Дробно-дифференциальный пороговый интегратор с утечкой для обработки мерцающих сигналов

А.К. Гаврилова[1],[*] Р.Т. Сибатов[2]
Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники», Институт интегральной электроники
Россия, 124498, Москва, Зеленоград, пл. Шокина, д. 1
Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Научно-производственный комплекс «Технологический центр»
Россия, 124498, Зеленоград, Москва, пл. Шокина, д. 1, стр. 7
(Поступила в редакцию18.06.2024; подписана в печать24.07.2024)

Модель порогового интегратора с утечкой представляет собой простой, но эффективный математический подход, используемый для описания поведения нейрона в импульсных сетях. Модель может быть модифицирована для того, чтобы учесть некоторые дополнительные особенности, такие как адаптация частоты выходных спайков, случайный шум и др. В данной работе исследуется динамика дробно-дифференциального порогового интегратора с утечкой, заданной уравнением релаксации с дробной производной порядка $\alpha < 1$. Степенной характер релаксации приводит к возможности эмулировать долговременную потенциацию для обработки мерцающих (масштабно-инвариантных по времени) сигналов. Оцениваются статистические характеристики отклика дробно-дифференциального порогового интегратора с утечкой на мерцающий входной поток импульсов напряжения, заданный дробным пуассоновским процессом порядка $\nu < 1$.

PACS:73.63.-b; 31.15.xv. УДК: 51-72, 538.975.
Ключевые слова: импульсная нейронная сеть, дробная производная, дробный пуассоновский процесс, недебаевская релаксация, память, степенной закон.

ВВЕДЕНИЕ

Потенциал нейрона имеет сложную природу и определяется проводимостями потенциал-зависимых ионных каналов в мембране, действующими на различных временных масштабах[1]. Пороговый интегратор с утечкой (ПИУ) — это популярная упрощенная математическая модель, описывающая поведение нейрона. Предполагается, что мембранный потенциал ведет себя подобно напряжению в RC цепи, в которой конденсатор моделирует накопление потенциала, а сопротивление его утечку. Когда потенциал достигает определенного порога, он генерирует всплеск, после чего сбрасывается до потенциала покоя, и процесс повторяется снова. Модель порогового интегратора с утечкой обычно используется в вычислительной нейробиологии для изучения динамики возбуждения нейронов и поведения импульсной сети[3]. Кинетические модели, основанные на уравнениях с дробными производными, могут описывать нелокальные во времени процессы, отражающие некоторые особенности нейронной памяти [2]. В статье [4] предложено обобщение модели ПИУ на основе уравнения релаксации (утечки) с дробной производной Герасимова–Капуто порядка $0 < \alpha < 1$. Модель успешно прогнозирует адаптацию импульсов в пирамидальных клетках неокортекса и тектальных нейронах in vitro [5]. Случайные последовательности выходных спайков являются немарковскими, так как реакция нейронов на стимулы зависит от предыдущих состояний мембраны. В работе исследуется динамика дробного порогового интегратора с утечкой как отклик на совокупность потоков, задаваемых дробными пуассоновскими процессами.

1. ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ПОРОГОВЫЙ ИНТЕГРАТОР С УТЕЧКОЙ

Дробная версия ПИУ является обобщением стандартной модели, в которой производная первого порядка заменяется дробным оператором [4]:

$$C_m \frac{d^\alpha V}{d^\alpha t} = -g_L(V - V_L) + I_{inj}, \qquad (1)$$

где

$$\frac{d^\alpha V(t)}{d^\alpha t} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{dV(\tau)/d\tau}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, 0 < \alpha \leq 1 \qquad (2)$$

— дробная производная Капуто.

