О спиновых связностях как переменных квантования гравитации

А. Б. Арбузов,* А. А. Никитенко†
Объединенный институт ядерных исследований,
лаборатория теоретической физики имени Н.Н. Боголюбова
Россия, 141980, Московская область, г. Дубна, ул.Жолио-Кюри, д. 6
(Поступила в редакцию 01.06.2024; подписана в печать 01.07.2024)

Изучается квантование конформной общей теории относительности. Компоненты спиновой связности рассматриваются как базовые переменные квантовой гравитации. Анализируются их свойства, выделяется динамическая часть. В работе также применяется тетрадный формализм и формализм Арновитта–Дезера–Мизнера. Гравитационное действие оказывается квадратичным по компонентам спиновой связности. Производится вторичное квантование гравитационного поля в терминах спиновой связности и обсуждаются дальнейшие перспективы такого подхода.

PACS: 04.20.Cv УДК: 530.1
Ключевые слова: общая теория относительности, конформная инвариантность, тетрадный формализм, спиновая связность, квантовая гравитация.

ВВЕДЕНИЕ

Широко известно, что при попытке квантования общей теории относительности (ОТО) мы сталкиваемся с проблемой неперенормируемости теории в том случае, если выберем в качестве базовых переменных метрику пространства-времени. Неперенормируемость начинает сказываться, начиная со второго порядка по теории возмущений. Поэтому при таком подходе построить квантовую теорию гравитации удаётся лишь в однопетлевом приближении. Для решения этой проблемы авторами предлагаются различные подходы. Наиболее популярными из них являются: эффективная теория поля (расширяющая лагранжиан ОТО членами, квадратичными по кривизне и дополнительными скалярными полями), теория струн, петлевая квантовая гравитация, метод континуального интегрирования.

В настоящей работе мы изучаем конформную модификацию общей теории относительности (конформная ОТО) и анализируем возможность её квантования в переменных, которые предлагалось использовать в работах [1, 2]. Основная идея конформной модификации ОТО заключается в том, что вместо инвариантности относительно группы общековариантных преобразований $GL(4)$ рассматривается инвариантность относительно более широкой группы преобразований [3], содержащей группу конформных преобразований в качестве подгруппы. При этом лагранжиан исходной ОТО подвергается конформному преобразованию, в результате которого выделяется общий множитель содержащий дилатон

$$g_{\mu\nu}dx^{\mu}\otimes dx^{\nu}=e^{-2D}\ \widetilde{g}_{\mu\nu}\ d\chi^{\mu}\otimes d\chi^{\nu}. \quad (1)$$

Предполагается, что реально наблюдаемыми величинами являются не стандартные величины входящие в ОТО, а величины конформно-эквивалентные им.

В стандартной ОТО уравнения Эйнштейна получаются в результате вариации действия Эйнштейна–Гильберта

$$S_{\text{Hilbert}}=\int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{M_P^2}{16\pi}R+L_{\text{matter}}(g_{\mu\nu})\right]. \quad (2)$$

При рассмотрении конформной ОТО, действие Эйнштейна–Гильберта заменяется действием

$$S_{\text{CCGR}}=\int d^4\chi\sqrt{-\widetilde{g}}\times$$
$$\times\left[\frac{\widetilde{M}_P^2}{16\pi}\widetilde{R}+\frac{3\widetilde{M}_P^2}{8\pi}(\widetilde{g}^{\mu\nu}\nabla_\mu D\nabla_\nu D)+L_{\text{matter}}(\widetilde{g}_{\mu\nu})\right]. \quad (3)$$

Здесь M_P — масса Планка, а $\widetilde{M}_P=M_Pe^{-D}$ — конформная масса Планка, $\widetilde{R}$ — конформная скалярная кривизна. Отметим, что действие (3) не эквивалентно действию Эйнштейна–Гильберта в силу того, что оно является инвариантным относительно конформных преобразований, а действие Эйнштейна–Гильбера нет. Таким образом, конформная ОТО не эквивалентна стандартной ОТО и реально представляет собой модифицированную теорию гравитации, о чём говорилось выше. Поэтому мы будем называть действие (3) действием конформной общей теории относительности и обозначать его S_{CCGR}. Варьирование действия (3) приводит к уравнениям трёх типов:

- конформным уравнениям Эйнштейна (при варьировании по конформной метрике);
- уравнениям типа Клейна-Гордона на дилатон D;
- уравнениям для полей материи при варьировании по конформно-эквивалентным полевым переменным.

Конформные гравитационные волны описываются конформными уравнениями Эйнштейна, поэтому, также как и в стандартной ОТО, они имеют две физические

* arbuzov@theor.jinr.ru
† nikitenko@theor.jinr.ru

степени свободы. Тот факт, что в действии (3) присутствует отдельное слагаемое содержащее квадрат производной дилатонного поля означает, что в дополнение к конформным уравнениям Эйнштейна и одновременно с ними должно решаться уравнение описывающее дилатонное поле D. Это в свою очередь означает, что конформная ОТО в целом как теория, обладает, вообще говоря, тремя степенями свободы: две степени свободы описывают гравитационные волны, аналогично ОТО, и одна описывает распространение дилатонного поля в пространстве-времени. В конформной ОТО дилатон рассматривается как дополнительная, физическая степень свободы.

Важно заметить, что данная модель не является частным случаем скалярно-тензорной гравитации Бранса–Дике, поскольку соответствует выбору константы Дике равной $-3/2$, что приводит к особенности [4].

