

Использование состояний «кота Шредингера» для детектирования фиксированного фазового сдвига с использованием фотоноразрешающих детекторов с конечной квантовой эффективностью

В. Л. Горшенин^{1,2*}

¹Российский квантовый центр, Инновационный центр Сколково
Россия, 121205, Москва, Большой бульвар, 30 стр. 1

²Московский физико-технический институт
Россия, 141701, Долгопрудный,
Институтский переулок, 9

(Поступила в редакцию 13.05.2024; подписана в печать 05.07.2024)

Одной из стандартных задач интерферометрии является бинарное (да/нет) детектирование заданного фазового сдвига. Ее преимуществом, по сравнению с задачей измерения неизвестного фазового сдвига, является наличие априорной информации, что позволяет получить более высокую чувствительность. Весьма привлекательным, в этом случае, является использование существенно неклассических негауссовских состояний зондирующего света.

В данной работе исследована интерферометрическая схема, использующая негауссовские состояния типа «кот Шредингера» (КШ) схему, с учетом влияния неидеальной квантовой эффективности фотодетектора. Выполнены оценки для реалистичных значений квантовой эффективности и практически достижимых значений амплитуд КШ.

PACS: 2.50.Lc, 42.62.Eh, 42.87.Bg

УДК: 530.145.82, 535.14.

Ключевые слова: квантовая оптика, интерферометрия, состояние кота Шредингера.

ВВЕДЕНИЕ

На самом фундаментальном уровне, чувствительность интерферометрических оптических измерений фазы ограничивается квантовыми флуктуациями света в них и, следовательно, зависит от его квантового состояния (см. обзоры [1, 2] и цитированную в них литературу). В случае когерентных квантовых состояний, генерируемых стабилизированными лазерами, фазовая чувствительность соответствует пределу дробового шума (Shot Noise Limit, SNL):

$$\Delta\phi_{\text{SNL}} = \frac{1}{2\sqrt{N}}, \quad (1)$$

где N — среднее число фотонов, использованных для измерения.

В работе [3] было показано, что более высокую чувствительность при заданном N можно получить, используя т.н. сжатые квантовые состояния света. В случае умеренного сжатия, $e^{2r} \ll N$, где r — логарифмический фактор сжатия, чувствительность можно улучшить в e^r по сравнению с SNL:

$$\Delta\phi_{\text{SQZ}} = \frac{e^{-r}}{2\sqrt{N}}, \quad (2)$$

Этот метод в настоящее время успешно применяется в километрового масштаба интерферометрах лазерных детекторов гравитационных волн [4].

Как когерентные, так и сжатые состояния относятся к классу гауссовских состояний, то есть их функции

Вигнера [5] имеют форму двумерного гауссовского колокола. В последние годы заметный интерес привлекает возможность использования в интерферометрии экзотических негауссовских состояний [6–14]. В частности, в работах [13, 14], была теоретически исследована возможность использования состояний типа «кот Шредингера» (КШ). Однако в работах [15, 16] было показано, что для измерения априори неизвестной фазы, негауссовские состояния не дают преимуществ по сравнению с обычными гауссовскими.

Однако возможна и другая постановка задачи, а именно, различение двух возможных событий [17], и в частности, бинарное(да/нет) обнаружение известного фазового сдвига. Этот подход может быть использован, например, для различения двух близких коэффициентов преломления.

В этом случае негауссовские состояния могут обеспечить лучшую чувствительность, чем гауссовские, так как они могут быть ортогональны друг другу и поэтому в принципе могут быть безошибочно различены [17]. В работе [18] эта концепция была продемонстрирована экспериментально для задачи обнаружения силового воздействия на ион в ловушке, поступательная степень свободы которого была приготовлена в (негауссовском) одноквантовом состоянии.

В нашей предыдущей работе [19] был предложен метод детектирования фазового сдвига, использующий состояния КШ и счетный детектор фотонов. Было показано, что при использовании идеального детектора, можно получить нулевую вероятность ложных срабатываний при ненулевой, но малой вероятности пропуска сигнала.

