# Устойчивость отрицательности функции Вигнера к диссипации

Б. Н. Нугманов[1,2]*
[1]Российский квантовый центр, 121205, Москва, Сколково, Большой бульвар, д. 30, стр. 1
[2]Московский физико-технический институт
Россия, 141701, Московская область,
г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9

(Поступила в редакцию 14.05.2024; подписана в печать 01.07.2024)

Негауссовы квантовые состояния, описываемые функциями Вигнера, принимающими отрицательные значения, важны как для фундаментальных тестов квантовой физики, так и для активно развивающихся сейчас квантовых информационных технологий. В настоящей работе мы изучаем их уязвимость к диссипации. Мы находим предельные потери, при котором негативность пропадает, а также рассматриваем скорость убывания объёма негативности в окрестности его нуля. Мы рассматриваем также влияние сжатия на устойчивость негативности к потерям и показываем, что оно может улучшать ее.

PACS: 42.50.-p, 42.25.Bs, 42.79.Fm УДК: 535.14
Ключевые слова: негауссовы состояния, функция Вигнера, квазираспределения вероятности, оптические потери.

## ВВЕДЕНИЕ

Квантовые состояния систем, описываемых непрерывными переменными (continuous variables, CV) могут быть удобно описаны с использованием квантовых квазивероятностных распределений (quasi-probability distributions, QPD) [1, 2], таких как $Q$-функция Хусими [3], $W$-функция Вигнера [4] и функция Глаубера-Сударшана $P$ [5]. Эти функции, определенные в фазовом пространстве, напоминают классические распределения вероятностей для координаты и импульса, но имеют взаимно однозначное соответствие с операторами плотности соответствующих квантовых состояний. Они могут быть восстановлены экспериментально с использованием процедуры квантовой томографии [6].

В случае квантовых состояний с гауссовой формой функции Вигнера — *гауссовых* квантовых состояний — эта форма в точности совпадает с соответствующим классическим распределением вероятностей для координаты/импульса. В то же время, согласно теореме Хадсона [7], функции Вигнера для всех других чистых квантовых состояний - негауссовых - принимают отрицательные значения, что, очевидно, невозможно для классических распределений вероятности.

Несколько взаимосвязанных особенностей, важных как для фундаментального теста применимости квантовой физики к макроскопическим объектам [8–10], так и для развивающихся технологий квантовой информации [11, 12], делают негауссовы состояния «более квантовыми» по сравнению с гауссовыми. Гауссовы состояния никогда не могут быть ортогональными друг другу, в то время как, очевидно, ортогональность имеет решающее значение для многих квантовых явлений. Гауссовы состояния допускают локальное описание скрытых переменных в терминах положения и импульса; поэтому все эксперименты, основанные на гауссовых состояниях и линейных (положение/импульс) измерениях, могут быть объяснены в рамках парадигмы локальных скрытых переменных [13]. Негауссовы состояния необходимы для протоколов, которые не могут быть эффективно симулированы классическим компьютером [14].

В то же время хорошо известно, что негауссовы состояния подвержены диссипации, которая превращает их в некогерентные смеси гауссовых состояний. В работе [15] было показано, что условие

$$\eta > \frac{1}{2}, \tag{1}$$

где $\eta$ — квантовая эффективность системы (включая, например, квантовую эффективность детектора), является *необходимым* условием для отрицательности функции Вигнера.

В настоящей работе мы изучаем вопрос устойчивости негауссовых состояний к потерям в терминах негативности функции Вигнера. Раздел 1 представляет собой краткое введение в квазивероятностные распределения. Далее в разделе 2 мы численно исследуем, как сжатие состояния влияет на чувствительность к потерям для двух важных классов негауссовых состояний: Фоковских и состояний кота Шрёдингера (КШ). В разделе 3 мы показываем, что при условии (1) негативность исходно чистых состояний достоверно сохраняется, то есть это условие является также и *достаточным*. В разделе 4 мы исследуем зависимость объема негативности функции Вигнера от $\eta$ в окрестности точки $\eta = 1/2$. Наконец, в разделе 4 мы резюмируем наши результаты.

