$ . Для коэффициентов отражения и прохождения окончательно получаем

$$R = \frac{|j_z^{\text{отр}}|}{|j_z^{\text{нач}}|} = \left( \frac{1 - r}{1 + r} \right)^2, \tag{12}$$

$$T = \frac{|j_z^{\text{прош}}|}{|j_z^{\text{нач}}|} = \frac{4r}{(1 + r)^2}. \tag{13}$$

Здесь  $r$  — так называемый *кинематический фактор*:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{(E'_p + mc^2)(E_p + mc^2)}{(E'_p - mc^2)(E_p - mc^2)}} = \\ &= \frac{p' E_p + mc^2}{p E'_p - mc^2} = \frac{p'}{p} \frac{E + mc^2}{V_0 - E - mc^2}. \end{aligned} \tag{14}$$

Последнее равенство в (14) следует из того, что в нашем случае  $E'_p = |E - V_0| = V_0 - E$  (см. соотношение (8)), поскольку мы рассматриваем ступеньку, для которой  $V_0 \geq E + mc^2$ .

Из формулы (14) легко увидеть, что  $r \geq 1$ , поэтому всегда выполняются условия  $0 \leq R \leq 1$  и  $0 \leq T \leq 1$ . В свою очередь, из (12) и (13) следует, что всегда выполняется условие сохранения тока вероятности  $R + T = 1$ .

Таким образом, как следует из нашего рассмотрения, *никакого парадокса здесь нет!*

В связи с этим заметим, что при традиционном изложении парадокса Клейна (см., напр., [3, 4]) часто вовсе не учитывают явление «попятного» движения электрона в состоянии с отрицательным знаком энергии. В результате значение фактора  $r$  становится отрицательным, и, как следствие, отраженный поток частиц оказывается больше начального, а коэффициент отражения превышает единицу  $R > 1$ . Как говорилось выше, именно в связи с этими особенностями явление Клейна и было первоначально названо *парадоксом Клейна*.

Чтобы избежать этого эффекта, О. Клейн в своей оригинальной статье [2] по совету В. Паули ввел «руками» знак минус перед  $p'$  в формуле для фактора  $r$  (аналогичной нашей формуле (14)), полагая, что при извлечении корня в (9) следует выбрать отрицательное значение для  $p'$ . По идее Паули, это требовалось сделать для того, чтобы групповая скорость прошедших частиц (определяющая направление их распространения в области II)

$$v_{\text{гр}} = \frac{dE}{dp'} = \left( \frac{dp'}{dE} \right)^{-1} = \frac{c^2 p'}{E - V_0}$$

(см. (9)) была положительной при  $V_0 \geq E + mc^2$ .

Сегодня мы можем только удивляться тому, насколько точно Паули определил самое «тонкое» место в рассуждениях Клейна — ведь фактически речь шла о попытке учета «попятного» движения частицы в области II (хотя об этом не говорится прямо ни в оригинальной статье Клейна [2], ни в известных учебниках по квантовой механике, см. напр., [3–6]).

Подчеркнем, что в нашем изложении отсутствие парадокса обеспечивается надлежащим выбором исходных решений уравнения Дирака и корректным учетом явления «попятного» движения электрона в состоянии с отрицательным знаком энергии. В результате в нашей формуле (14)  $p'$  есть *модуль импульса* прошедших частиц, т. е.  $p' = |\mathbf{p}'|$ , поэтому никаких дополнительных знаков на последнем этапе расчета вводить не требуется.

Выражения для коэффициентов отражения и прохождения (12) и (13) допускают предельный переход к безмассовому случаю (некорректные выражения, приведенные в [3, 4] и др., не допускают такого предельного перехода). Действительно, в пределе  $m \rightarrow 0$  имеем

$$T \rightarrow 1, \quad R \rightarrow 0,$$

и эти результаты очень важны для теории графена и для других современных твердотельных приложений релятивистской квантовой механики, где носителями заряда являются безмассовые дираковские частицы (подробнее см. раздел 4). Например, обращение коэффициента отражения в ноль при нормальном падении на поверхность раздела имеет принципиальное значение в теории графена и называется *отсутствием рассеяния назад* [37, 38] (см. также [39]).

В связи с тем, что ничего «парадоксального» в явлении Клейна нет (разумеется, при корректном описании), в последнее время в литературе данное явление все чаще называют не *парадоксом Клейна*, а *клеяновским туннелированием* [7, 40]. Последний термин нельзя назвать очень удачным, поскольку в обычном квантово-механическом понимании здесь никакого «туннелирования» нет, так как отсутствует классически запрещенная зона, о чем мы говорили выше.

Итак, мы рассмотрели рассеяние дираковских частиц на одномерной потенциальной ступеньке при  $V_0 \geq E + mc^2$  (рис. 4). Заметим, что при тех же самых условиях (см. выше) можно рассмотреть также и обратный процесс, т. е. прохождение частицы из области II в область I. Действуя по аналогии и используя решения (5), легко восстановить явный вид решений уравнения Дирака для начальной, отраженной и прошедшей частицы в данных условиях. В результате мы получим для коэффициентов отражения и прохождения выражения, в точности совпадающие с результатами (12) и (13).

Заканчивая настоящий раздел, скажем несколько слов о *многочастичном* толковании полученных нами результатов. В соответствии с «дырочной» интерпретацией состояний с отрицательной энергией в теории Дирака ([41] 1930 г.) считается, что все уровни с отрицательными значениями энергии (см. рис. 1) первоначально были заполнены электронами в соответствии с принципом запрета Паули. Это значит, что вакуум представляет собой такое состояние, когда все уровни с отрицательной энергией заполнены, а все уровни с положительной энергией — свободны. При этом ни один добавочный электрон (опять же согласно принципу Паули) не может попасть в «море» дираковских частиц с отрицательной энергией.

Выше мы рассматривали коэффициенты отражения и прохождения для рассеяния электрона на одномерной потенциальной ступеньке. Полученные нами результаты для начальной частицы, приближающейся к ступеньке слева (переход из зоны I ( $V(z) = 0$ ) в зону II ( $V(z) = V_0$ ), см. рис. 4), были бы справедливы, если

в области II имелись незаполненные состояния в нижнем континууме, отвечающие энергии  $E$ . В противном случае частица просто не может попасть в зону II, поэтому она отражается от барьера.

Обратный переход (из области II в область I, рис. 4) возможен и при полностью заполненном нижнем континууме состояний в зоне II. Такой переход интерпретируется, как процесс рождения электрон-позитронной пары потенциальным барьером. При этом появляется электрон в области I в состоянии с положительной энергией и «дырка», отвечающая удалению электрона из нижнего континуума состояний в области II. Эта «дырка» интерпретируется, как античастица, т. е. позитрон.

При этом коэффициент прохождения  $T$  (13) (для прямого и обратного перехода он одинаков) представляет собой *вероятность рождения пары* потенциальной ступенькой. Заметим, что этот результат вполне согласуется с результатом точного расчета, проведенного в рамках квантовой электродинамики [12, 42].