Для моделирования импульсной динамики решение приведенного выше уравнения (1) представлено с помощью численной L1 схемы [5]. При $\alpha = 1$ решение дробного уравнения совпадает с решением для экспоненциальной модели (см. рис. 1). В упомянутой схеме решение включает в себя марковскую и эредитарную

* bobdomeme@gmail.com

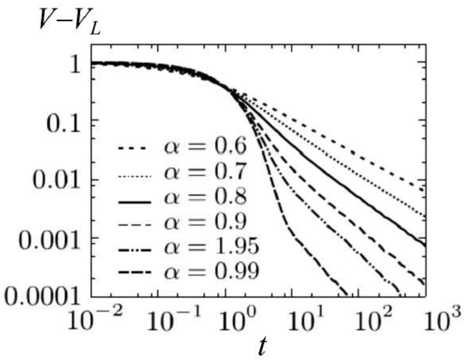

Рис. 1. Релаксационные кривые («дробные экспоненты»), соответствующие решению уравнения (1) для различных значений параметра α

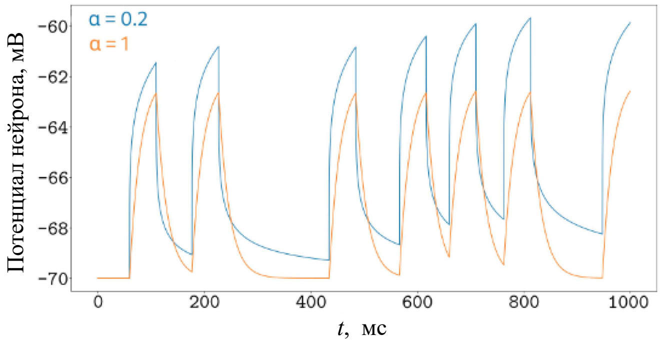

Рис. 2. Динамика напряжения мембраны для дробного нейрона (синяя кривая) и для стандартного ПИУ (жёлтая кривая)

компоненты напряжения мембраны:

$$V(t_N) \approx (dt)^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)\left[\frac{-g_L(V(t_{N-1})-V_L)+I_{inj}}{C_m}\right]+ \\ +V(t_{N-1}-\sum_{k=0}^{N-2}[V(t_{k+1})-V(t_k)]\times \\ \times\left[(N-k)^{(1-\alpha)}-(N-k-1)^{(1-\alpha)}\right]. \quad (3)$$

В классической модели ПИУ память нейрона сбрасывается после каждой генерации выходного спайка (импульса). Однако в дробно-дифференциальной версии предполагается учёт всей предыстории входных сигналов. Это обеспечивает сходимость выходных всплесков к распределению входного сигнала и адаптацию частоты спайков, которая наблюдается при стимуляции прямоугольным или ступенчатым импульсом и представляет снижение частоты отклика, следующей за первоначальным увеличением. Эти явления возникают только при $\alpha \leq 1$. Далее для всех численных экспериментов выбирается шаг по времени $\Delta t = 0.1$ мс.

Таким образом, основное отличие обсуждаемой дробной версии от стандартного ПИУ заключается в характере релаксации напряжения мембраны (см. рис. 2). Долговременное степенное затухание связано с памятью в системе и указывает на возможность обработки редких или перемежающихся сигналов.

2. ДРОБНЫЙ ПУАССОНОВСКИЙ ПРОЦЕСС

Дробный процесс Пуассона — это обобщение процесса Пуассона, в котором интенсивность событий зависит от предыстории процесса. В дробном пуассоновском процессе [6] плотность распределения времени ожидания $q(t) = \psi_\nu(t)$ удовлетворяет дробно-дифференциальному уравнению:

$${}_0D_t^{\nu}\psi_\nu(t)+\mu\psi_\nu(t)=\mu\delta(t). \quad (4)$$

А дополнительная функция распределения определяется выражением:

$$P(T>t) = E_\nu(-\mu t^\nu), \quad (5)$$

где $E_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\nu n+1)}$ — функция Миттаг–Леффлера.