## 1. КВАЗИВЕРОЯТНОСТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В этом разделе мы рассматриваем основные характеристики квазивероятностных распределение (КВР),

* nugmanov.bn@phystech.edu

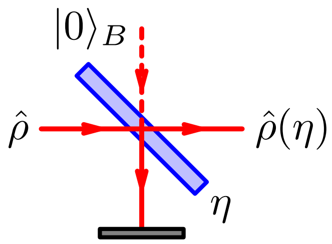


Рис. 1. Эффективная модель диссипации; $\eta$: общая квантовая эффективность

известные в литературе, и вводим основные обозначения, используемые в настоящей статье.

Пусть $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ — операторы уничтожения и рождения гармонического осциллятора (например, моды электромагнитного поля), удовлетворяющие стандартному коммутационному соотношению $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Введем s-параметризованное множество характеристических функций следующим образом [1]:

$$C(z, s) = \mathrm{Tr}\big[\hat{\rho} e^{i(z^* \hat{a} + z\hat{a}^\dagger)}\big] e^{s|z|^2/2} , \tag{2}$$

где $\rho$ — матрица плотности, $s$ — действительный параметр, принимающий значения от $-1$ до 1, а $z$ — комплексное число. Обратное преобразование Фурье от $C(z, s)$ дает соответствующий $s$-параметризованное множество КВР:

$$W(\alpha, s) = \int_{-\infty}^{\infty} C(z, s) e^{-i(z^*\alpha + z\alpha^*)} \frac{d^2 z}{\pi^2} , \tag{3}$$

где $\alpha = \frac{q+ip}{\sqrt{2}}$. Отметим важные частные случаи $W(\alpha, s)$: $Q$-функция Хусими, функция Вигнера $W$ и $P$-распределение Глаубера:

$$W(\alpha, -1) = Q(\alpha), \;\; W(\alpha, 0) = W(\alpha), \;\; W(\alpha, 1) = P(\alpha) . \tag{4}$$

Они могут быть выражены друг через друга с использованием следующего соотношения:

$$C(z, s') = C(z, s) e^{(s'-s)|z|^2/2}. \tag{5}$$

Рассмотрим теперь диссипацию. Следуя подходу статьи [15], мы моделируем потери посредством светоделителя с энергетическим коэффициентом пропускания $\eta$, который связывает рассматриваемую моду с эффективной модой термостата, который находится в основном состоянии $|0_B\rangle$, см. рис. 1. Оператор плотности результирующего квантового состояния равен:

$$\hat{\rho}(\eta) = \mathrm{Tr}_B\big(\hat{\mathcal{U}}\, \hat{\rho} \otimes |0_B\rangle \langle 0_B|\, \hat{\mathcal{U}}^\dagger\big), \tag{6}$$

где $\mathrm{Tr}_B$ — частичный след, взятый по подпространству термостата, а унитарный оператор $\hat{\mathcal{U}}$ описывает действие светоделителя:

$$\hat{\mathcal{U}}^\dagger \hat{a} \hat{\mathcal{U}} = \sqrt{\eta}\, \hat{a} + \sqrt{1-\eta}\, \hat{a}_B , \tag{7}$$

где $\hat{a}_B$ — оператор уничтожения моды термостата.

Из уравнений (2, 6, 7) следует, что результирующая характеристическая функция равна:

$$\begin{aligned} C(z, s, \eta) &= \mathrm{Tr}\big[\hat{\rho}(\eta) e^{i(z^*\hat{a} + z\hat{a}^\dagger)}\big] e^{s|z|^2/2} = \\ &= C(\sqrt{\eta} z, s) \exp\Big[-\frac{(1-s)(1-\eta)}{2} |z|^2\Big], \end{aligned} \tag{8}$$

или, альтернативно,

$$C(z, s, \eta) = C(z', s') . \tag{9}$$

Здесь

$$z' = \sqrt{\eta} z \tag{10}$$

— уменьшенное в результате потерь значение $z$, а

$$s' = \frac{s + \eta - 1}{\eta} \tag{11}$$

— новое эффективное значение параметра $s$.