Феноменологические свойства конформной модификации ОТО рассматривалась в работах [5–7], в которых большое внимание уделяется изучению данных от сверхновых типа Ia. По результатам расчётов и последующего анализа авторы приходят к выводу о том, что основной вклад в космологическую плотность даёт материя имеющая жёсткое, а не вакуумное уравнение состояния (тёмную энергию). Это даёт возможность объяснить наблюдаемое ускоренное расширение вселенной без использования космологической постоянной.

Заранее отметим, что в статье используется четыре типа индексов. Четырёхмерные координатные индексы без скобок будут обозначаться греческими буквами и пробегать значения 0...3. Трёхмерные координатные индексы без скобок из середины алфавита i, j..., обозначают трёхмерные пространственные индексы и принимают значения 1...3. Также в работе активно используются реперные индексы, которые мы будем заключать в круглые скобки. Реперные индексы, также как и координатные, могут принимать значения 0...3 (четырёхмерные пространственно-временные) и 1...3 (трёхмерные пространственные). В том случае если реперный индекс принимает значения 0...3, то мы его будем обозначать буквами из начала латинского алфавита a, b... и заключать в круглые скобки. Если же реперный индекс принимает значения 1...3, то мы его будем обозначать буквами из середины латинского алфавита и заключать в круглые скобки.

Статья построена следующим образом. Сначала будет рассмотрен тетрадный формализм и спиновые связности применительно к конформной ОТО, будет показано, что рассматриваемый формализм является довольно общим и применим ко многим модифицированным теориям гравитации. Затем будет выделена дилатонная степень свободы из стандартной метрики ОТО. Далее будет рассмотрена метрика конформной плоской гравитационной волны и проанализирована возможность её квантования стандартным путём.

1. СПИНОВАЯ СВЯЗНОСТЬ

Метод, который мы развиваем в данной работе, в значительной степени опирается на тетрадный формализм и понятие спиновой связности. В частности переменные $\omega^R_{(a)(b),(c)}$, которые нами ниже предлагается рассматривать в качестве базовых переменных квантовой гравитации связаны со спиновой связностью непосредственно. Поэтому текущий раздел посвящается обсуждению понятий тетрадного формализма и спиновой связности применительно к конформной общей теории относительности.

В классической общей теории относительности пространство-время $(\mathbb{M}, \mathbf{g})$ описывается с помощью модели гладкого четырёхмерного хаусдорфового многообразия $\mathbb{M}$, наделённого псевдоримановой метрикой $g_{\mu\nu}$. Аффинная связность, которая определяет правила параллельного переноса тензоров от одного касательного пространства к другому считается симметричной и согласованной с метрикой. В этой ситуации аффинная связность полностью описывается метрикой и представляется в компонентах символами Кристоффеля $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$. К сожалению ковариантное дифференцирование спинорных полей в стандартном координатном представлении оказывается плохо определённой операцией. Решение этой проблемы осуществляется посредством перехода к ортонормированному реперу [8]. ОТО может быть сформулирована в терминах репера, полученный метод получил название тетрадного формализма [9] или метода подвижного репера. С помощью метода подвижного репера можно ввести понятие спиновой связности, определённой на расслоении реперов и корректно определить процедуру ковариантного дифференцирования для спинорных полей.

Говорят, что на многообразии задан репер, если в касательном пространстве к каждой точке многообразия выбран базис из векторов $e_{(a)}$ [10].

Репер и корепер можно разложить по координатному базису в касательном и кокасательном пространстве, соответственно. Разложение реперных векторов по базису в касательном пространстве имеет вид

$$e_{(a)} = e^{\alpha}{}_{(a)}\partial_\alpha, \tag{4}$$

Разложение корепера по базисным 1-формам (ковектора) из кокасательного пространства имеет вид

$$e^{(a)} = e_{\alpha}{}^{(a)} dx^\alpha, \tag{5}$$

Предполагается, что матрицы $e^{\alpha}{}_{(a)}$ и $e^{(b)}{}_{\alpha}$ невырождены и являются достаточно гладкими функциями от точки многообразия.

$$e^{\alpha}{}_{(a)} e_{\alpha}{}^{(b)} = \delta^{(b)}_{(a)}, \tag{6}$$

$$e^{\alpha}{}_{(a)} e_{\beta}{}^{(a)} = \delta^{\alpha}_{\beta}, \tag{7}$$

Определим также величины $e_{\nu(a)}$ посредством формулы

$$e_{\nu(a)} = \eta_{(a)(d)} e_{\nu}{}^{(d)}, \tag{8}$$

где $\eta_{(a)(d)}$ — метрика Минсковского. Поскольку $\eta_{(a)(d)}$ являются константами и не зависят от точки многообразия, то $\eta_{(a)(d)}$ можно свободно вносить под знак производной и выносить из под него.