Плотность выражается через двухпараметрическую функцию Миттаг–Леффлера.

$$\psi_\nu(t)=\mu t^{\nu-1}E_{\nu,\nu}(-\mu t^\nu), \quad (6)$$

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}. \quad (7)$$

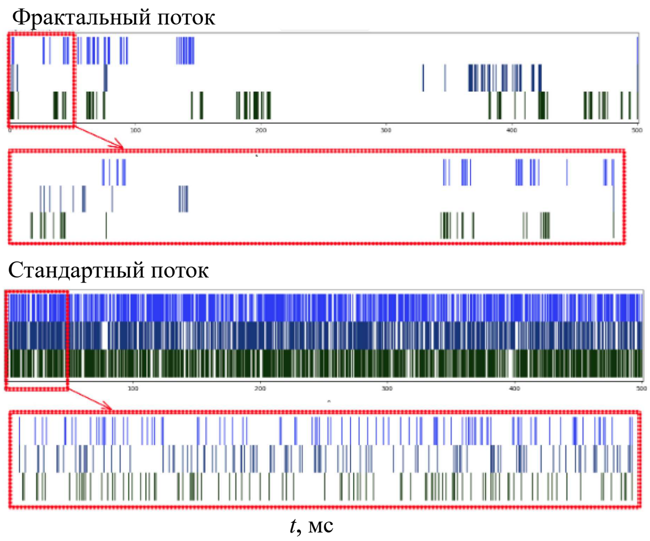

Рис. 3. Дробный и стандартный пуассоновский поток импульсов. Дробный обладает перемежаемостью, тогда как стандартный на больших временах является однородным

Важно отметить, что дробный пуассоновский процесс обладает свойством самоподобия (см. рис. 3), что

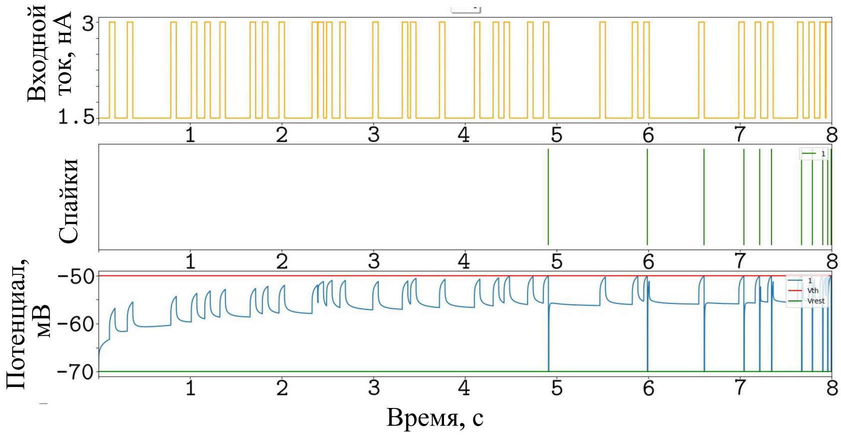

Рис. 4. Адаптация мембраны к входным импульсам с распределением Пуассона и ненулевым постоянным током. Время наблюдения — 8 с, длительность шага — 60 мс, амплитуда шага и постоянного тока равны 3 и 1.5 нА соответственно. Мембранный потенциал выражается в мВ