Обратное преобразование Фурье уравнения (8) дает соответствующее КВР после потерь:

$$\begin{aligned} W(\alpha, s, \eta) &= \int_{-\infty}^{\infty} C(z, s, \eta) e^{-i(z^*\alpha + z\alpha^*)} \frac{d^2 z}{\pi^2} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} W(\beta, s) B(\alpha - \sqrt{\eta}\beta, s, \eta) d^2\beta , \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} B(\alpha, s, \eta) &= \frac{2}{\pi(1-s)(1-\eta)} \times \\ &\times \exp\Big[-\frac{2|\alpha|^2}{(1-s)(1-\eta)}\Big] \end{aligned} \tag{13}$$

интегральное ядро, описывающее гауссовской размытие функции Вигнера.

В данной работе метрикой для определения степени негауссовости состояния, мы используем объём негативной части функции Вигнера [16]:

$$V_{neg} = \int\limits_{W(x,p)<0} W(x, p)\, dx\, dp \tag{14}$$

## 2. ВЛИЯНИЕ СЖАТИЯ СОСТОЯНИЯ НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ К ПОТЕРЯМ

В этом разделе мы исследуем, как линейные преобразования влияют на чувствительность негауссовских состояний к потерям. Мы рассмотрим два важных класса чистых негауссовых состояний: состояния Фока и состояния кота Шрёдингера (КШ):

$$|C\rangle = \frac{1}{K}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle) , \tag{15}$$

где $|\alpha\rangle$ — когерентное состояние с амплитудой $\alpha$ и $K$ — норировочный множитель.

Сдвиги и повороты исходного состояния приводят лишь к сдвигам и поворотам функции Вигнера после добавления потерь, как это следует из формулы (12). Это значит, что данные преобразования не влияют на чувствительность к потерям.

В то же время, третье из линейных преобразований, а именно преобразование сжатия, описываемое унитарным оператором эволюции вида

$$\hat{S}(r) = \exp\left[\frac{r}{2}(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2})\right], \tag{16}$$

где $r$ — фактор сжатия, может существенно изменять чувствительность к потерям. Напрямую из формулы (12) можно вывести, как быстро сглаживаются значения функции Вигнера под воздействием потерь:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} W(\sqrt{\eta}q, \sqrt{\eta}p, \eta) = \\ = -\frac{1}{\eta}\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial\left(\sqrt{\eta}q\right)^2} + \frac{\partial^2}{\partial\left(\sqrt{\eta}p\right)^2}\right)\right] \times \\ \times W(\sqrt{\eta}q, \sqrt{\eta}p, \eta). \tag{17}$$

При небольших потерях главным критерим устойчивости является именно скорость изменения негативности. Видно, что значение функции Вигнера убывает тем быстрее, чем выше лапласиан в данной точке. Отсюда естественно предположить, что преобразование сжатия будет лишь ухудшать устойчивость состояний с аксиально симметричными областями негативности. К таковым относятся, например, Фоковские состояния.

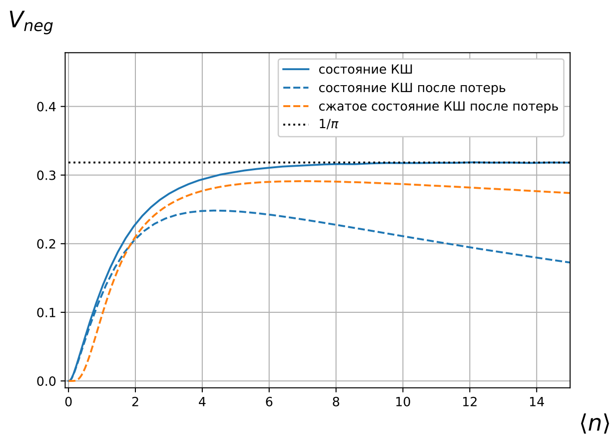


Рис. 2. Графики отрицательности Фоковских состояний $|n\rangle$ и сжатых Фоковских состояний $\hat{S}(r)\,|n\rangle$ в зависимости от начального числа квантов. Параметр сжатия $r = 0.7$; квантовая эффективность $\eta = 0.98$