В настоящей работе исследуется практическая реализуемость предложенного метода с учетом того, что

* valentine.gorshenin@yandex.ru

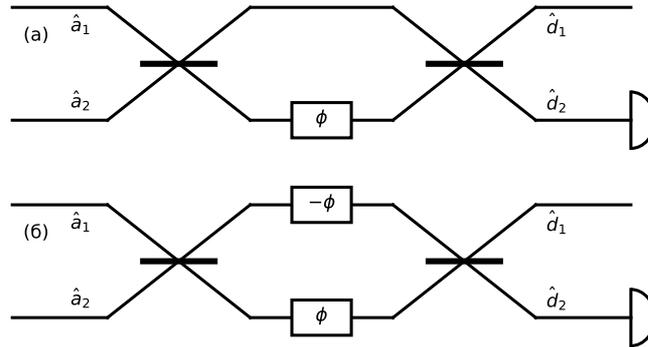


Рис. 1. Оптические схемы асимметричного (а) и антисимметричного (б) интерферометра Маха–Цандера. «Светлые» порты обозначены индексом «1», «темные» порты — индексом «2».

квантовая эффективность реальных счетных детекторов фотонов (η) не равна единице. Статья организована следующим образом. В разделе 1 описан протокол детектирования заданного фазового сдвига в интерферометре Маха–Цандера, предложенный в [19] и используемый в настоящей работе. В разделе 2 рассчитана чувствительность данного метода с учетом неидеальной квантовой эффективности фотодетектора. В разделе 2 обсуждается практическая реализуемость рассматриваемого метода детектирования фазового сдвига.

1. ПРОТОКОЛ ИЗМЕРЕНИЯ

В работе [19] были рассмотрены две наиболее экспериментально важные конфигурации интерферометра Маха–Цандера (см. обзор [2]) — асимметричная (см. рис. 1, а) и антисимметричная (см. рис. 1, б). В первой, концептуально более простой, фазовый сдвиг ϕ вносится только в одно плечо, а коэффициенты отражения и пропускания светоделителей существенно отличаются, ($R \gg T$). Во второй конфигурации фазовые сдвиги ϕ и $-\phi$ вносятся асимметрично в оба плеча и используются сбалансированные светоделители $R = T = 1/\sqrt{2}$. Эта конфигурация более толерантна к разнообразным техническим шумам и дрейфам.

В обоих вариантах предполагается яркое когерентное состояние на «светлом» входном порту и некоторое квантовое состояние $|\Psi_0\rangle$ на темном входном порту. Предполагается, что интерферометр настроен так, что при отсутствии фазового сдвига ($\phi = 0$) выходные состояния совпадают с входными. В этом случае, в линейном по малым сдвигам фаз и по квантовым флуктуациям приближении, поле на «светлом» выходном порту не несет информации о фазе. Квантовое состояние поля на «темном» выходном порту может быть

представлено в виде:

$$|\Psi_\delta\rangle = \hat{D}(\delta) |\Psi_0\rangle, \quad (3)$$

где

$$\hat{D}(\delta) = e^{i\delta(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)} \quad (4)$$

— оператор сдвига, \hat{a} и \hat{a}^\dagger — операторы уничтожения и рождения,

$$\delta = \sqrt{N}\phi \quad (5)$$

— параметр сдвига, и \sqrt{N} — число фотонов на фазосдвигающем объекте (объектах).

Предположим теперь, что состояние $|\Psi_0\rangle$ является состоянием КШ:

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{K}}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle), \quad (6)$$

где $|\alpha\rangle$, $|-\alpha\rangle$ — когерентные состояния и

$$K = 2(1 + e^{-2|\alpha|^2}) \quad (7)$$

— нормировочный фактор.