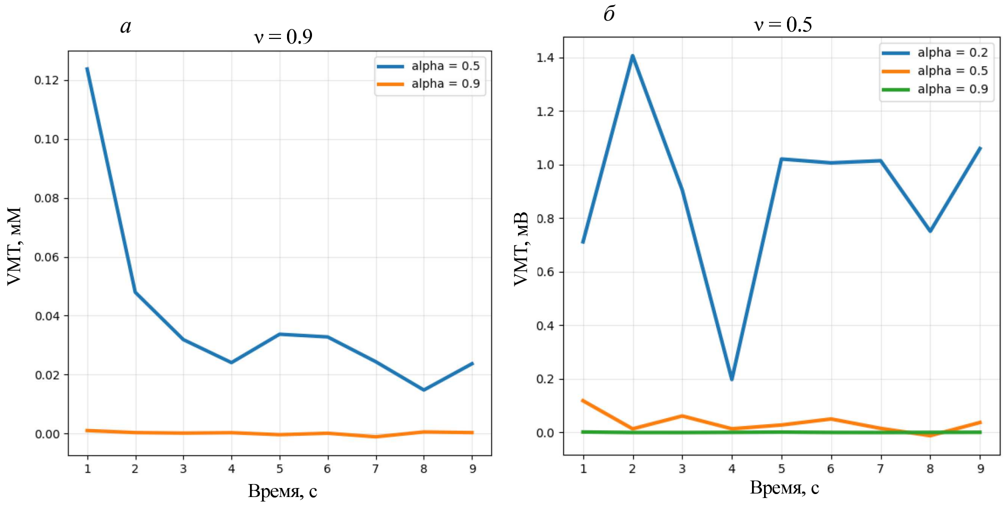

Рис. 5. Зависимость динамики среднего значения функции памяти (VMT) от α и ν. VMT является отрицательной обратной связью для мембранного потенциала. Чем меньше α, тем выше значение VMT. *а* — 0.9, *б* — 0.5. В эти моменты времени наблюдаются колебания, т.е. время затухания значения VMT больше, чем для случая *а*. Чем меньше ν, тем ниже скорость распада

означает, что статистические свойства процесса сохраняются при изменении масштаба времени[7].

Случайная величина T, распределенная согласно (5), может быть сгенерирована с помощью следующего соотношения [7]:

$$T = \frac{|\ln U|^{1/\nu}}{\mu^{1/\nu}} S_+(\nu), \tag{8}$$

где $S_+(\nu)$ — односторонняя устойчивая по Леви случайная величина с плотностью $g_+(\tau;\nu)$, а U — равномерно распределенная величина на [0, 1].

Можно переписать приведенное выше выражение подробнее:

$$T = \frac{|\ln U_1|^{1/\nu}}{\mu^{1/\nu}} \frac{\sin(\nu\pi U_2)\,[\sin((1-\nu)\pi U_2)]^{1/\nu-1}}{[\sin(\pi U_2)]^{1/\nu}\,[\ln U_3]^{1/\nu-1}}, \tag{9}$$

где U_1, U_2 и U_3 — независимые, равномерно распределенные на [0,1] случайные числа.

3. ПОВЕДЕНИЕ ОДНОГО ДРОБНОГО НЕЙРОНА

Параметры применяемой дробной модели ПИУ, перечислены в таблице.

После некоторого периода адаптации мембрана начинает реагировать на стохастические стимулы (см. рис. 4). Это явление называется задержкой первого спайка и является источником полезной информации в биологических нейронных сетях [8].

После первого спайка частота выходных импульсов продолжает увеличиваться, поскольку среднее значение функции памяти (VMT — voltage memory trace) со