На рис. 2 представлены графики зависимости негативности функций Вигнера Фоковских состояний $|n\rangle$ в зависисмости от $n$ при наличии потерь, а также аналогичные графики для сжатых Фоковских состояний $\hat{S}(r)\,|n\rangle$, у которых аксиальная симметрия нарушена. Из этих графиков видно, что нарушение аксиальной симмметрии действительно делает такие состояния более уязвимыми к потерям.

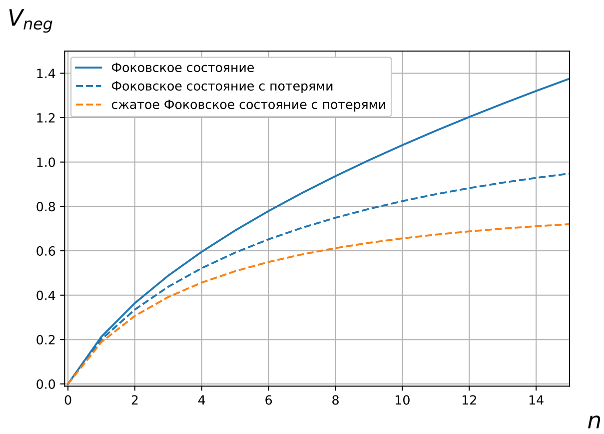


Рис. 3. Графики отрицательности состоянии «кота Шрёдингера» и сжатого «кота Шрёдингера» в зависимости от среднего числа квантов. Параметр сжатия $r = 0.7$; квантовая эффективность $\eta = 0.98$. Видно, что асимптотическая отрицательность равна $\frac{1}{\pi}$

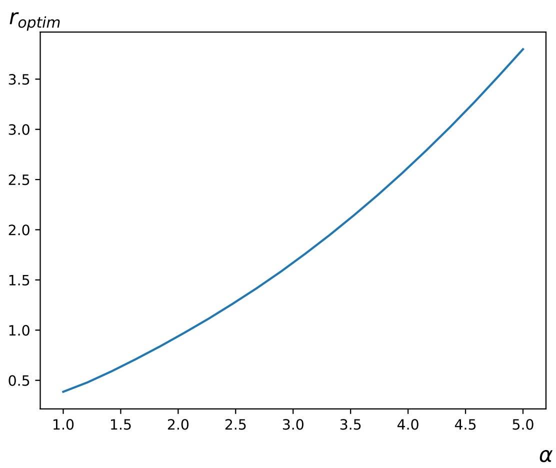


Рис. 4. График зависимости оптимального показателя сжатия $r_{optim}$ от амплитуды «кота Шрёдингера» $\alpha$

С другой стороны, для исходно аксиально несимметричных состояний сжатие может повышать устойчивость к потерям. В качестве примера можно привести состояния КШ, что демонстрируется на рис. 3. Однако слишком сильное сжатие может приводить к излишнему растяжению областей негативности и, как следствие, ухудшению устойчивости к потерям. То есть существует некоторое оптимальное сжатие, дающее наибольшую устойчивость. График зависимости оптимального параметра сжатия $r$ для состояния КШ в зависимости от параметра $\alpha$ приведен на рис. 4.