В отличие от координатных базисных векторных полей, реперные векторные поля, вообще говоря, не коммутируют между собой. Это связано, в частности, с тем, что пара произвольных векторных полей на многообразии, вообще говоря, не коммутирует между собой. Геометрически это означает, что малый параллелограмм построенных с помощью двух произвольно взятых векторных полей будет в общем случае незамкнутым. Величина "разомкнутости" в главном порядке как раз и выражается коммутатором векторных полей $\left[e_{(a)}, e_{(b)}\right]$. Разложим коммутатор пары реперных векторных полей по реперу

$$\left[e_{(a)}, e_{(b)}\right] = c_{(a)(b)}{}^{(c)} e_{(c)}. \tag{9}$$

Коэффициенты $c_{(a)(b)}{}^{(c)}$ называются коэффициентами неголономности. Явное выражение для коэффициентов неголономности через компоненты репера имеет следующий вид

$$c_{(a)(b)}{}^{(c)} = \left(e^{\alpha}{}_{(a)}\partial_\alpha e^{\beta}{}_{(b)} - e^{\alpha}{}_{(b)}\partial_\alpha e^{\beta}{}_{(a)}\right) e_{\beta}{}^{(c)}. \tag{10}$$

Связность на расслоении реперов связана с аффинной связностью, которая задана на касательном расслоении формулой

$$\nabla_\alpha e_\beta{}^{(a)} = \partial_\alpha e_\beta{}^{(a)} - \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma} e_\gamma{}^{(a)} e_\beta{}^{(b)} \omega_{\alpha(b)}{}^{(a)} = 0. \tag{11}$$

$\omega_{\alpha(a)}{}^{(b)}$ называются компонентами спиновой связности. Нам интересен тот случай, когда связность является метрической. То есть, когда тензоры кручения $T_{(a)(b),(c)} = 0$ и неметричности $Q_{(a),(b)(c)} = 0$. Отметим, что тензор кручения антисимметричен по двум первым индексам, а тензор неметричности симметричен по двум последним индексам. В связи с этим данные индексы отделены запятыми. В этом случае компоненты спиновой связности, можно выразить через коэффициенты неголономности формулой [10]

$$\omega_{(a)(b)(c)} = \frac{1}{2}\left(c_{(a)(b)(c)} - c_{(b)(c)(a)} + c_{(c)(a)(b)}\right), \tag{12}$$

где использовано обозначение $c_{(a)(b)(c)} := \eta_{(c)(d)} c_{(a)(b)}{}^{(d)}$.

Компоненты тензора кривизны в неголономном базисе будут иметь вид

$$\begin{gathered} R_{(a)(b)(c)}{}^{(d)} = \partial_{(a)}\omega_{(b)(c)}{}^{(d)} - \partial_{(b)}\omega_{(a)(c)}{}^{(d)} - \\ -\omega_{(a)(c)}{}^{(e)}\omega_{(b)(e)}{}^{(d)} + \omega_{(b)(c)}{}^{(e)}\omega_{(a)(e)}{}^{(d)} - \\ -c_{(a)(b)}{}^{(e)}\omega_{(e)(c)}{}^{(d)}, \end{gathered} \tag{13}$$

где $\omega_{(a)(b)}{}^{(c)} := e^{\alpha}{}_{(a)}\omega_{\alpha(b)}{}^{(c)}$, $\partial_{(a)} := e^{\alpha}{}_{(a)}\partial_\alpha$, или если два индекса двумерного направления, в котором определяется кривизна, остаются координатными.

$$\begin{gathered} R_{\mu\nu(c)}{}^{(d)} = \partial_\mu\omega_{\nu(c)}{}^{(d)} - \partial_\nu\omega_{\mu(c)}{}^{(d)} - \\ -\omega_{\mu(c)}{}^{(e)}\omega_{\nu(e)}{}^{(d)} + \omega_{\nu(c)}{}^{(e)}\omega_{\mu(e)}{}^{(e)}, \end{gathered} \tag{14}$$

В работе [1] обсуждалось введение переменных $\omega^R_{(a),(b),(c)}$ и утверждалось, что переменные $\omega^R_{(a),(b),(c)}$ могут быть введены только с использованием нелинейного представления группы симметрий и не могут быть введены в рамках классической ОТО. Отметим, что подобные утверждения требуют аккуратности. Сейчас мы покажем, что в действительности выделить $\omega^R_{(a),(b),(c)}$ и $\omega^L_{(a),(b),(c)}$ можно и в классической ОТО. ? для их введения не требуется ни конформных преобразований с выделением дилатона, ни задействования нелинейной группы симметрий как утверждалось работе [1]. Достаточно рассмотреть расслоение реперов со структурной группой $SO(1,3)$, воспользоваться свойством равенства нулю тензоров кручения и неметричности. В самом деле, опустим индекс в формуле (10) и подставим в формулу (12), с учётом индексов получаем

$$c_{(a)(b),(c)} = \left(e^{\alpha}{}_{(a)}\partial_\alpha e^{\beta}{}_{(b)} - e^{\alpha}{}_{(b)}\partial_\alpha e^{\beta}{}_{(a)}\right) e_{(c)\beta}, \tag{15}$$

$$c_{(b)(c),(a)} = \left(e^{\alpha}{}_{(b)}\partial_\alpha e^{\beta}{}_{(c)} - e^{\alpha}{}_{(c)}\partial_\alpha e^{\beta}{}_{(b)}\right) e_{(a)\beta}, \tag{16}$$

$$c_{(c)(a),(b)} = \left(e^{\alpha}{}_{(c)}\partial_\alpha e^{\beta}{}_{(a)} - e^{\alpha}{}_{(a)}\partial_\alpha e^{\beta}{}_{(c)}\right) e_{(b)\beta}, \tag{17}$$