В работе [20] было показано, что состояние КШ и сдвинутое состояние КШ при определенных значениях параметра сдвига становятся ортогональными друг другу. В частности, это относится к состояниям $|\Psi_0\rangle$ и $|\Psi_\delta\rangle$ в формуле (3). Тем самым, в принципе, эти состояния могут быть безошибочно различены. С учетом того, что $|\Psi_0\rangle$ является выходным состоянием интерферометра при $\phi = 0$, отсюда следует, что рассмотренная схема позволяет безошибочно детектировать фазовые сдвиги, при которых состояния $|\Psi_0\rangle$ и $|\Psi_\delta\rangle$ ортогональны. Как было показано в [19], параметр сдвига (δ) задается соотношением:

$$\delta_k = \frac{\arccos(-e^{-2\alpha^2}) + 2\pi k}{2\alpha}, \quad (8)$$

где k — целое число. Очевидно, что наилучшая чувствительность достигается при $k = 0$. Соответствующий фазовый сдвиг равен:

$$\phi_0 = \frac{\arccos(-e^{-2\alpha^2})}{2\alpha\sqrt{N}}. \quad (9)$$

Как было показано в монографии [17], безошибочное различение двух ортогональных состояний $|\Psi_0\rangle$ и $|\Psi_\delta\rangle$ требует использования процедуры измерения, описываемой положительной операторной вероятностной мерой (ПОВМ)

$$\{|\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|, |\Psi_\delta\rangle\langle\Psi_\delta|\}. \quad (10)$$

Однако реализация такой процедуры для случая (6) неизвестна.

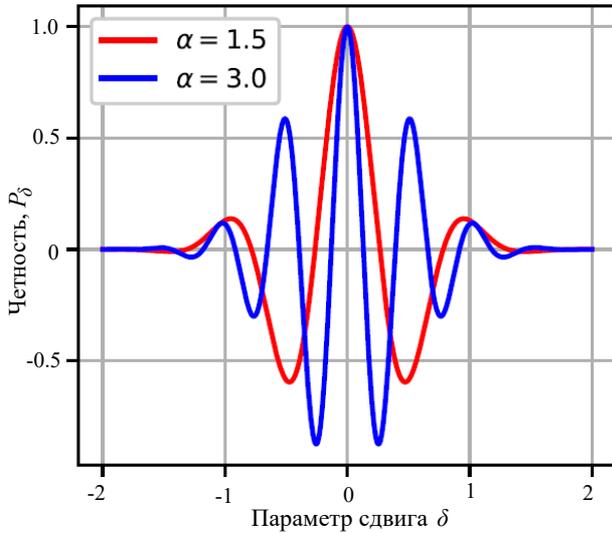


Рис. 2. Зависимость четности сдвинутого состояния КШ от сдвига δ (см. формулу (11)).

В работе [19] был предложен метод детектирования, дающий несколько худший, но все равно очень интересный результат. В его основе лежит измерение четности $\hat{\Pi} = (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}}$ на выходе интерферометра при помощи разрешающего число квантов фотодетектора.

Как показано в [19], зависимость средней четности $P_\delta = \langle\Psi_\delta|\hat{\Pi}|\Psi_\delta\rangle$ от сдвига δ имеет следующий вид:

$$P_\delta = p_{\text{even}} - p_{\text{odd}} = \langle\Psi_\delta|\hat{\Pi}|\Psi_\delta\rangle = e^{-2\delta^2} \frac{\cos 4\alpha\delta + e^{-2\alpha^2}}{1 + e^{-2\alpha^2}}, \quad (11)$$

где p_{even} и p_{odd} — соответственно вероятности получить четное и нечетное число фотонов в результате измерения. График функции P_δ для двух характерных значений параметра α приведен на рис. 2.

При $\delta = 0$ состояние КШ $|\Psi_0\rangle$ имеет четную статистику:

$$p_{\text{even}} = 1 \Rightarrow P_0 = 1. \quad (12)$$

С ростом δ , средняя четность уменьшается, достигая минимума $P_{\text{min}} < 0$ при некотором $\delta = \delta_{\text{opt}}$, примерно равном

$$\delta_{\text{opt}} \approx \frac{\pi}{4\alpha} \frac{1}{1 + \frac{1}{4\alpha^2}}. \quad (13)$$

В [19] была предложена следующая стратегия обнаружения. Пусть точно известно, что сдвиг фаз ϕ равен либо нулю, либо $\phi_{\text{opt}} = \delta_{\text{opt}}/\sqrt{N}$, см. формулу (5). Тогда при измерении четного числа фотонов принимается решение, что $\phi = 0$, а нечетного — что $\phi = \phi_{\text{opt}}$.