#### 4. КЛЕЙНОВСКОЕ ТУННЕЛИРОВАНИЕ В ГРАФЕНЕ

В данном разделе мы обсудим явление *клеяновского туннелирования* для носителей заряда в графене. Пионерская работа, посвященная клеяновскому туннелированию в графене [37], была опубликована М.И. Кацнельсоном, К.С. Новосёловым и А.К. Геймом в 2006 г. Эта тема неоднократно поднималась и позже, см., например, [43, 44]. Отметим, что работа [44] представляет собой удачное педагогическое введение в данную тему, ниже мы будем частично следовать этой работе. Но вначале несколько слов о самом графене. Подчеркнем, что ниже будет рассматриваться только так называемый *однослойный* графен [39].

##### 4.1. Некоторые факты из теории графена

Графен — новый материал, полученный экспериментально А.К. Геймом и К.С. Новосёловым в 2004 г., представляет собой *двумерную структуру*, состоящую из атомов углерода, выстроенных в гексагональную кристаллическую решетку, т. е. решетку типа «пчелиные соты» (рис. 5, а). По существу, это *монокристаллический слой* (слой толщиной в один атом), образованный из атомов углерода. Наиболее распространенная аллотропная форма углерода — графит — фактически представляет собой стопку листов графена, относительно слабо связанных друг с другом силами Ван-дер-Ваальса.

Интересно, что теоретически структура графена была достаточно хорошо изучена задолго до его экспериментального открытия (первые научные работы по исследованию графена относились к 40–50 годам прошлого века).

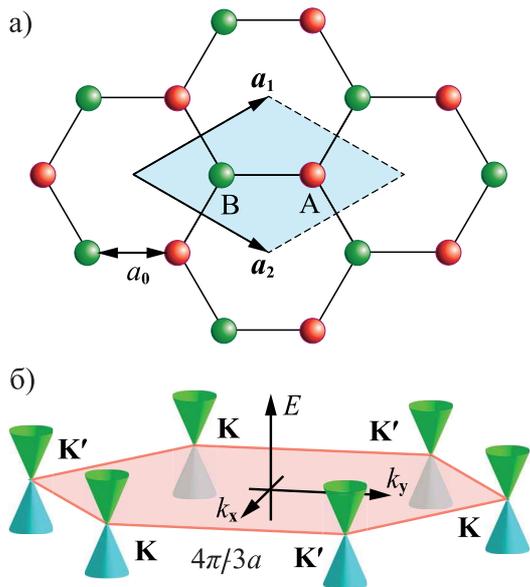


Рис. 5. а — Кристаллическая гексагональная решетка графена как совокупность двух треугольных подрешеток А и В. Голубым выделена элементарная ячейка; б — Первая зона Бриллюэна для графена. В окрестности точек Дирака **К** и **К'** дисперсионное соотношение является линейным, т. е. локально эквивалентным конусу Дирака

Кристаллическая структура графена изображена на рис. 5, а. Каждый атом углерода находится в окружении трех ближайших соседей и обладает четырьмя валентными электронами. Три валентных электрона формируют прочные ковалентные связи с соседними атомами. За низкоэнергетические электронные свойства графена отвечает четвертый валентный электрон, находящийся в состоянии с орбиталью, ориентированной перпендикулярно кристаллической плоскости (на рис. 5, а он не изображен). Таким образом, на каждый атом приходится один электрон, который может давать вклад в проводимость. Проводимость обеспечивается перескакиванием электронов с одного атома углерода на другой.

Гексагональная решетка состоит из двух взаимоперпендикулярных треугольных решеток Бравэ (обычно называемых А и В). Постоянные треугольных решеток равны  $a_1 = a_2 = a \approx 0,246$  нм (см., например, [45]), а расстояние между ближайшими соседними атомами углерода составляет  $a_0 = a/\sqrt{3} \approx 0,142$  нм.

Именно наличие двух подрешеток А и В приводит к тому, что электронная волновая функция в графене является двухкомпонентной, т. е. представляет собой *спинор*. Иными словами, электрон имеет помимо обычного спина 1/2 (которым в этой теории, как правило, пренебрегают) также и *псевдоспин* 1/2 — степень свободы, связанную с наличием двух подрешеток. Данную физическую величину называют *псевдоспином подрешетки*, соответствующая волновая функция определяет вероятность локализации электрона на подрешетке А или В.

Теоретические расчеты электронной зонной структуры графена были проведены впервые Ф.Р. Уоллесом в 1947 г. [46] с использованием приближения сильной связи. Первая зона Бриллюэна для графена, изображенная на рис. 5, б, имеет форму правильного шестиугольника с двумя неэквивалентными вершинами **К** и **К'**, называемыми *точками Дирака*. Дисперсионное соотношение для графена (см., например, [16, 39]) показывает, что энергия носителей заряда в графене  $E$  характеризуется *знаком* энергии  $\xi = \pm 1$ , здесь он называется *индексом зоны*:  $\xi = +1$  отвечает зоне проводимости, а  $\xi = -1$  — валентной зоне.

Как следует из рис. 5, б, зона проводимости и валентная зона соприкасаются друг с другом в точках Дирака **К** и **К'**. Точки Дирака вместе с их малыми окрестностями называют также *долинами* зоны проводимости. Из рис. 5, б видно, что в окрестности точек Дирака энергия *линейно* зависит от квазиимпульса, т. е. закон дисперсии в этом случае оказывается аналогичен закону дисперсии для безмассовой релятивистской частицы.

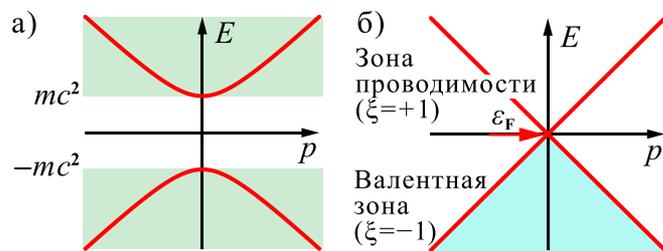


Рис. 6. Законы дисперсии а — для массивного дираковского электрона (2) и б — для электрона в графене (16)

Энергия Ферми химически чистого графена лежит точно в двух точках Дирака, а поверхность Ферми состоит только из двух точек: валентная зона заполнена электронами, а зона проводимости пуста (см. рис. 5, б и рис. 6).

#### 4.2. Уравнение Дирака для электронов в графене

Эффективное уравнение [47, 48], описывающее состояния электронов в графене, было получено в 1984 г. — также задолго до его экспериментального открытия. Оказывается, что при низких энергиях и вблизи дираковских точек **К** и **К'** электроны в графене могут быть описаны *двумерным безмассовым уравнением Дирака*. В стационарном случае и вблизи точки **К** уравнение имеет вид<sup>3</sup>

$$-i\hbar v_F(\hat{\sigma}\nabla)\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}). \quad (15)$$

<sup>3</sup> Уравнение, справедливое вблизи дираковской точки **К'**, отличается от (15) противоположным знаком в левой части.

Вывод данного *линеаризованного* уравнения исходя из приближения сильной связи можно найти во многих работах, см., например, [39, 49, 50].

В уравнении (15) приняты следующие обозначения:  $v_F \simeq 1 \cdot 10^6$  м/с — *скорость Ферми* в графене, которая играет роль *эффективной скорости света* ( $v_F \simeq c/300$ ) в гамильтониане уравнения (15). Далее,  $\hat{\sigma} = \{\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y\}$  — двумерный вектор, составленный из матриц Паули;  $\psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \psi_A(\mathbf{r}) \\ \psi_B(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$  — двухкомпонентная волновая функция электрона и  $-i\hbar\nabla = \hat{\mathbf{p}}$  — оператор импульса в координатном представлении.