и выражение для компонент спиновой связности

$$\begin{gathered} \omega_{(a),(b)(c)} = \frac{1}{2}\left(e^{\alpha}{}_{(a)}\partial_\alpha e^{\beta}{}_{(b)} - e^{\alpha}{}_{(b)}\partial_\alpha e^{\beta}{}_{(a)}\right) e_{(c)\beta} - \\ -\frac{1}{2}\left(e^{\alpha}{}_{(b)}\partial_\alpha e^{\beta}{}_{(c)} - e^{\alpha}{}_{(c)}\partial_\alpha e^{\beta}{}_{(b)}\right) e_{(a)\beta} + \\ +\frac{1}{2}\left(e^{\alpha}{}_{(c)}\partial_\alpha e^{\beta}{}_{(a)} - e^{\alpha}{}_{(a)}\partial_\alpha e^{\beta}{}_{c}\right) e_{(b)\beta}. \end{gathered} \tag{18}$$

Перегруппируя слагаемые в выражении (18), мы можем выделить в нём ω^L и ω^R

$$\begin{gathered} \omega_{(a),(b)(c)} = \frac{1}{2}e^{\alpha}{}_{(a)}\left(e^{\beta}{}_{(c)}\partial_\alpha e_{(b)\beta} - e^{\beta}{}_{(b)}\partial_\alpha e_{(c)\beta}\right) + \\ +\frac{1}{2}e^{\alpha}{}_{(b)}\left(e^{\beta}{}_{(a)}\partial_\alpha e_{(c)\beta} + e^{\beta}{}_{(c)}\partial_\alpha e_{(a)\beta}\right) - \\ -\frac{1}{2}e^{\alpha}{}_{(c)}\left(e^{\beta}{}_{(b)}\partial_\alpha e_{(a)\beta} + e^{\beta}{}_{(a)}\partial_\alpha e_{(b)\beta}\right) := \\ := \omega^L_{(c)(b),(a)} + \omega^R_{(a)(c),(b)} - \omega^R_{(b)(a),(c)}. \end{gathered} \tag{19}$$

При выводе (19) было также использовано $e_{\beta(c)}\partial_\alpha e^{\beta}{}_{(b)} = -e^{\beta}{}_{(b)}\partial_\alpha e_{\beta(c)}$, которое следует из того, что $\eta_{(c)(b)} = e_{\beta(c)}e^{\beta}{}_{(b)}$. Отметим также, что формула (19) отличается знаком от тех, что приведены в работах [2],[1], но это никак не влияет на результаты излагаемые ниже. Мы получаем

$$\begin{gathered} \omega^L_{(c)(b),(a)} = \frac{1}{2}e^{\alpha}{}_{(a)}\left(e^{\beta}{}_{(c)}\partial_\alpha e_{(b)\beta} - e^{\beta}{}_{(b)}\partial_\alpha e_{(c)\beta}\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(e^{\beta}{}_{(c)}(e^{\alpha}{}_{(a)}\partial_\alpha e_{(b)\beta}) - e^{\beta}{}_{(b)}(e^{\alpha}{}_{(a)}\partial_\alpha e_{(c)\beta})\right), \end{gathered} \tag{20}$$

$$\omega^R_{(a)(c),(b)} = \frac{1}{2} e^\alpha{}_{(b)} \left(e^\beta{}_{(a)} \partial_\alpha e_{(c)\beta} + e^\beta{}_{(c)} \partial_\alpha e_{(a)\beta} \right) = \\ = \frac{1}{2} \left(e^\beta{}_{(a)} (e^\alpha{}_{(b)} \partial_\alpha e_{c\beta}) + e^\beta{}_{(c)} (e^\alpha{}_{(b)} \partial_\alpha e_{(a)\beta}) \right), \tag{21}$$

$$\omega^R_{(b)(a),(c)} = \frac{1}{2} e^\alpha{}_{(c)} \left(e^\beta{}_{(b)} \partial_\alpha e_{(a)\beta} + e^\beta{}_{(a)} \partial_\alpha e_{(b)\beta} \right) = \\ = \frac{1}{2} \left(e^\beta{}_{(b)} (e^\alpha{}_{(c)} \partial_\alpha e_{(a)\beta}) + e^\beta{}_{(a)} (e^\alpha{}_{(c)} dx^{(c)} \partial_\alpha e_{(b)\beta}) \right), \tag{22}$$

где мы воспользовались тетрадными обозначениями для производных $\partial_{(a)} := e^\alpha{}_{(a)} \partial_\alpha$, $\partial_{(b)} := e^\alpha{}_{(b)} \partial_\alpha$, $\partial_\alpha := e^\alpha{}_{(c)} \partial_\alpha$. С точностью до обозначений индексов, $\omega^L_{(a)(c),(\alpha)}$ и $\omega^R_{(a)(c),(\alpha)}$ выражаются формулами

$$\omega^L_{(c)(b),\alpha} dx^\alpha = \frac{1}{2} \left(e^\beta{}_{(c)} de_{(b)\beta} - e^\beta{}_{(b)} de_{(c)\beta} \right) \tag{23}$$

$$\omega^R_{(c)(b),\alpha} dx^\alpha = \frac{1}{2} \left(e^\beta{}_{(c)} de_{(b)\beta} + e^\beta{}_{(b)} de_{(c)\beta} \right) \tag{24}$$

Заметим, что при выводе этих формул мы нигде не воспользовались ни конформной симметрией, ни нелинейным представлением расширенной группы симметрий [3]. Впрочем, введение $\omega^R_{(a)(b),(c)}$ и $\omega^L_{(a)(b),(c)}$ посредством нелинейной группы симметрий, как это описывается в работах [1–3], всё равно выглядит более естественным с физической точки зрения. Поскольку там это происходит посредством установления связи $\omega^R_{(a)(b),(c)}$ и $\omega^L_{(a)(b),(c)}$ с полями типа Голдстоуна. Подробнее об этой взаимосвязи смотрите в обзорной статье [11].