Очевидно, что в этом случае в силу (12) вероятность ложного срабатывания $p_{\text{f.p.}}$ (было $\phi = \phi_{\text{opt}}$, принято решение, что $\phi = \phi_0$) равна нулю. Однако в силу того, что минимум четности (11) не достигает -1 , вероятность пропуска сигнала (было $\phi = \phi_0$, принято решение, что $\phi = \phi_{\text{opt}}$) остается ненулевой:

$$p_{\text{f.p.}} = p_{\text{even}}|_{\text{min}} = \frac{1 + P_{\text{min}}}{2}. \quad (14)$$

2. УЧЕТ ЭФФЕКТИВНОСТИ ФОТОДЕТЕКТОРА

Используя формулы (3), (4) и (6), легко показать, что

$$\begin{aligned} |\Psi_\delta\rangle &= \frac{1}{\sqrt{K}} (e^{i\delta\alpha} |\alpha + i\delta\rangle + e^{-i\delta\alpha} |-\alpha + i\delta\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{K}} e^{-(\alpha^2 + \delta^2)/2} \times \\ &\times \sum_n \frac{1}{\sqrt{n!}} [e^{i\alpha\delta} (\alpha + i\delta)^n + e^{-i\alpha\delta} (-\alpha + i\delta)^n] |n\rangle. \end{aligned} \quad (15)$$

Распределение вероятностей по числу квантов для этого состояния имеет вид:

$$p_n = |\langle n|\Psi_\delta\rangle|^2 = \frac{2e^{-(\alpha^2 + \delta^2)}}{K n!} \times \left((\alpha^2 + \delta^2)^n + \Re\{e^{2i\alpha\delta} [-(\alpha + i\delta)^2]^n\} \right). \quad (16)$$

Используя модель эффективного светоделителя [21], можно показать, что для фотодетектора с квантовой эффективностью η условная вероятность зарегистрировать n фотонов при N фотонах на входе задается биномиальным распределением вида

$$p(n|N) = \frac{N!}{n!(N-n)!} (1-\eta)^{N-n} \eta^n. \quad (17)$$

Для входного распределения (16) вероятность зарегистрировать n фотонов, соответственно, будет равна:

$$p_n^{(\eta)} = \sum_{N=n}^{\infty} P(n|N) p_N. \quad (18)$$

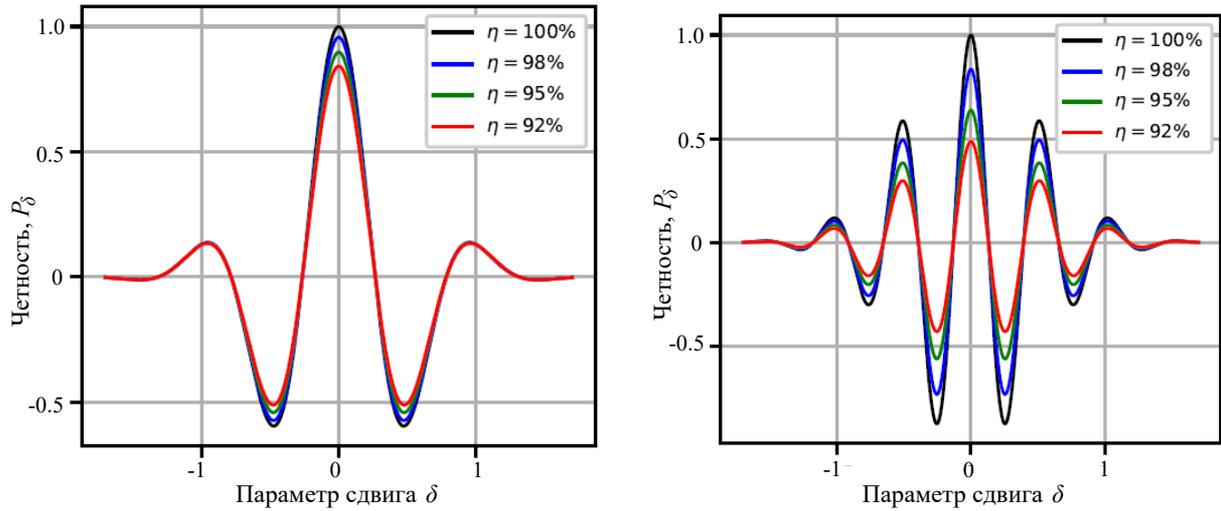


Рис. 3. (Слева) Четность $P_\delta^{(\eta)}$ при $\alpha = 1.5$. (Справа) Четность $P_\delta^{(\eta)}$ при $\alpha = 3$ см. формулу (24). Зависимости представлены для различных квантовых эффективностей

Далее используем следующую лемму (X – произвольное число):

$$\sum_{N=n}^{\infty} P(n|N) \frac{X^N}{N!} = \frac{(\eta X)^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{((1-\eta)X)^m}{m!} = \frac{(\eta X)^n}{n!} e^{(1-\eta)X}. \quad (19)$$

В итоге получим, что

$$p_n^{(\eta)} = \frac{2e^{-\eta(\alpha^2+\delta^2)}}{Kn!} \times \left(\eta^n (\alpha^2+\delta^2)^n + e^{-2(1-\eta)\alpha^2} \Re \left[e^{2i\alpha\delta\eta} (-\alpha+i\delta)^n \eta^n \right] \right). \quad (20)$$

Вероятности получить в результате измерения четное и нечетное число фотонов равны, соответственно:

$$p_{\text{even}}^{(\eta)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{2n}, \quad p_{\text{odd}}^{(\eta)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{2n+1}. \quad (21)$$

Используя формулы суммирования:

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (22)$$

можно показать, что:

$$p_{\text{even}}^{(\eta)} = \frac{1 + P_\delta^{(\eta)}}{2}, \quad p_{\text{odd}}^{(\eta)} = \frac{1 - P_\delta^{(\eta)}}{2}, \quad (23)$$

где

$$P_\delta^{(\eta)} = e^{-2\eta\delta^2} \frac{e^{-(1-\eta)\alpha^2} \cos 4\alpha\delta + e^{-2\eta\alpha^2}}{1 + e^{-2\alpha^2}} \quad (24)$$

— средняя четность с учетом потерь, сравните с формулой (11). Зависимость четности при разумных квантовых эффективностях для $\alpha = 1.5$ и $\alpha = 3$ представлены на рис. 3.

Пусть используется та же стратегия обнаружения, что и в работе [19], то есть вероятность пропуска сигнала равна вероятности измерения четных фотонов при $\delta \neq 0$, а вероятность ложного срабатывания равна вероятности измерения нечетных фотонов при $\delta = 0$. Последняя теперь отлична от нуля в силу возможности потерь фотонов из-за диссипации:

$$p_{\text{f.p.}}^{(\eta)} = \frac{1 - P_0^{(\eta)}}{2} = \frac{1}{K} (1 - e^{-2(1-\eta)\alpha^2}) (1 - e^{-2\eta\alpha^2}). \quad (25)$$

На рис. 4 (слева) представлена зависимость вероятности пропуска сигнала от амплитуды состояния КШ при различных значениях квантовой эффективности η . Величина δ выбирается для достижения минимума ошибки пропуска сигнала. На рис. 4 (справа) представлена зависимость вероятности ложного срабатывания от амплитуды состояния КШ также соответственно при различных квантовых эффективностях η .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как следует из полученных нами результатов, неидеальность квантовой эффективности детектирования оказывает существенное влияние на чувствительность рассмотренной нами схемы. В частности, в отличие от случая идеального детектора, помимо вероятности пропуска сигнала, становится отличной от нуля также вероятность ложного срабатывания, причем последняя довольно быстро растет с ростом амплитуды КШ α .