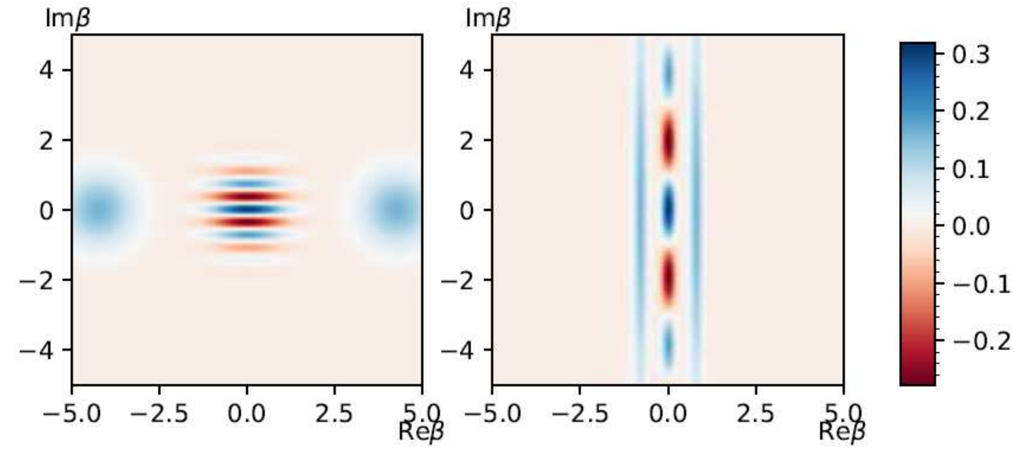


Рис. 5. Графики функций Вигнера состояния «кота Шрёдингера» для случая $\alpha = 3$. Слева: исходное (несжатое) состояние, справа — оптимально сжатое, $r \approx 1.68$

На рис. 5 приведены графики функций Вигнера исходного состояния КШ вида (15) и оптимальным образом сжатого состояния. Интересно отметить, что вопреки интуиции, области негативности не являются аксиально симметричными, а вытянуты по оси импульсов.

## 3. КРИТЕРИЙ ДЛЯ НАЛИЧИЯ ОТРИЦАТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИИ ВИГНЕРА

Рассмотрим наличие отрицательности функции Вигнера чистого состояния в зависимости от квантовой эффективности $\eta$. Очевидно, что гауссовы состояния не имеют отрицательности при любом $\eta$. Если состояние было негауссовым, то у него достоверно была отрицательность при $\eta = 1$ [7].

Далее, с уменьшением $\eta$ объем отрицательности уменьшается. При $\eta = 1/2$ отрицательность достоверно теряется для любого состояния [15], так как функция Вигнера результирующего состояния соответствует $s' = -1$ (уравнения (9), (11)). Как указано в уравнении (4), такая функция эквивалентна функции Хусими, которая по определению не имеет отрицательности.

В работе [17] было доказано, что наибольшее значение $s'$, при котором отрицательность негауссовых чистых состояний уменьшается до нуля, оказывается равным $-1$. В контексте потерь это означает, что отрицательность, если она была, гарантированно сохраняется для всех $\eta$, удовлетворяющих условию (10), то есть это условие является не только необходимым, но и достаточным для сохранения отрицательности.

## 4. НЕГАТИВНОСТЬ В ОКРЕСТНОСТИ $\eta = 1/2$

В этой части мы проанализируем, как себя ведет объем отрицательности в окрестности $\eta = 1/2 + 0$. Для чистых состояний с $\eta \le 1/2$, отрицательность полностью исчезает, в то время как для $\eta > 1/2$ она монотонно возрастает. Однако же, какова скорость роста отрицательности в этой точке?