Отметим, что далее при упоминании $\omega^R_{(b)(a),(c)}$ и $\omega^L_{(a)(b),(c)}$ в тексте мы для краткости будем опускать индексы, там где это не приводит к потере смысла и обозначать их просто как ω^R и ω^L соответственно.

Покажем, что производные метрического тензора не могут зависеть от компонент ω^L, и, таким образом, ω^L не могут играть роль динамических переменных. Координатные компоненты метрического тензора связаны с тетрадными компонентами формулой

$$g_{\mu\nu} = e_\mu{}^{(a)} e_{\nu(a)}. \tag{25}$$

$$dg_{\mu\nu} = dx^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu} = d \left(e_\mu{}^{(a)} e_{\nu(a)} \right) = \\ = d \left(e_\mu{}^{(a)} \right) e_{\nu(a)} + (e_\mu{}^{(a)} d \left(e_{\nu(a)} \right), \tag{26}$$

Используя формулы (23) и (24), получаем

$$de_\mu{}^{(a)} = e_\mu{}^{(b)} \left(\omega^R{}_{(b)}{}^{(a)},(dx^\alpha) + \omega^L{}_{(b)}{}^{(a)},(dx^\alpha) \right), \tag{27}$$

$$de_{\nu(a)} = e_\nu{}^{(b)} \left(\omega^R{}_{(b)(a),}(dx^\alpha) + \omega^L{}_{(b)(a),}(dx^\alpha) \right). \tag{28}$$

Подставляя (27) и (28) в (26), получаем следующее выражение для полного дифференциала метрического тензора

$$dg_{\mu\nu} = dx^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu} = \\ = d \left(e_\mu{}^{(a)} e_{\nu(a)} \right) = d \left(e_\mu{}^{(a)} \right) e_{\nu(a)} + e_\mu{}^{(a)} d \left(e_{\nu(a)} \right) = \\ = e_{\nu(a)} e_\mu{}^{(b)} \left(\omega^R{}_{(b)}{}^{(a)},(dx^\alpha) + \omega^L{}_{(b)}{}^{(a)},(dx^\alpha) \right) + \\ + e_\mu{}^{(a)} e_\nu{}^{(b)} \left(\omega^R{}_{(b)(a),}(dx^\alpha) + \omega^L{}_{(b)(a),}(dx^\alpha) \right). \tag{29}$$

Опуская индекс (a) в выражении $\left(\omega^R{}_{(b)(a),}(dx^\alpha) + \omega^L{}_{(b)(a),}(dx^\alpha) \right)$, и одновременно поднимая (a) в $e_{\nu(a)}$, выносим за скобки общий множитель и получаем из (29) следующее выражение

$$dg_{\mu\nu} = dx^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu} = d \left(e_\mu{}^{(a)} e_{\nu(a)} \right) = \\ = d \left(e_\mu{}^{(a)} \right) e_{\nu(a)} + e_\mu{}^{(a)} d \left(e_{\nu(a)} \right) = \\ = e_{\nu(a)} e_\mu{}^{(b)} \left(\omega^R{}_{(b)}{}^{(a)},(dx^\alpha) + \omega^L{}_{(b)}{}^{(a)},(dx^\alpha) \right) + \\ + e_\mu{}^{(a)} e_\nu{}^{(b)} \left(\omega^R{}_{(b)(a),}(dx^\alpha) + \omega^L{}_{(b)(a),}(dx^\alpha) \right) = \\ = \left(e_\mu{}^{(b)} e_\nu{}^{(a)} + e_\mu{}^{(a)} e_\nu{}^{(b)} \right) \times \\ \times \left(\omega^R{}_{(b)(a),}(dx^\alpha) + \omega^L{}_{(b)(a),}(dx^\alpha) \right). \tag{30}$$

Учитывая, что выражение $\left(e_\mu{}^{(b)} e_\nu{}^{(a)} + e_\mu{}^{(a)} e_\nu{}^{(b)} \right)$ симметрично по индексам a, b, а $\omega^L{}_{(b)(a),}(dx^\alpha)$ — антисимметрично a, b, мы получаем из (30) формулу

$$dg_{\mu\nu} = dx^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu} = \\ = \left(e_\mu{}^{(b)} e_\nu{}^{(a)} + e_\mu{}^{(a)} e_\nu{}^{(b)} \right) \omega^R{}_{(b)(a),}(dx^\alpha). \tag{31}$$

Таким образом дифференциал метрического тензора и его частные производные не зависят от $\omega^L{}_{(b)(a),}(dx^\alpha$. Хотя в рассматриваемой нами модификации ОТО тензоры кручения и неметричности равны нулю, конгруенции мировых линий, также как и в классической ОТО, могут обладать ненулевым вращением. При рассмотрении динамических переменных мы бы хотели отделить гравитационные свойства теории, от свойств, которые непосредственно не связанны с гравитацией и характеризуют конгруенцию мировых линий (систему отсчёта). Поэтому исчезновение переменных ω^L в уравнении следует трактовать как отделение свойств системы отсчёта (конгруенции мировых линий), связанных с вращением от гравитационных свойства теории.

2. АНАЛИЗ КВАНТОВАНИЯ ГРАВИТАЦИИ В ПРЕДЛАГАЕМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Целью данного раздела является анализ возможности построения квантовой теории гравитационных волн и их взаимодействия с материей в рамках конформной ОТО в том случае, если мы примем переменные ω^R в качестве базовых переменных при квантовании конормной ОТО, как это предлагалось сделать в работах [1, 2].