Две компоненты волновой функции  $\psi(\mathbf{r})$  (т. е.  $\psi_A(\mathbf{r})$  и  $\psi_B(\mathbf{r})$ ) относятся к двум атомам А и В в элементарной ячейке (см. рис. 5, а) и описывают состояния, в которых частица локализована на подрешетках А и В. Из уравнения (15) следует дисперсионная зависимость

$$E = \pm v_F |\mathbf{p}| = \xi v_F |\mathbf{p}| = \xi v_F \hbar |\mathbf{k}|, \quad (16)$$

которая характерна для частиц Дирака с нулевой массой, в частности, для *безмассового нейтрино* (см., например, [16]), если в законе дисперсии для нейтрино осуществить замену  $c \rightarrow v_F$ .

Сравнивая законы дисперсии для дираковского электрона (2) и для электрона в графене (16), изображенные на рис. 6, мы видим два существенных отличия:

1. электроны в графене *безмассовы*, поэтому для них полностью отсутствует запрещенная зона энергий
2. роль скорости света  $c$  в уравнении (16) играет скорость Ферми  $v_F$ .

Кроме того, разумеется, нужно помнить, что уравнение для электронов в графене *двумерно* в отличие от «обычного» уравнения Дирака, а также тот факт, что уравнение (15) имеет приближенный характер: при его выводе используется условие  $|\mathbf{k}|a \ll 1$ , см. [49, 50], поэтому уравнение справедливо при малых импульсах, а также в медленно меняющихся внешних полях.

Все это внушает надежду на то, что многие особенности поведения двумерных электронов в графене могут быть поняты на основе анализа поведения безмассовых частиц в релятивистской квантовой механике. Формальная аналогия между ультрарелятивистскими частицами и электронами в графене превращает графен в удобную *модель* для изучения различных квантовых релятивистских эффектов.

Волновая функция, удовлетворяющая уравнению (15) и описывающая состояние свободного электрона в графене в долине  $\mathbf{K}$  с импульсом  $\mathbf{p}$ , имеет вид плоской волны

$$\psi_{\mathbf{p}, \xi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2S}} e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\mathbf{r})} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi e^{i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Здесь  $\xi = \pm 1$  — *индекс зоны*, т. е. при  $\xi = +1$  электрон находится в зоне проводимости, а при  $\xi = -1$  — в валентной зоне. Угол  $\varphi$  есть полярный угол импульса

в плоскости графена, т. е.  $\varphi = \text{arctg}(p_y/p_x)$ . Функция (17) нормирована на полную площадь листа графена  $S$ , в дальнейшем для упрощения вычислений можно принять, что  $S = 1$ .

Прежде всего нас будет интересовать поведение электрона *в валентной зоне*. Напомним, что в валентной зоне энергия электрона отрицательна, т. е. выполняется условие  $\xi = -1$  (см. формулы (16) и (17)).

Вычислим плотность тока вероятности для состояния, описываемого волновой функцией (17). Для «двумерного» свободного электрона (вблизи дираковской точки  $\mathbf{K}$ ) имеем выражение

$$\mathbf{j} = v_F \psi^+(\mathbf{r}) \hat{\sigma} \psi(\mathbf{r}), \quad (18)$$

которое полезно сравнить с соответствующим выражением для дираковского массивного электрона (6). Учитывая соотношения (18) и (17), найдем

$$\mathbf{j} = \xi v_F \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = \xi v_F \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}. \quad (19)$$

По поводу данного результата заметим следующее. Во-первых, выражение (19) может быть получено предельным переходом  $m \rightarrow 0$  из соответствующего выражения для плотности тока вероятности «массивного» трехмерного свободного электрона (6).

Во-вторых, из выражения (19) следует, что для двумерных безмассовых электронов Дирака в графене (как и в трехмерном массивном случае) имеет место явление «попятного движения». То есть, при движении в валентной зоне ( $\xi = -1$ ) *ток вероятности направлен противоположно импульсу* частицы. Данное явление представляет собой полный аналог соответствующего явления, характерного для массивного электрона, которое мы подробно обсуждали выше в разделах 1 и 3.

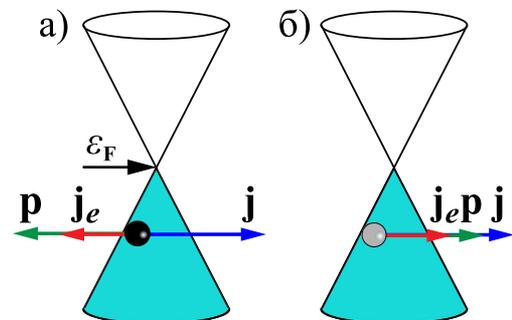


Рис. 7. Сравнение электрона (а) и дырки (б), движущихся в валентной зоне

При интерпретации явления «попятного движения», как и в случае дираковского массивного электрона, возможны одночастичный и многочастичный подходы. В рамках многочастичного подхода вместо электронов, как это и принято в твердотельных системах, рассматриваются *дырки*, при этом предполагается, что электрический ток дырок направлен противоположно току электронов.

Более подробно: электрон, движущийся в валентной зоне, имеет отрицательный заряд  $-e$  и отрицательную кинетическую энергию (отсчитанную от точки Дирака)  $E_e = -|E_{\text{кин}}|$  (т. е.  $\xi = -1$ ). Он характеризуется током вероятности, направленным противоположно его импульсу  $\mathbf{j} = -v_F \mathbf{p}_e / |\mathbf{p}_e|$ , и переносит электрический ток с плотностью  $-e\mathbf{j}$ , совпадающий по направлению с его импульсом (см. рис. 7, а).

Электрон в валентной зоне следует отличать от дырки, которая соответствует удалению электрона из полностью заполненной валентной зоны. Дырка в валентной зоне имеет положительный заряд  $+e$ , ее кинетическая энергия положительна  $E_d = -E_e$ , импульс дырки противоположен импульсу электрона  $\mathbf{p}_d = -\mathbf{p}_e$ . Дырка характеризуется током вероятности, совпадающим по направлению с током вероятности электрона, а электрический ток, переносимый дыркой  $e\mathbf{j}$ , противоположен по направлению электрическому току электрона (см. рис. 7, б).

Отсюда следует, что при рассмотрении клейновского туннелирования (см. раздел 4) начальный электрон, падающий на потенциальную ступеньку (см. рис. 8, б), продолжает свое движение внутри ступеньки именно как электрон, а не превращается в дырку, как это иногда утверждается (см., напр., [51]). Действительно, превращение электрона в дырку привело бы к нарушению закона сохранения электрического тока. Однако, сохранение тока вероятности приводит к тому, что электрон должен обратить свой импульс при переходе из зоны проводимости (область «вне ступеньки») в валентную зону (область «внутри ступеньки») [44]. Напомним, что аналогичными соображениями мы руководствовались при рассмотрении парадокса Клейна в разделе 3.

### 4.3. Прямоугольная потенциальная ступенька

Для исследования клейновского туннелирования нам необходимо рассмотреть динамику электронов в графене в присутствии внешнего потенциала  $V(\mathbf{r})$ . При помощи такого потенциала можно описать, в частности, потенциальную ступеньку, используемую в настоящем разделе.