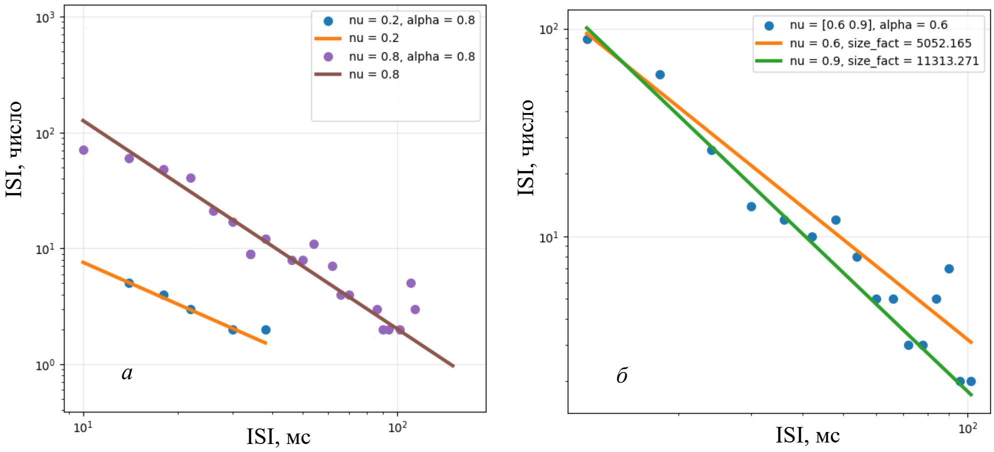

Рис. 6. Гистограмма межспайковых интервалов (ISI) для различных значений α и ν в двойном логарифмическом масштабе. *а* — На диаграмме показана независимость выходного распределения от α, поскольку оно аппроксимируется степенной функцией с показателем, равным ν; *б* — есть два входа $\nu = 0.6$ и 0.9, $\alpha = 0.6$. Выходное распределение ISI аппроксимируется степенной функцией с показателем степени, равным наибольшему из ν

Таблица. Значения параметров модели

Параметры	Значения	Описание
C_m	0.5 nF	Ёмкость мембраны
V_{reset}	−70 mV	Потенциал мембраны после сброса
V_{th}	−50 mV	Пороговое напряжение
V_o	−70 mV	Изначальный потенциал мембраны
g_L	25 nS	Проводимость утечки
τ_{ref}	5 ms	Период восстановления

временем медленно снижается до нуля (см. рис. 5, а). Скорость снижения зависит от ν и α (см. рис. 5).

Таким образом, можно утверждать, что для лучшей обработки перемежающегося сигнала среднее значение VMT должно быть отличным от нуля на протяжении всего времени наблюдения. Поэтому время релаксации среднего значения VMT не должно быть меньше времени наблюдения.

Моделирование дробного ПИУ-нейрона показывает, что асимптотическое распределение выходных импульсов зависит только от входного распределения (см. рис. 6, *а*). А при подаче на вход последовательности импульсов, представляющей собой смесь дробных пуассоновских процессов с разными показателями, сходится к дробному пуассоновскому с наибольшим фрактальным показателем (см. рис. 6, *б*).

Как упоминалось выше, время появления первого всплеска является источником информации в биологических системах. На рис. 7 представлены гистограммы интервалов в зависимости от α и ν.

Количество входных импульсов одинаково во всех экспериментах. Видно, что с уменьшением α гистограммы смещаются в сторону больших времён. Поскольку на входе одинаковое количество импульсов, то

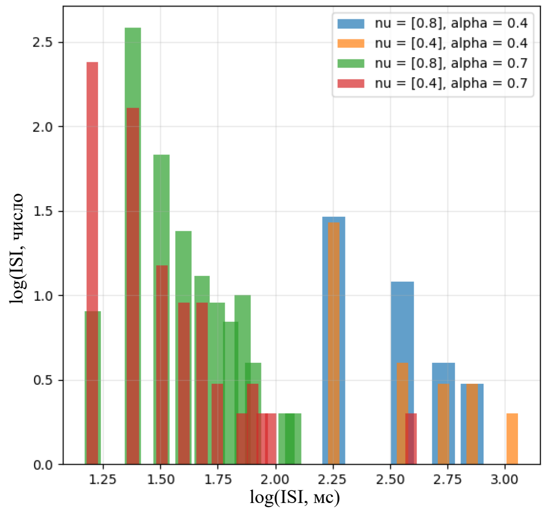

Рис. 7. Гистограмма времени первого пика в зависимости от α и ν в двойном логарифмическом масштабе