Квантование гравитации в общем случае, как известно, является чрезвычайно сложной задачей. В связи с этим, мы, следуя [1], рассмотрим наиболее простой частный случай плоской волны и некоторые вопросы, которые возникают при попытке квантования конформной ОТО.

Поскольку в конформной ОТО реально наблюдаемыми на эксперименте считаются величины, которые получаются из стандартных с помощью преобразований Вейля, то нам необходимо рассматривать конформную метрику $\widetilde{g}_{\mu\nu}$, описывающую гравитационную волну. Гравитационные волны в конформной ОТО мы будем называть конформными гравитационными волнами. Конформная метрика получается из стандартной метрики с помощью надлежащего конформного преобразования (1).

В стандартной ОТО существуют разные метрики, которые можно интерпретировать как метрики, описывающие гравитационные волны. Простейшей из них является метрика плоской волны, которую можно представить в виде [12]

$$g = -d\chi^0 \otimes d\chi^0 + d\chi^3 \otimes d\chi^3 + \\ + e^{\Sigma}\left[e^{\sigma} d\chi^1 \otimes d\chi^1 + e^{-\sigma} d\chi^2 \otimes d\chi^2\right]. \quad (32)$$

В (32) присутствуют 2 функции $\Sigma = \Sigma(\chi^1, \chi^2)$, $\sigma = \sigma(\chi^0, \chi^3)$ Не ограничивая общности, можно положить $e^{\Sigma} = 1$ и, соответственно, $\Sigma = 0$. Естественно искать решение типа гравитационных волн в конформной ОТО, рассматривая метрику (32) в качестве анзаца. Тогда, учитывая наложенное выше условие $\Sigma = 0$, метрику конформной $\widetilde{g}_{\mu\nu}$ гравитационной волны (32) можно записать в виде

$$\widetilde{g} = -d\chi^0 \otimes d\chi^0 + d\chi^3 \otimes d\chi^3 + e^{\sigma} d\chi^1 \otimes d\chi^1 + e^{-\sigma} d\chi^2 \otimes d\chi^2. \quad (33)$$

Ниже метрика и ω^R везде относятся к конформной ОТО, поэтому для упрощения обозначений далее мы будем опускать символ $\sim$ над всеми конформными величинами. Нам необходимо также наложить условие калибровки. Мы выбираем так называемое калибровочное условие Лихнеровича [13], которое заключается в том, что определитель конформной трёхмерной метрики $\gamma = 1$.

Действие для гравитации в случае метрики плоской волны, которую мы рассматриваем, можно записать в виде

$$S_{\text{Gravitons}} = \int d^4\chi \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\chi^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\chi^3}\right)^2\right], \quad (34)$$

где интегрирование производится, как обычно, по всему четырёхмерному пространству-времени. В (34) было учетено, что $\sqrt{-\widetilde{g}} = 1$. Используя формализм Арновитта–Дезера–Мизнера, мы можем записать записать метрику в виде

$$\widetilde{ds}^2 = \widetilde{g}_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) - (N_0 dt)^2, \quad (35)$$

где N — функция хода, а N^i — вектор сдвига. Наложим на функцию хода и на вектор сдвига условия: $N = 1$, $N^i = 0$. Тетрадные компоненты связаны с N и N^i формулами

$$\begin{cases} e^{(0)} = N dx^0, \\ e^{(j)} = e_i{}^{(j)}\left[dx^i + N^i dx^0\right], \end{cases} \quad (36)$$

$$\begin{cases} e^{(0)}{}_0 = N, \\ e^{(0)}{}_i = 0, \\ e^{(a)}{}_0 = e^{(a)}{}_i N^i. \end{cases} \quad (37)$$

Откуда получаем

$$\begin{aligned} &e^{(0)}{}_0 = 1,\ e^{(3)}{}_3 = 1, e^{(1)}{}_1 = e^{\frac{1}{2}\sigma}, e^{(2)}{}_2 = e^{-\frac{1}{2}\sigma}, \\ &e_{(0)}{}^0 = -1,\ e_{(3)}{}^3 = 1, e_{(1)}{}^1 = e^{-\frac{1}{2}\sigma}, e_{(2)}{}^2 = e^{\frac{1}{2}\sigma}. \end{aligned} \quad (38)$$

Выражение $e_{(a)\sigma} de_{(b)}{}^{\sigma}$ является симметричным по индексам $(a)-(b)$, так что мы можем записать ω^R как

$$\omega^R_{(a)(b),\alpha} dx^\alpha = e_{(a)\sigma} dx^\alpha \frac{\partial e_{(b)}{}^{\sigma}}{\partial x^\alpha} = \\ = \frac{1}{2} dx^\alpha \frac{\partial\sigma}{\partial x^\alpha}\left(\delta_{(a)(1)}\delta_{(b)(1)} - \delta_{(a)(2)}\delta_{(b)(2)}\right). \quad (39)$$

Откуда далее, как показывается в работах [1], [2], для переменных $\omega^R_{(a)(b),(c)}$ справедливо следующее представление

$$\omega^R_{(a)(b),(c)} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} i k_{(c)} \times \\ \times \left[\epsilon^R_{(a)(b)}(k) g^+_k e^{ik\cdot x} + \epsilon^R_{(a)(b)}(-k) g^-_k e^{-ik\cdot x}\right], \quad (40)$$