Потенциал  $V(\mathbf{r})$  должен удовлетворять ряду требований [44]. Основное требование состоит в том, чтобы включение потенциала в уравнение (15) не нарушило те приближения, которые были использованы при его выводе. Прежде всего, потенциал должен быть функцией, медленно меняющейся на расстояниях порядка постоянной решетки  $a \simeq 0,246$  нм. В этом случае можно пренебречь междолинным рассеянием, поэтому потенциал  $V(\mathbf{r}) = V(x, y)$  можно ввести в уравнение, описывающее динамику электронов в одной долине.

Потенциал  $V(\mathbf{r})$  должен быть медленно меняющейся функцией также и на расстояниях  $\sim a_0$  между ближайшими соседними атомами углерода А и В, поэтому матрицу потенциала можно считать диагональ-

ной в пространстве подрешеток:  $V(x, y) \rightarrow V(x, y) \otimes \hat{1}$ . Имея в виду, что потенциалы, используемые для моделирования  $pr$ - и  $prp$ -переходов в графене, являются одномерными, можно считать, что  $V(x, y) = V(x)$ . Следовательно, в таких системах будет иметь место трансляционная инвариантность вдоль направления оси  $y$ . В итоге, в присутствии внешнего потенциала гамильтониан, отвечающий уравнению (15), примет вид

$$\hat{H} = v_F(\hat{\sigma}\hat{p}) + V(x) \otimes \hat{1} = \hat{H}_{\text{кин}} + V(x) \cdot \hat{1}. \quad (20)$$

Потенциал  $V(x)$ , в свою очередь, может быть резко изменяющейся или сглаженной функцией на расстояниях, сравнимых с фермиевской длиной волны

$$\lambda_F = \frac{\hbar}{p_F} = \frac{\hbar v_F}{\varepsilon_F} \simeq \frac{\hbar v_F}{|E_{\text{кин}}|}, \quad (21)$$

где  $p_F$  — импульс Ферми,  $\varepsilon_F$  — энергия Ферми, кинетическая энергия частицы  $E_{\text{кин}}$  определена ниже.

Если потенциал  $V(x)$  изменяется резко, то он может быть аппроксимирован кусочно-постоянной функцией («прямоугольные» потенциальные ступеньки и барьеры, см. рис. 8, б). Заметим, что если  $V(x)$  принимает значение, равное константе (например,  $V_0$ ) для некоторой области изменения переменной  $x$  (рис. 8, б), то соответствующая волновая функция (собственная функция гамильтониана (20)) будет иметь вид, аналогичный функции (17), в которой нужно произвести замену  $E \rightarrow E_{\text{кин}} = E - V_0$ . Поэтому квантовое число  $\xi$  теперь будет определяться как  $\xi = \text{sgn}(E_{\text{кин}}) = \text{sgn}(E - V_0)$ . Напомним, что аналогичным путем мы действовали в разделе 3 при рассмотрении парадокса Клейна для массивных электронов.

Как упоминалось выше, в химически чистом графене энергия Ферми лежит в точке Дирака. Прикладывая к образцу графена дополнительное напряжение различной полярности, можно сдвигать ее в зону проводимости или в валентную зону, тем самым допируя (т. е. насыщая) графен электронами или дырками (рис. 8). Если допирование таково, что энергия Ферми лежит в разных зонах до и после потенциальной ступеньки, то мы получаем биполярный переход (например, на рис. 8 изображена схема  $pr$ -перехода).

Добавим к этому, что напряжение, которое вызывает движение заряженных частиц в образце графене, обычно невелико. Вследствие этого вклад в проводимость дают только состояния, обладающие энергией, близкой к энергии Ферми. Этот факт мы учли в формуле (21) и будем учитывать ниже в данном разделе.

Рассмотрим рассеяние электронов в графене на прямоугольной потенциальной ступеньке, которая описывается потенциалом

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ V_0, & x \geq 0. \end{cases} \quad (22)$$

Схема явления приведена на рис. 8. Из рис. 8, б следует, что начальный электрон с энергией  $E \simeq \varepsilon_F > 0$  па-

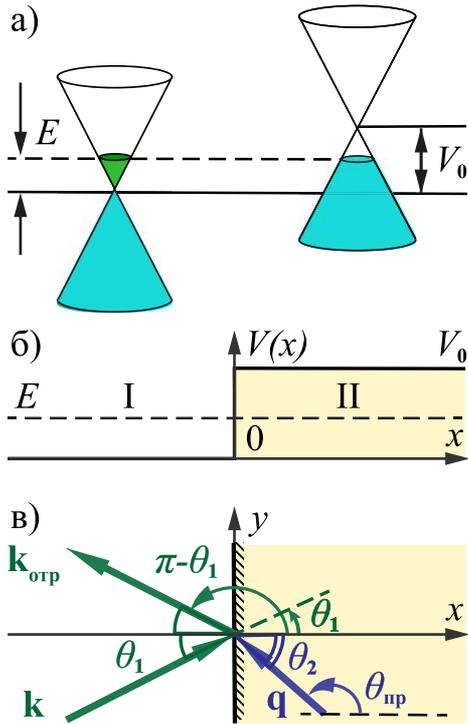


Рис. 8. Клейновское туннелирование через прямоугольную ступеньку при  $0 < E < V_0$ : а — расположение зоны проводимости и валентной зоны; б — общая схема явления; в — волновые векторы для падающего ( $\mathbf{k}$ ), отраженного ( $\mathbf{k}_{\text{отр}}$ ) и прошедшего ( $\mathbf{q}$ ) электрона

дает на прямоугольную потенциальную ступеньку высоты  $V_0 > E$  и при этом переходит из зоны проводимости ( $\xi = +1$ ) в валентную зону ( $\xi = -1$ ), см. также рис. 8, а. Таким образом, здесь мы имеем *np*-переход.

Рис. 8, в поясняет принятые обозначения:  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}_{\text{отр}}$  и  $\mathbf{q}$  — волновые векторы падающего, отраженного и прошедшего электрона. Модули этих величин выражаются через энергию и высоту ступеньки следующим образом:

$$k = |\mathbf{k}| = |\mathbf{k}_{\text{отр}}| = \frac{|E_{\text{кин}}|}{\hbar v_F} = \frac{E}{\hbar v_F},$$

$$q = |\mathbf{q}| = \frac{|E_{\text{кин}}|}{\hbar v_F} = \frac{V_0 - E}{\hbar v_F}. \quad (23)$$

Заметим, что углы на рис. 8, в отсчитываются от положительного направления оси  $x$ . Мы видим, что для прошедшего электрона, движущегося в валентной зоне (когда  $\xi = \text{sgn}(E_{\text{кин}}) = \text{sgn}(E - V_0) = -1$ ), направление импульса электрона противоположно направлению тока вероятности.