Следует подчеркнуть, однако, что развитие счетных детекторов фотонов сегодня достигло значительных

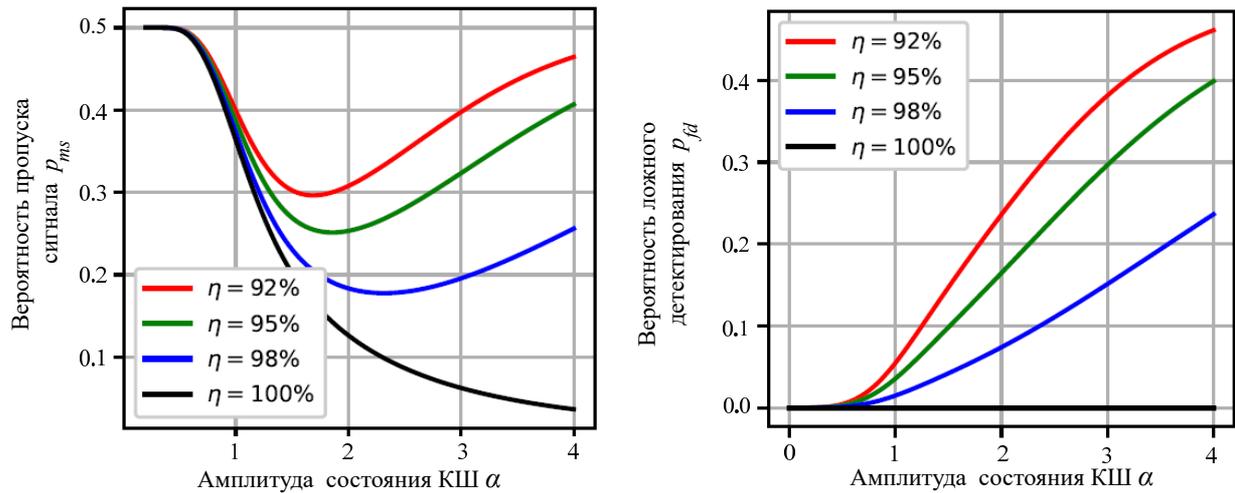


Рис. 4. (Слева) Вероятность пропуска сигнала p_{ms} для различных квантовых эффективностей η счетных детекторов фотонов, см. формулы (23), (24). (Справа) Вероятность ложного срабатывания p_{fd} для различных квантовых эффективностей η счетных детекторов фотонов, см. (25))

успехов. Один из типов, обеспечивающих наибольшую квантовую эффективность – криогенные счетные детекторы фотонов. Такие детекторы демонстрируют квантовую эффективность до 95% [22–24]. Основным ограничивающим фактором квантовой эффективности этого типа детекторов являются потери на вводе. Однако недавно была предложена схема ввода излучения в счетный детектор с эффективностью ввода до 98% [25].

Из рис. 4 видно, что оптимальный баланс ошибок пропуска сигнала и ложного срабатывания обеспечивается при относительно небольших значениях амплитуды КШ, $\alpha \sim 2$. Отметим, что первое успешное при-

готовление состояния КШ с амплитудой $\alpha^2 \approx 0.8$ было успешно выполнено в 2006 году [26]. В более поздних работах экспериментально были достигнуты амплитуды состояния КШ $\alpha^2 \sim 3$, см. статьи [27, 28].

Данная работа была поддержана грантом № 23-1-1-39-1 Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС». Автор выражает благодарность своему научному руководителю Ф. Я. Халили. Также автор благодарит Б. Н. Нугманова, Д. И. Салькину и С. Н. Балыбина за полезные замечания и дискуссии.