где $g^{\pm}_k$ претендуют на роль операторов рождения и уничтожения конформных гравитонов. Операторы $\epsilon^R_{(a)(b)}(k)$ представляют собой стандартные поляризационные операторы гравитационной волны. Это обусловлено тем, что волна, которую мы рассматриваем, по существу такая же, как в ОТО. Подход, связанный с рассмотрением метрики свободной плоской волны вида (33) и выражения (40) мотивирован тем, что, как кажется на первый взгляд, может быть легко обобщён с помощью тетрадного формализма на тот случай, когда гравитационное поле не является свободным или распространяется в искривлённом пространстве-времени. Но этот вопрос требует детального изучения и представляет собой тему для отдельного исследования. Отметим, что как при квантовании гравитации в терминах метрики, так и при квантовании других полей сначала всегда рассматривается квантование свободных полей как базовая конструкция теории, а уже потом взаимодействие этих полей с другими частицами и друг с другом.

Проанализируем теперь каким образом гравитация взаимодействует сама с собой и с материей если мы примем переменные ω^R в качестве фундаментальных переменных квантовой гравитации как это предлагается сделать в работах [1, 2]. Выражение (39) в тех же работах предлагается рассматривать в качестве Фурье-образа соответствующего конформной свободной плоской гравитационной волне. Прежде всего отметим, что в выражении (40) присутствует импульс $k_{(c)}$. Уже из этого можно заключить, что это разложение не описывает обычную плоскую волну. Покажем сначала, что в действии (3) отсутствуют члены, из которых мог бы получиться пропагатор конформного гравитона. Для этого воспользуемся выражением для тензора кривизны в неголономном базисе (13). Выполнив полную свёртку в выражении (13) по индексам (b), (d) получим выражение для скалярной кривизны $\omega_{(b)(c)}{}^{(d)}$

$$\begin{aligned}R = \eta^{(a)(c)}R_{(a)(c)} = \eta^{(a)(c)}R_{(a)(b)(c)}{}^{(b)} = \\ = \eta^{(a)(c)}\partial_{(a)}\omega_{(b)(c)}{}^{(b)} - \eta^{(a)(c)}\partial_{(b)}\omega_{(a)(c)}{}^{(b)} = \\ - \eta^{(a)(c)}\omega_{(a)(c)}{}^{(e)}\omega_{(b)(e)}{}^{(b)} + \eta^{(a)(c)}\omega_{(b)(c)}{}^{(e)}\omega_{(a)(e)}{}^{(b)} - \\ - \eta^{(a)(c)}c_{(a)(b)}{}^{(e)}\omega_{(e)(c)}{}^{(b)},\end{aligned} \tag{41}$$

Поднимая индекс в выражении для спиновой связности (19) через ω^R и ω^L, мы с точностью до обозначения индексов получаем формулу для её компонент в той форме, в которой она нам нужна в выражении (41). Поскольку динамическими переменными в данном случае являются ω^R, а не ω^L, то выпишем явно формулу только для них

$$\omega_{(b)(c)}{}^{(d)} = \eta^{(d)(a)}\left(\omega^L_{(a)(c),(b)} + \omega^R_{(b)(a),(c)} - \omega^R_{(c)(b),(a)}\right). \tag{42}$$

Тогда $\omega_{(b)(c)}{}^{(b)}$ выражается формулой

$$\omega_{(b),(c)}{}^{(b)} = \eta^{(b)(a)}\left(\omega^L_{(a)(c),(b)} + \omega^R_{(b)(a),(c)} - \omega^R_{(c)(b),(a)}\right). \tag{43}$$

В силу наложенных выше условий калибровки $N = 1$, $N_i = 0$ и $\gamma = 1$ только компоненты формы объёма $\sqrt{-g} = 1$ и ω^R могут содержаться в вычисленном выше выражении для скалярной кривизны. Тогда подставляя (42) и (43) в (41) с учётом расположения индексов, можно получить выражение для производных от ω^R, из которого видно, что в лагранжиане отсутствуют члены содержащие квадрат производных ω^R, из которого мог бы после интегрирования по частям возникнуть пропагатор конформного гравитона. Таким образом, если мы принимаем ω^R в качестве фундаментальных переменных квантовой гравитации, то мы обнаруживаем отсутствие аналога привычного нам в квантовой теории поля волнового уравнения для гравитационных переменных ω^R.

Выясним теперь как выглядят члены взаимодействия гравитации с материей, если в качестве базовых переменных при квантовании конформной ОТО выбрать ω^R. Прежде всего отметим следующий факт. В модифицированных теориях гравитации взаимодействие полей материи может входить в действие в минимальном или в неминимальном виде. Если рассматриваемое взаимодействие является минимальным, то связанные с ним члены лагранжиана могут содержать компоненты метрического лишь в форме свёртки компонент метрики с остальными полями и их производными либо в виде умножения на $\sqrt{-g}$. Если же рассматриваемое взаимодействие является неминимальным, то связанные с ним члены лагранжиана могут содержать производные от компонент метрики первого и более высоких порядков.