При выборе потенциала в виде (22) в нашей системе (как говорилось выше) имеется *трансляционная инвариантность* вдоль направления оси  $y$ . Вследствие этого все три волновых вектора  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}_{\text{отр}}$  и  $\mathbf{q}$  должны иметь равные проекции на ось  $y$ :

$$k_y = k_y^{\text{отр}} = q_y. \quad (24)$$

Первое равенство из формулы (24) дает закон отражения (см. рис. 8, в):  $\theta_{\text{отр}} = \pi - \theta_1$ , где  $\theta_1$  — угол падения. Второе равенство в (24) дает закон преломления (аналог закона Снеллиуса в оптике, см. рис. 8, в):

$$E \sin \theta_1 = (V_0 - E) \sin \theta_{\text{пр}}. \quad (25)$$

Условие (25) записано для волновых векторов (или для импульсов), и соответствующий показатель преломления — положительный. Если же мы запишем закон преломления для векторов тока вероятности (аналог закона преломления для лучей в оптике, см. раздел 3), то мы увидим, что данное преломление является *аномальным*, то есть соответствующий лучевой коэффициент преломления отрицателен.

С этой целью нужно определить угол преломления (в зоне II по рис. 8, б) как полярный угол вектора  $-\mathbf{q}$ , а не вектора  $\mathbf{q}$ , поскольку в области II импульс прошедшего электрона и его вектор тока вероятности имеют противоположные направления вследствие явления «попятного» движения. Поэтому для преломленной волны положим  $\theta_2 \equiv \theta_{\text{пр}} - \pi$ , см. рис. 8, в. Тогда вместо (25) мы получим

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = -\frac{V_0 - E}{E} = \frac{E - V_0}{E} = n < 0. \quad (26)$$

Таким образом, область II по рис. 8, б, где электрон движется в валентной зоне, представляет для него «*левую среду*» (или «*среду Веселаго*»), см. раздел 3.

Выберем волновые функции для начального, отраженного и прошедшего электрона, руководствуясь известным видом решения уравнения Дирака для графена (17), учитывая замечания о введении потенциалов, а также рис. 8, в. В итоге имеем

$$\psi_{\text{нач}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{ik_y y} e^{ik_x x} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\theta_1} \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$$\psi_{\text{отр}} = r \frac{e^{ik_y y} e^{-ik_x x}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i(\pi - \theta_1)} \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$\psi_{\text{пр}} = t \frac{e^{ik_y y} e^{iq_x x}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{i\theta_{\text{пр}}} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Решение должно быть непрерывно при  $x = 0$ , поэтому мы имеем соотношение

$$\psi_{\text{нач}}(x=0) + \psi_{\text{отр}}(x=0) = \psi_{\text{пр}}(x=0), \quad (30)$$

Для вычисления коэффициентов прохождения  $T$  и отражения  $R$  используем обычные формулы:

$$T = \frac{|j_x^{\text{пр}}|}{|j_x^{\text{нач}}|}, \quad R = \frac{|j_x^{\text{отр}}|}{|j_x^{\text{нач}}|},$$

откуда с учетом (27)–(29) и (30) получаем [44]

$$T = -\frac{\cos \theta_1 \cos \theta_{\text{пр}}}{\sin^2 \left( \frac{\theta_1 + \theta_{\text{пр}}}{2} \right)}, \quad R = \frac{\cos^2 \left( \frac{\theta_1 - \theta_{\text{пр}}}{2} \right)}{\sin^2 \left( \frac{\theta_1 + \theta_{\text{пр}}}{2} \right)}. \quad (31)$$

Для того, чтобы можно было использовать результаты (31) *практически*, необходимо знать формулу связи для угла  $\theta_{\text{пр}}$ , характеризующего прошедший электрон и угла  $\theta_1$ , отвечающего начальному электрону. Формула связи выводится из (26) и имеет следующий вид:

$$\theta_{\text{пр}} = \theta_2 + \pi = \arcsin\left(\frac{E}{E - V_0} \sin \theta_1\right) + \pi. \quad (32)$$

Наличие знака «минус» в формуле (31) для коэффициента  $T$  не должно вызывать беспокойства, поскольку угол  $\theta_{\text{пр}}$  — тупой, а, значит,  $\cos \theta_{\text{пр}} \leq 0$ , т. е.  $T \geq 0$ . На основании (31) нетрудно убедиться в справедливости соотношения  $T + R = 1$ .

Выражение для коэффициента прохождения  $T$  можно записать и в другом виде, если подставить в (31) значение угла  $\theta_{\text{пр}}$ , выразив его через  $\theta_2$  согласно формуле (32). В этой форме записи коэффициент прохождения будет зависеть от угла  $\theta_2$  [52, 53], то есть

$$T = \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\cos^2\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)}, \quad \theta_2 = \arcsin\left(\frac{E}{E - V_0} \sin \theta_1\right). \quad (33)$$

В таком виде эту формулу обычно используют экспериментаторы.

Обсудим некоторые выводы из полученных результатов.

1) При нормальном падении ( $\theta_1 = 0$ ) начального электрона на границу раздела ( $x = 0$ ) коэффициент прохождения стремится к единице:

$$T(\theta_1 = 0) = 1. \quad (34)$$

Это — важнейшее свойство, которое характеризует клейновское туннелирование электронов в графене: потенциальный барьер (или ступенька) *полностью проходим* для электронов (при нормальном падении) при любой высоте барьера.

2) При выполнении соотношения (34) должно также выполняться условие

$$R(\theta_1 = 0) = 0. \quad (35)$$

Свойство (35) называется *отсутствием рассеяния назад* [37, 44] (см. также [39]). Объяснение данного явления связано с *сохранением спиральности* при туннелировании. Оператор спиральности (точнее, *псевдоспиральности*), так как матрицы  $\hat{\sigma}$  не имеют отношения к спину) в двумерном случае имеет вид  $(\hat{\sigma}\mathbf{p})/|\mathbf{p}|$  и линейно связан с гамильтонианом  $\hat{H} = v_F(\hat{\sigma}\mathbf{p})$  (см. (15)), поэтому спиральность — интеграл движения. Если бы электрон совершил рассеяние назад, то вследствие изменения направления импульса ( $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ ) он должен был бы оказаться в состоянии с противоположной спиральностью ( $s \rightarrow -s$ ). Но в силу наличия связи между спиральностью и индексом зоны (в данном случае  $s = \xi$ , см. [16]) это означало бы, что он одновременно переходит из зоны проводимости в валентную зону ( $\xi \rightarrow -\xi$ ). Ясно, что это противоречит физической картине явления. Поэтому рассеяние назад невозможно.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы рассмотрели с единых позиций парадокс Клейна для дираковского электрона и клейновское туннелирование для носителей заряда в графене. Ключевым моментом нашего рассмотрения стал корректный учет явления «попятного движения», которое характерно для движения дираковских частиц в состояниях с отрицательным знаком энергии.

Интересно, что в разные годы различные авторы объясняли по-разному, в чем именно проявляется «парадоксальность» явления Клейна.

На сегодняшнем уровне понимания стало очевидным, что ничего парадоксального в первоначальной постановке проблемы Клейном [2] нет — при корректной постановке задачи получаются корректные результаты.

Исследователи, интересующиеся графеном, обычно говорят, что парадокс состоит в том, что релятивистская частица может пройти через потенциальный барьер любой высоты и ширины с единичной вероятностью [37, 39]. Но, как мы видели, и в этом нет никакого парадокса: дело в том, что в графене полностью отсутствует запрещенная зона, масса носителей заряда равна нулю. Это и объясняет туннелирование с коэффициентом прохождения  $T = 1$ .