при меньших ν усиливается кластеризация импульсов на временной оси, т. е. возрастает время между спайками и увеличивается количество импульсов в кластере. При этом при изменении параметра дробного пуассоновского распределения форма гистограммы существенно не искажается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работа [1] демонстрирует, что дробная версия модели ПИУ эффективно воспроизводит адаптивное поведение импульсов в пирамидных клетках нейронов неокортекса. Эта модель способна генерировать всплески с задержками первого импульса и перемен-

ными интервалами между последующими сигналами со степенным распределением интервалов между спайками. Характеристики долговременной потенциации, отражаемой асимптотически степенной релаксации, позволяют использовать дробно-дифференциальный ПИУ для обработки мерцающих сигналов, обладающих временной масштабной инвариантностью. В данной работе исследованы статистические свойства реакции интегратора на мерцающий входной поток импульсов напряжения, описываемый совокупностью дробных пуассоновских процессов. Показано, что дробно-дифференциальная версия ПИУ эффективнее при обработке мерцающих (масштабно-инвариантных по времени) сигналов, по сравнению со стандартным ПИУ.

Работа выполнена в рамках гос. задания Министерства науки и высшего образования РФ (проект FNRM–2022–0008).

[1] *Gerstner W., Kistler W.M., Naud R., Paninski L.* // Neuronal dynamics: From single neurons to networks and models of cognition. Cambridge University Press, 2014.
[2] *Lundstrom B.N., Higgs M.H., Spain W.J., Fairhall A.L.* // Nature Neuroscience. **11**, N 11. 1335 (2008).
[3] *Wang Z., Zeng Q., Lin W.* et al. // A International Journal of Neural Systems. **24**, N 5. 1440004 (2014).
[4] *Teka W.W., Upadhyay R.K., Mondal A.* // Neural Networks. **93**. 110 (2017).
[5] *Teka W., Marinov T.M., Santamaria F.* // PLoS Computational Biology. **10**, N 3. e1003526 (2014).
[6] *Repin O., Saichev A.I.* // Radiophysics and Quantum Electronics. **43**, N 9. 738 (2000).
[7] *Uchaikin V.V., Cahoy D.O., Sibatov R.T.* // International Journal of Bifurcation and Chaos. **18**, N 09. 2717 (2008).
[8] *Chase S.M., Young E.D.* // Proceedings of the National Academy of Sciences. **104**, N 12. 5175 (2007).

Processing of intermittent spike trains by fractional leaky integrate-and-fire neural model

A.K. Gavrilova[1,a], **R.T. Sibatov**[2]

[1]*National Research University of Electronic Technology (MIET), Institute of Integrated Electronics*
Moscow, 124498, Russia
[2]*Scientific-Manufacturing Complex «Technological Centre»*
Zelenograd, 124498, Russia
E-mail: [a]*bobdomeme@gmail.com*

Neuromorphic computing is a field of artificial intelligence that takes inspiration from the structure and function of the human brain to design computer systems. The main goal is to create an effective architecture for implementing a spiking neural network. At the moment, the most popular model used in spiking neural networks as an artificial neuron is a leaky threshold integrator. However, it is unable to process flickering signals that have been seen in a number of biological systems, namely the firing patterns of neurons. For these purposes, a generalized model was chosen - a fractional-differential threshold integrator with leakage, which is capable of emulating long-term potentiation, which makes it possible to process dependent, discharged events. This paper studies the response of a leaky fractional differential threshold integrator to flickering signals, namely its statistical characteristics, the relationship between the fractional and fractal indicator of the neuron and signal, respectively. Also considered is flickering encoding of input data, which is less energy-consuming compared to standard frequency encoding with a Poisson distribution.

PACS: 73.63.-b, 31.15.xv.
Keywords: spiking neural network, fractional Poisson process, relaxation, memory, power law.
Received 18 June 2024.

Сведения об авторах

1. Гаврилова Александра Константиновна — студентка; e-mail: bobdomeme@gmail.com.
2. Сибатов Ренат Тимергалиевич — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: ren_sib@bk.ru.