Функция Вигнера при $\eta = 1/2$ с точностью до линейных преобразований совпадает с $Q$-функцией Хусими, выражающейся через $F^*$ — аналитическую функцию звездного ранга (stellar rank) [18]:

$$W_{1/2}(\alpha) = 2Q(\sqrt{2}\alpha) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha|^2} |F^*_\psi(\sqrt{2}\alpha)|^2, \qquad (18)$$

$$F^*_\psi(z) = e^{\frac{|z|^2}{2}} \langle z^* | \psi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \qquad (19)$$

Это значит, что если $F^*$ имеет ноль порядка $n$, то функция Вигнера имеет ноль порядка $2n$ в соответствующей точке:

$$W_{1/2}(\alpha_i + \delta\alpha) = W_i |\delta\alpha|^{2n} + o(\delta\alpha^{2n}) \qquad (20)$$

Каждый из таких нулей будет при увеличении $\eta$ становится малой областью негативности, объём которой тем больше, чем меньше $n$. Считая далее $n$ минимальным порядком нуля функции звёздного ранга, можно показать, что все производные объема отрицательности $V_{neg}$ по $\eta$ в точке $1/2$ равны нулю вплоть до порядка $n+1$. В результате взятия $n+1$-ой производной получаем сумму по всем таким нулям минимального порядка:

$$\frac{\partial^{n+1} V_{neg}}{\partial \eta^{n+1}} = \pi G_n \sum_i W_i, \qquad (21)$$

где последовательность $G_n$ представляет собой целочисленные константы ($G_1 = 4$, $G_2 = 64$, $G_3 = 4320$, и так далее). Доказательство формулы (21) и выражение для произвольного $G_n$ приведено в приложении.

Порядок нуля в функции звёздного ранга непосредственно связан с разложением состояния в сдвинутом базисе Фока. Если состояние $\psi$ ортогонально определенному $|\alpha_i\rangle$, то при сдвиге состояния на $\alpha_i$ коэффициенты в разложении в базисе Фока от 0 до $n-1$ будут равны нулю:

$$\hat{D}(\alpha_i)^{-1}\,|\psi\rangle = \sum_{k=n}^{\infty} \psi_k\,|k\rangle \tag{22}$$

В большинстве случаев минимальный порядок нуля оказывается равен единице.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что отрицательность функции Вигнера для негауссовых состояний сохраняется при любом коэффициенте полезного действия от 1/2 до 1. Мы также рассмотрели примеры типичных состояний для квантовой оптики: кот Шредингера, состояния Фока и их сжатые версии. На примере кота Шредингера было показано, что когда сжатие сонаправлено с осцилляциями функции Вигнера, состояние обладает большей устойчивостью к диссипации. Было также показано, что порядок роста негативности при $\eta = 1/2$ превышает минимальный порядок нуля функции звездного ранга соответствующего чистого состояния на единицу.

### Благодарности

Автор выражает благодарность Ф. Я. Халили за ценные замечания и Н. А. Зуникову за помощь в аналитических вычислениях.

Данная работа была поддержана грантом № 20-12-00344 Российского Научного Фонда

### Приложение А: Негативность в окрестности $\eta = 1/2$

Рассмотрим функцию Вигнера при $\eta = 1/2$, которая очень похожа на функцию Хусими:

$$W_{1/2}(\alpha) = 2Q(\sqrt{2}\alpha) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha|^2} |F_\psi^*(\sqrt{2}\alpha)|^2, \tag{A1}$$

где $F^*$ — функция stellar rank [18]. Поскольку $F^*$ аналитична, допустим, что минимальный порядок нулей этой функции равен $n$. Вначале рассмотрим случай, когда у $F^*$ есть только один такой ноль. Без ограничения общности мы можем предположить, что он находится в точке 0. Это означает, что существует положительная константа $W_0$ такая, что:

$$W_{1/2}(\delta\alpha) = W_0|\delta\alpha|^{2n} + o(\delta\alpha^{2n}) \tag{A2}$$

Для упрощения обозначений обозначим $W = W_\eta(\beta)$. При $\eta = 1/2$ подинтегральное выражение $\theta(W_\eta(\beta))$ отклоняется от 1 только в точке $\alpha_0$. Следовательно, объем отрицательности при $\eta = 1/2$ равен нулю. Докажем, что первая производная объема отрицательности всегда равна нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{neg}}{\partial \eta} &= -\int d^2\beta \frac{\partial}{\partial \eta}\left(W_\eta(\beta)\theta(-W_\eta(\beta))\right) \\ &= -\int d^2\beta \frac{\partial W_\eta(\beta)}{\partial \eta}\theta(-W_\eta(\beta)) + \\ &\quad + \int d^2\beta \underbrace{W_\eta(\beta)\delta\left(W_\eta(\beta)\right)}_{=0} \frac{\partial W_\eta(\beta)}{\partial \eta} \end{aligned} \tag{A3}$$

Последний интеграл равен нулю, так как $x\delta(x) = 0$, а подинтегральное выражение первого члена ненулевое только в конечном наборе точек.