Рассмотрим снова действие (44). Из-за наложенных выше условий калибровки $N = 1$, $N_i = 0$ и $\gamma = 1$ получаем $\sqrt{-g} = 1$, и для действия материи лагранжиан будет иметь вид

$$S = \int d^4\chi L_{\text{matter}}(\tilde{g}_{\mu\nu}). \tag{44}$$

Отметим, что если мы рассматриваем только члены взаимодействия в (44), то в силу (46) имеем

$$dg_{\mu\nu} = dx^\alpha \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = \left(e^{(b)}{}_\mu e^{(a)}{}_\nu + e^{(a)}{}_\mu e^{(b)}{}_\nu\right)\omega^R_{(b)(a),\alpha}dx^\alpha. \tag{45}$$

Соответственно, после перехода к тетрадным индексам с помощью $e_{(c)}{}^\alpha$, получаем систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{(c)}} = \left(e^{(b)}{}_\mu e^{(a)}{}_\nu + e^{(a)}{}_\mu e^{(b)}{}_\nu\right)\omega^R_{(b)(a),(c)}, \tag{46}$$

которую необходимо решить, чтобы выразить компоненты метрического тензора через переменные ω^R, но в отсутствии пропагатора для ω^R построить стандартную квантовую теорию взаимодействия ω^R с полями материи невозможно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе были исследованы некоторые свойства конформной модификации ОТО, связанные с переменными ω^R. В частности, было показано, что выражение для компонент спиновой связности (19) выраженных через ω^L и ω^R можно получить посредством формальных преобразований над стандартной формулой для спиновой связности, которую обычно записывают через коэффициенты неголономности в виде (12). Тем самым показано, что для введения переменных ω^R, ω^L и получения через них выражения для компонент спиновой связности (19) использование конформной симметрии и нелинейной реализации группы симметрий не является обязательным, как это утверждалось в ранней работе [1]. Таким образом, мы обобщили выражение для компонент спиновой связности (19), записанное через ω^R и ω^L на гораздо более широкий круг теорий гравитации. А именно, компоненты спиновой связности можно представить в виде (19) в любой теории гравитации, в которой спиновая связность является метрической. Важность этого результата связана с тем, что различными авторами предпринимаются попытки квантовать гравитацию, рассматривая в качестве базовых переменных тетрады. А ω^R и ω^L связаны с тетрадными переменными напрямую посредством формул (24) и (23). В связи с этим можно предположить, что данный факт может быть полезен в том числе для тех физиков, которые пытаются развить данный подход.

В разделе (2) было показано, что гравитационный лагранжиан не содержит членов квадратичных по производным от ω^R, из которых после интегрирования по частям мог бы возникнуть пропагатор конформного гравитона в смысле переменных ω^R. В итоге мы приходим к выводу, что если переменные ω^R принимаются в качестве фундаментальных переменных квантовой гравитации, то квантовая гравитация оказывается тривиальной в том смысле, что конформные гравитоны не только не взаимодействуют друг с другом, но также и не взаимодействуют с материей. При этом на классическом уровне самодействие гравитации сохраняется как и должно быть.

Благодарности

Авторы выражает благодарность Латошу Б.Н. за полезные обсуждения.

[1] *Arbuzov A., Latosh B.* // Universe **4**. 38. (2018).
[2] *Arbuzov A.B., Cherny A. Yu., Cirilo-Lombardo D. J., Nazmitdinov R. G., Han N. S., Pavlov A. E., Pervushin, V. N., Zakharov, A. F.* // Phys. Atom. Nucl. **80**. 491. (2017).
[3] *Ogievetsky, V. I.* // Lett. Nuovo Cim. **8**. 988. (1973).
[4] *Deser S.* // Annals Phys. **59**. 248. (1970).
[5] *Behnke D., Blaschke D. B., Pervushin V. N., Proskurin D.* // Phys. Lett. B **530**. 20. (2002).
[6] *Pervushin V. N., Arbuzov A. B., Barbashov B. M., Nazmitdinov R. G., Borowiec A., Pichugin K. N., Zakharov A. F.* // Gen. Rel. Grav. **44**. 2745. (2012).
[7] *Zakharov A. F., Pervushin V. N.* // Int. J. Mod. Phys. D **19**. 1875. (2010).
[8] *Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М.* // Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. М.: Энергоатомиздат., 1988.
[9] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* // Теория поля. Т. 2. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
[10] *Katanaev, M. O.* // arXiv: 1311.0733.
[11] *Ivanov, E. A.* // Phys. Part. Nucl. **47**. 508. (2016).
[12] *Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A.* // Gravitation. W.H. Freeman., 1973.
[13] *York Jr., James W.* // Phys. Rev. Lett. **26**. 1656. (1971).

About spin connections as quantization variables of gravity

A. B. Arbuzov,[a]**, A. A. Nikitenko**[b]

Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research
Dubna, Moscow Region 141980 Russia
E-mail: [a]*arbuzov@theor.jinr.ru,* [b]*nikitenko@theor.jinr.ru*

Quantization of conformal general relativity is studied. The components of spin connectivity are considered to be the basic variables of quantum gravity. Their properties are analyzed and the dynamic part is highlighted. The work also uses tetrad formalism and the Arnovitt-Deser-Misner formalism. The gravitational action turns out to be quadratic in the components of the spin connection. Secondary quantization of the gravitational field is performed in terms of spin connectivity and further prospects for this approach are discussed.

PACS: 04.20.Cv .
Keywords: General Relativity, conformal invariance, tetrad formalism, spin coupling, quantum gravity.
Received 01 June 2024.

Сведения об авторах

1. Арбузов Андрей Борисович — доктор физ.-мат. наук, профессор РАН, нач. сектора; e-mail: arbuzov@theor.jinr.ru.
2. Никитенко Андрей Андреевич — мл. науч. сотрудник; e-mail: nikitenko@theor.jinr.ru.