По-видимому, наиболее правильное определение того, в чем именно заключается парадокс Клейна, состоит в следующем. *При наличии взаимодействия* с внешним потенциалом (в отличие от свободного случая) нет и не может быть строгого разделения состояний на состояния с положительной и отрицательной энергией [16, 36]. Более того, возможны *переходы* из состояний с положительной энергией в состояния с отрицательной энергией (или наоборот). Этот эффект и представляет собой парадокс Клейна.

Клейновское туннелирование в графене сегодня исследуется экспериментально. Литература на эту тему весьма обширна, и более полный список публикаций по данной теме можно найти, например, в [44, 54]. Рассматриваются *pr*- и *prt*-переходы, отвечающие потенциальным ступенькам и барьерам различной степени сглаженности, угловая зависимость коэффициента прохождения исследуется в [55], измерению отрицательного коэффициента преломления и исследованию «линзы» Веселаго в графене посвящена работа [56]. Существенно, что экспериментальные данные находятся в уверенном согласии с теоретическими предсказаниями.

## Благодарности

Автор выражает благодарность профессору А. В. Борису за полезные обсуждения работы.

**Приложение А: ПАРАДОКС КЛЕЙНА ДЛЯ  
УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ФОКА–ГОРДОНА**

При чтении настоящей статьи может возникнуть естественный вопрос. В статье мы рассматриваем парадокс Клейна для уравнения Дирака (собственно говоря, задача, рассмотренная в 1929 г. Клейном, касалась именно уравнения Дирака). Однако всем известно, что кроме уравнения Дирака, описывающего релятивистские частицы со спином 1/2 (в нашем случае электроны) существует также уравнение Клейна–Фока–Гордона, описывающее бозоны с нулевым спином. В этой теории, как и в теории Дирака, возникают состояния с отрицательным знаком энергии. Существует ли аналог парадокса Клейна для бозонов?

Запишем уравнение Клейна–Фока–Гордона для свободного движения:

$$\left\{ \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right\} \Psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (A1)$$

где  $\Delta \equiv \nabla^2$  — оператор Лапласа. В одномерном случае нужно заменить  $\Delta \rightarrow \partial^2/\partial x^2$ . Уравнение (A1) было получено в 1926 году независимо О. Клейном [57], В.А. Фоком [58], В. Гордоном [59] и еще целым рядом ученых. Весьма интересная история рождения этого уравнения детально рассматривается в работе [60].

Следует упомянуть, что уравнение (A1) обладает определенными недостатками. Во-первых, (как и уравнение Дирака) данное уравнение имеет решения с отрицательным знаком энергии, т. е. можно положить (по аналогии с (2))  $E = \xi E_p$ ,  $E_p = |E|$ , где  $\xi = \pm 1$  — знак энергии. Во-вторых, уравнение непрерывности, следующее из уравнения (A1), имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \text{div } \mathbf{j} = 0, \quad (A2)$$

причем

$$\mathbf{j} = \frac{i\hbar}{2m} \{ (\nabla \Psi^*) \Psi - \Psi^* \nabla \Psi \}, \quad (A3)$$

$$\rho = \frac{\hbar}{2mic^2} \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial t} \Psi^* \right) \Psi - \Psi^* \frac{\partial}{\partial t} \Psi \right\}. \quad (A4)$$

Анализ соотношения (A4) показывает, что вычисленная таким образом величина, которой хотелось бы придать смысл плотности вероятности, не является положительно определенной. Поскольку уравнение (A1) содержит вторую производную по времени, то оно допускает независимое задание в начальный момент времени  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  и  $\dot{\Psi}(\mathbf{r}, t)$ . Отсюда и следует законченность величины  $\rho(\mathbf{r}, t)$ .

В 1934 г. Паули и Вайскопф [61] показали, что никаких трудностей с интерпретацией уравнения не возникает, если уравнение Клейна–Фока–Гордона рассматривать как *уравнение поля* и провести его вторичное квантование. Они показали, что плотность тока  $\mathbf{j}$

следует интерпретировать как *плотность электрического тока*, а величину  $\rho$  следует рассматривать как *плотность заряда*, а не как плотность вероятности. Таким образом, уравнение (A2) выражает собой закон сохранения электрического заряда. Число частиц при этом, вообще говоря, *не сохраняется* — возможны процессы с изменением числа частиц: рождение пар частиц с противоположными знаками заряда и аннигиляция. Таким образом, мы имеем «теорию одного заряда» вместо «теории одной частицы». Поскольку требуется выход за рамки одночастичного приближения, то последовательное рассмотрение таких процессов возможно только в квантовой теории поля. Работа Паули и Вайскопфа посвящена именно многочастичной интерпретации уравнения Клейна–Фока–Гордона.

Существует также и «одночастичная» форма этого уравнения [62], в которой используется двухкомпонентная волновая функция в двумерном зарядовом пространстве с индефинитной метрикой. Норма вектора состояния равна +1 для положительно заряженной частицы и –1 для отрицательно заряженной. Эти две компоненты возникают в результате рассмотрения волновой функции и ее первой производной по времени как независимых объектов. В результате мы приходим к уравнению первого порядка по времени, что и позволяет определить гамильтониан системы. Эта форма уравнения Клейна–Фока–Гордона подробно обсуждается в современных учебниках по квантовой механике [6, 63, 64].

Действительно, нетрудно убедиться, что подстановка вида

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \left\{ \Psi + \frac{i\hbar}{mc^2} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\} \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} \left\{ \Psi - \frac{i\hbar}{mc^2} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\}$$

позволяет записать уравнение Клейна–Фока–Гордона (A1) в матричной (двухкомпонентной) форме:

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \hat{H}_0 \Phi, \quad \text{где}$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{H}_0 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} (\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2) + mc^2 \hat{\tau}_3. \quad (A5)$$

Здесь  $\hat{\tau}_i \equiv \hat{\sigma}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — обычные матрицы Паули. Следует иметь в виду, что двухкомпонентность волновой функции *не связана со спином* — уравнение описывает бесспиновые частицы!

Волновая функция  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  в данном формализме нормируется условием (см. выше)

$$\int \rho d^3x = \int \Phi^+ \hat{\tau}_3 \Phi d^3x = \int (\varphi_1^* \varphi_1 - \varphi_2^* \varphi_2) d^3x = \pm 1. \quad (A6)$$

Выражение для плотности тока (A3) переписывается в виде

$$\mathbf{j} = \frac{i\hbar}{2m} \{ (\nabla \Phi^*) \hat{\tau}_3 (\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2) \Phi - \Phi^* \hat{\tau}_3 (\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2) \nabla \Phi \}. \quad (A7)$$

Приведем также решение уравнения (A5), описывающее свободное движение частицы со спином 0 в объеме  $V$  и с определенным знаком энергии  $\xi = \pm 1$  (см.