- [1] Andersen U.L., Glöckl O., Gehring T., Leuchs G. // Quantum Information: From Foundations to Quantum Technology Applications 2019. Part 8. Sec. 35. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA
- [2] Salykina D., Khalili F. // Symmetry. **15**, N3. 774. (2023).
- [3] Caves C.M. // Phys. Rev. D. **23**, N8. 1693. (1981).
- [4] Dwyer S.E., Mansell G.L., McCuller L. // Galaxies. **10**, N2. 46. (2022).
- [5] Schleich W.P. // Quantum optics in phase space. John Wiley & Sons. 2011.
- [6] Holland M.J., Burnett K. // Phys. Rev. Lett. **71**, N9. 1355. (1993).
- [7] Lee H., Kok P., Dowling J.P. // Journal of Modern Optics. **49** N14-15. 2325. (2002).
- [8] Campos R.A., Gerry C.C., Benmoussa A. // Phys. Rev. A. **68**, N2. 023810. (2003).
- [9] Berry D.W., Higgins B.L., Bartlett S.D. et al. // Phys. Rev. A. **80**, N5. 052114. (2002).
- [10] Pezzé L., Smerzi A. // Phys. Rev. Lett. **110**, N16. 163604. (2013).
- [11] Daryanoos, S., Slussarenk, S., Berry D.W. et al. // Nature communications. **9**, N1. 4606. (2018).
- [12] Perarnau-Llobet M., González-Tudela A., Cirac J.I. // Quantum Science and Technology. **5**, N2. 025003. (2020).
- [13] Shukla G., Mishra K.M., Pandey A.K. et al. // Optical and Quantum Electronics. **55**, N5. 460. (2023).
- [14] Shukla G., Yadav D., Sharma P. et al. // Physics Open. **18**, 100200. (2024).
- [15] Lang M.D., Caves C.M. // Phys. Rev. Lett. **111**, N17. 173601. (2023).
- [16] Lang M.D., Caves C.M. // Phys. Rev. A. **90**, N2. 025802. (2014).
- [17] Helstrom C.W. // Quantum detection and estimation theory. Academic Press. 1976.
- [18] Wolf F., Shi Ch., Heip J.C. et al. // Nature communications. **10**, N1. 2929. (2019).
- [19] Gorshenin V.L. // Laser Phys. Lett. **21**, N6. 065201. (2024).
- [20] Singh R., Teretenkov A.E. // Physics Open. **18**, 100198. (2024).
- [21] Leonhardt U., Paul H. // Phys. Rev. A. **48**, N6. 4598.

- (1993).
- [22] *Gerrits T., Calkins B., Tomlin N.* et al. // Optics Express. (2012). **20**, N 21. 23798
- [23] *Stasi L., Gras G., Berrazouane R.* et al. // Phys. Rev. Appl. **19**, N 6. 064041. (2023).
- [24] *Adriana E.L., Aaron J.M., Sae W.N.* // Optics express. **16**, N 5. 3032 (2008).
- [25] *Fukuda D.* // Optics express. **19**, N 2. 870 (2011).
- [26] *Ourjoumtsev A., Tualle-Brouiri R., Laurat J.* et al. // Science. **312**, N 5770. 83 (2006).
- [27] *Huang, Kehui* et al. // Phys. Rev. Lett. **115**, N 2. 023602. (2015).
- [28] *Sychev D.V., Ulanov A.E., Pushkina A.A.* et al. // Nature Photonics. **11**, N 6. 379 (2017).

Using Schrödinger cat state for detection of a given phase shift using photon-number resolving detector with finite quantum efficiency

V. L. Gorshenin^{1,2}

¹*Russian Quantum Center. Skolkovo, 143025, Russia*

²*Moscow Institute of Physics and Technology. Dolgoprudny, 141700, Russia*

E-mail: valentine.gorshenin@yandex.ru

One of the standard tasks of interferometry is binary (yes/no) detection of a given phase shift. Its advantage over the task of measuring an unknown phase shift is the availability of a priori information, which allows for higher sensitivity. The use of non-classical non-Gaussian states of the probing light looks very promising in this case. In this work, we consider an interferometric scheme using the Schrödinger cat (SC) non-Gaussian states, taking into account the non-ideal quantum efficiency of the photodetector. We calculate the achievable sensitivity, assuming the realistic values of quantum efficiency and achievable values of the SC state amplitudes.

PACS: 42.50.Lc, 42.62.Eh, 42.87.Bg.

Keywords: quantum optics, interferometry, Schrodinger cat state.

Received 2024.

Сведения об авторе

Горшенин Валентин Леонидович, студент 6 курса; e-mail: valentine.gorshenin@yandex.ru.