[62, 63])

$$\Phi_{\mathbf{p},\xi}(\mathbf{r}, t) = \frac{\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(\xi E_p t - \mathbf{p}\mathbf{r})\right\}}{2\sqrt{E_p mc^2 V}} \begin{pmatrix} mc^2 + \xi E_p \\ mc^2 - \xi E_p \end{pmatrix}. \quad (\text{A8})$$

Условие нормировки и плотность тока для состояний (A8) будут иметь вид (см. соотношения (A6) и (A7))

$$\int \Phi_{\mathbf{p},\xi}^+ \widehat{\tau}_3 \Phi_{\mathbf{p},\xi} d^3x = \xi, \quad \mathbf{j} = \frac{\mathbf{p}c^2}{E_p}. \quad (\text{A9})$$

Подведем краткий итог. Многочастичный характер теории отчетливо проявляется и в двухкомпонентном представлении: состояние с отрицательной энергией нормируется так же, как и состояния античастицы (A6). В этом — большое отличие от теории Дирака, в которой можно было последовательно провести одночастичную интерпретацию, и можно было говорить о состоянии частицы с отрицательным знаком энергии. Античастицу в теории Дирака изображала дырка, которая отвечала удалению частицы из моря Дирака. Здесь же (т. е. в теории Клейна–Фока–Гордона) переход в состояние с отрицательной энергией автоматически означает переход к античастице. К тому же, как видно из формулы (A9), в теории Клейна–Фока–Гордона отсутствует явление *попятного движения*, т. е. при любом знаке энергии ток сонаправлен импульсу (частица с отрицательной энергией ведет себя, как дырка в теории Дирака, см. рис. 7).

Парадокс Клейна для теории Клейна–Фока–Гордона был впервые рассмотрен в работе Р. Винтера [65] в 1955 г. Детальные рассуждения на эту тему присутствуют и в работе [66], некоторые исследователи обращались к этой проблеме и позже.

Исчерпывающий анализ и решение парадокса Клейна для уравнения Клейна–Фока–Гордона в рамках многочастичного подхода было дано А.И. Никишовым [10]. В рамках одночастичного подхода, по-видимому, данная задача не имеет окончательного решения ввиду принципиально многочастичного характера самого уравнения.

Для иллюстрации парадокса обычно рассматривают одномерное рассеяние на традиционной «клейнов-

ской» ступеньке (1). Как и обычно, решения выбираются так, чтобы в области  $z < 0$  присутствовали падающая (с импульсом  $\mathbf{p}$ ) и отраженная (с импульсом  $-\mathbf{p}$ ) волны, а в области  $z \geq 0$  — была только прошедшая волна с импульсом  $\mathbf{p}' \uparrow \uparrow \mathbf{p}$  (см. (A9)). Такой выбор диктуется отсутствием явления *попятного движения*. Далее нужно выбрать, в рамках какого формализма вести расчеты: можно взять за основу либо исходное уравнение Клейна–Фока–Гордона (A1) либо уравнение в двухкомпонентной форме (A5). Необходимо подчеркнуть, что при использовании обоих методов получаются совершенно одинаковые результаты (хотя в литературе иногда утверждается обратное).

В итоге, для коэффициентов отражения ( $R$ ) и прохождения ( $T$ ) получаем формулы (как и в случае электрона считается, что  $V_0 \geq E + mc^2$ )

$$R = \left(\frac{p - p'}{p + p'}\right)^2, \quad T = \frac{4pp'}{(p + p')^2}, \quad (\text{A10})$$

которые очень сильно напоминают соответствующие результаты в нерелятивистской теории, а импульс  $p'$  можно найти по формуле (9), как и для дираковского электрона.

Может возникнуть вопрос: а где же здесь парадокс? Дело в том, что выбранные нами условия, вообще говоря, противоречат физической картине: ввиду того, что групповая и фазовая скорости частицы в области барьера должны быть противоположны (см. раздел 3), нужно было бы обратить прошедший импульс так, как по совету Паули это сделал Клейн в своей статье. Но в этом случае мы получим  $T < 0$  и  $R > 1$  — т. е. типично «парадоксальное» поведение.

Добавим к этому, что существует большое количество работ, авторы которых утверждают, что они разрешили парадокс Клейна. Однако они достигают этого ценой разных «доработок» существующей теории (вплоть до замены исходных уравнений), см., например, [67, 68]. Мы избегали цитирования подобных работ, поскольку прежде всего нас интересовало, как данный парадокс может быть разрешен в рамках действующей теории.

- [1] Dirac P.A.M. // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1928. **117**. 610. Перевод: Дирак П.А.М. Собрание научных трудов. Т. II. Квантовая теория. / под общ. ред. А. Д. Суханова. М.: Физматлит, 2003. С. 327.
- [2] Klein O. // Z. Phys. 1929. **59**. 157. Перевод на англ.: Klein O. The Oskar Klein memorial lectures. Vol. 2. Singapore: World Scientific Publishing, 1994. P. 131.
- [3] Бьёркен Дж.Д., Дрелл С.Д. Релятивистская квантовая теория, Т. 1. Релятивистская квантовая механика: пер. с англ. / Под ред. В. Б. Берестецкого. М.: Наука, 1978. 296 с.
- [4] Ицксон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля: пер. с англ. / Под ред. Р. М. Мир-Касимова.

- М.: Мир, 1984. Т. 1. 448 с.
- [5] Sakurai J.J. Advanced Quantum Mechanics. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1967. 347 p.
- [6] Schwabl F. Advanced Quantum Mechanics. Fourth edition. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 405 p.
- [7] Caloggeracos A., Dombey N. // Contemp. Phys. 1999. **40**, no. 5. 313.
- [8] Dombey N., Caloggeracos A. // Phys. Rept. 1999. **315**. 41.
- [9] Holstein B.R. // Am. J. Phys. 1998. **66**. 507.
- [10] Nikishov A.I. // Nucl. Phys. B. 1970. **21**. 346.
- [11] Hansen A., Ravndal F. // Physica Scripta. 1981. **23**. 1036.
- [12] Gavrillov S.P., Gitman D.M. // Phys. Rev. D. 2016. **93**.

- 045002.
- [13] *Nitta H., Kudo T., Minowa H.* // Am. J. Phys. 1999. **67**, no. 11. 966.
- [14] *Novoselov K.S., Geim A.K., Morozov S.V. et al.* // Science. 2004. **306**. 666.
- [15] *Novoselov K.S., Jiang D., Schedin F. et al.* // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2005. **102**, no. 30. 10451.
- [16] *Тернов А.И.* Основы релятивистской квантовой механики. М. : МЦНМО, 2024. 288 с.
- [17] *Соколов А.А., Тернов И.М.* Релятивистский электрон. 2-е, перераб. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. 304 с.
- [18] *Белоусов Ю.М., Бурмистров С.Н., Тернов А.И.* Задачи по теоретической физике. Долгопрудный : Издательский дом «Интеллект», 2013. 584 с.
- [19] *Паули В.* Общие принципы волновой механики: пер. с нем. К.В. Никольского. М.-Л. : ОГИЗ Гостехиздат, 1947. 332 с.
- [20] *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Квантовая электродинамика. 4-е испр. М. : Физматлит, 2002. 720 с.
- [21] *Бурмистров С.Н.* Основы электродинамики сплошных сред. Долгопрудный : Издательский дом «Интеллект», 2018. 256 с.
- [22] *Веселаго В.Г.* // УФН. 1967. **92**, № 3. С. 517.
- [23] *Lamb H.* // Proc. London Math. Soc. Ser 2. 1904. **1**. 473.
- [24] *Schuster A.* An Introduction to the Theory of Optics. Third edition. London : Edward Arnold & Co, 1924. 397 p. Перевод: *Шустер А.* Введение в теоретическую оптику. / под ред. проф. К. К. Баумгарта. М.-Л.: ОНТИ. Гл. ред. общетехн. лит., 1935. 376 с.
- [25] *Мандельштам Л.И.* Лекции по некоторым вопросам теории колебаний (1944 г.). Четвертая лекция // Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике / Под ред. чл.-корр. АН СССР С.М. Рытова. М. : Наука, 1972. С. 431.
- [26] *Веселаго В.Г.* // УФН. 2011. **181**, № 11. С. 1201.
- [27] *Вольпян О.Д., Кузьмичёв А.И.* Отрицательное преломление волн. Введение в физику и технологию электромагнитных метаматериалов / Под ред. Г. М. Зверева. К.-М. : Аверс, 2012. 360 с.
- [28] *Сивухин Д.В.* // Оптика и спектр. 1953. **3**, № 4. С. 308.
- [29] *Пафомов В.Е.* // ЖЭТФ. 1959. **36**, № 6. С. 1853.
- [30] *Силли Р.А.* Периодические волноводы. М. : Фазис, 2002. 438 с.
- [31] *Walser R.M.* // Proceedings of SPIE. 2001. **4467**. 1.
- [32] *Physics of Negative Refraction and Negative Index Materials* / Ed. by C. M. Krowne, Y. Zhang. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2007. 390 p.
- [33] *Shen N.-H., Wang H.-T., Tian Y.* // Eur. Phys. Lett. 2008. **83**. 67007.
- [34] *Фисанов В.В.* // Изв. вузов. Физика. 2021. **64**, № 8. С. 163.
- [35] *Константинова А.Ф., Гречушников Б.Н., Бокуть Б.В., Валяшко Е.Г.* Оптические свойства кристаллов. Мн. : Навука і тэхніка, 1995. 302 с.
- [36] *Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б.* Квантовая электродинамика. М. : Наука, 1981. 432 с.
- [37] *Katsnelson M.I., Novoselov K.S., Geim A.K.* // Nature Phys. 2006. **2**. 620.
- [38] *Beenakker C.W.J.* // Rev. Mod. Phys. 2008. **80**. 1337.
- [39] *Katsnelson M.I.* The physics of graphene. Second edition. Cambridge New York : Cambridge University Press, 2020. 425 p.
- [40] *Calogeracos A., Dombey N.* // Physica B. 1998. **255**. 126.
- [41] *Dirac P.A.M.* // Proc. Roy. Soc. (London) A. 1930. **126**. 360. Перевод: *Дирак П.А.М.* Собрание научных трудов. Т. II. Квантовая теория. / под общ. ред. А. Д. Суханова. М.: Физматлит, 2003. С. 363.
- [42] *Greiner W., Müller B., Rafelski J.* Quantum Electrodynamics of Strong Fields. With an Introduction into Modern Relativistic Quantum Mechanics. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 1985. 605 p.
- [43] *Tudorovskiy T., Reijnders K.J.A., Katsnelson M.I.* // Phys. Scr. 2012. **T146**. 014010.
- [44] *Allain P.E., Fuchs J.N.* // Eur. Phys. J. B. 2011. **83**. 301.
- [45] *Chung D.D.L.* // J. Mater. Sci. 2002. **37**. 1475.
- [46] *Wallace P.R.* // Phys. Rev. 1947. **71**, no. 9. 622.
- [47] *DiVincenzo D.P., Mele E.J.* // Phys. Rev. B. 1984. **29**, no. 4. 1685.
- [48] *Semenoff G.W.* // Phys. Rev. Lett. 1984. **53**, no. 26. 2449.
- [49] *Лозовик Ю.Е., Меркулова С.П., Соколик А.А.* // УФН. 2008. **178**, № 7. С. 757.
- [50] *Castro Neto A.H., Guinea F., Peres N. M. R. et al.* // Rev. Mod. Phys. 2009. **81**. 109.
- [51] *Краснопецев Е.А.* Квантовая механика в приложениях к физике твердого тела. Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2017. 355 с.
- [52] *Sajjad R.N., Ghosh A.W.* // Appl. Phys. Lett. 2011. **99**. 123101.
- [53] *Sajjad R.N., Sutar S., Lee J.U., Ghosh A.W.* // Phys. Rev. B. 2012. **86**. 155412.
- [54] *Das Sarma S., Adam S., Hwang E. H., Rossi E.* // Rev. Mod. Phys. 2011. **83**, no. 2. 407.
- [55] *Sutar S., Comfert E.S., Liu J. et al.* // Nano Lett. 2012. **12**. 4460.
- [56] *Lee G.-H., Park G.-H., Lee H.-J.* // Nature Phys. 2015. **11**. 925.
- [57] *Klein O.* // Z. Phys. 1926. **37**. 895. Перевод на англ.: *Klein O.* The Oskar Klein memorial lectures. Vol. 1. Singapore: World Scientific Publishing, 1991. P. 67.
- [58] *Fock V.* // Z. Phys. 1926. **39**. 226. Перевод: *Фок В.А.* Избранные труды. СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2003. С. 59.
- [59] *Gordon W.* // Z. Phys. 1926. **40**. 117.
- [60] *Kragh H.* // Am. J. Phys. 1984. **52**. 1024.
- [61] *Pauli W., Weisskopf V.F.* // Helv. phys. acta. 1934. **7**. 709. Перевод: *Паули В.* Труды по квантовой теории. / под ред. Я. А. Смородинского. М.: Наука, 1977. С. 194.
- [62] *Feshbach H., Villars F.* // Rev. Mod. Phys. 1958. **30**. 24.
- [63] *Давыдов А.С.* Квантовая механика. 2-е, перераб. изд. М. : Наука, 1973. 703 с.
- [64] *Wachter A.* Relativistic Quantum Mechanics. Berlin Heidelberg : Springer Science+Business Media, 2011. 385 p.
- [65] *Winter R. G.* // Am. J. Phys. 1955. **27**. 355.
- [66] *Fuda M. G., Furlani E.* // Am. J. Phys. 1982. **50**. 545.
- [67] *Wang H.-Y.* // J. Phys. Commun. 2020. **4**. 125004.
- [68] *Wang H.-Y.* // J. Phys. Commun. 2020. **4**. 125010.

## The Klein Paradox and Klein Tunneling

A. I. Ternov

*Department of Theoretical Physics, Moscow Institute of Physics and Technology  
Dolgoprudny, Moscow region, 141701 Russia  
E-mail: ternov.ai@mipt.ru*

An interpretation of the Klein paradox is given on the basis of the single-particle approximation of the Dirac theory. The Klein paradox for the Dirac electron and Klein tunneling for charge carriers in graphene are considered from a unified point of view. The close connection between the phenomenon of «retrograde motion» in relativistic quantum mechanics and the propagation of waves in «left-handed» media in electrodynamics is emphasized. This methodological material is used in teaching the quantum mechanics course at the Moscow Institute of Physics and Technology.

PACS: 03.65.Pm, 03.65.Xp, 81.05.Xj

*Keywords:* Dirac equation, Klein paradox, retrograde motion, left-handed media, metamaterials, Klein tunneling, graphene.

*Received 21 June 2024.*

### Сведения об авторе

Тернов Алексей Игоревич — доктор физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры теоретической физики МФТИ; тел.: (495) 408-75-90, e-mail: ternov.ai@mipt.ru.