Чтобы вычислить производные порядка $N \geq 2$, мы используем следующее выражение для объема отрицательности:

$$V_{neg}(\eta) = -1 + \int d^2\beta W_\eta(\beta)\theta(W_\eta(\beta)) \tag{A4}$$

Для упрощения дальнейших выражений вместо производных по $\eta$ мы будем рассматривать производные по $\ln\eta$. Таким образом, формулу (17) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial W}{\partial \ln \eta} = \underbrace{-\left(1 + \frac{1}{2}\left(q\frac{\partial}{\partial q} + p\frac{\partial}{\partial p}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)\right)}_{=D} W \tag{A5}$$

$D$ — это дифференциальный оператор второго порядка со следующим представлением в полярных координатах:

$$Df = -\left(f + \frac{r}{2}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}\right) \tag{A6}$$

В случае $f = r^{2l}$:

$$Dr^{2l} = -l^2 r^{2(l-1)} + o(r^{2l-2}) \tag{A7}$$

Используя это свойство, по индукции для $m \leq n$ можно показать, что при $\eta = 1/2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m W}{\partial \ln \eta^m} &= D^m W = W_0 D^m\left(r^{2n} + o(r^{2n})\right) \\ &= W_0(-1)^m\left(\frac{n!}{(n-m)!}\right)^2 r^{2(n-m)} + o(r^{2(n-m)}) \end{aligned} \tag{A8}$$

Возьмем производную порядка $N \in [2, n+1]$ от объема отрицательности:

$$\frac{\partial^N V_{neg}}{\partial \ln \eta^N} = \int d^2\beta \left(\frac{\partial}{\partial \ln \eta}\right)^N (W\theta(W)) \tag{A9}$$

Представим $W\theta(W)$ в виде функции $\eta$ в виде суперпозиции двух функций. Внешняя функция — это $f(w) = w\theta(w)$, а внутренняя — это $W = W_\eta(\beta)$. Затем к последнему выражению можно применить формулу Фаа-ди-Бруно:

$$\frac{\partial^N V_{neg}}{\partial \ln \eta^N} = \sum_{k=1}^{N} \int d^2\beta \left(\frac{\partial^k (w\theta(w))}{\partial w^k}\right)_{w=W} \times \\ \times B_{N,k}\left(\frac{\partial W}{\partial \ln \eta}, \frac{\partial^2 W}{\partial \ln \eta^2}, \dots, \frac{\partial^{N-k+1} W}{\partial \ln \eta^{N-k+1}}\right) \tag{A10}$$

Рассмотрим также производную единицы, выраженную как интеграл $W$ по всему пространству:

$$0 = \int d^2\beta \frac{\partial^N W}{\partial \ln \eta^N} \tag{A11}$$

Используя это свойство, мы видим, что член для $k = 1$ равен нулю, что означает, что мы можем рассматривать $k \geq 2$. В этом случае:

$$\frac{\partial^k (w\theta(w))}{\partial w^k} = \delta^{(k-2)}(w) \tag{A12}$$

Подставляя это в вышеприведенную формулу, мы получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^N V_{neg}}{\partial \ln \eta^N} &= \sum_{k=2}^{N} \int d^2\beta \delta^{(k-2)}(W) \times \\ &\times B_{N,k}\big(DW, D^2W, \dots, D^{N-k+1}W\big) \\ &= W_0^{1-k} \sum_{k=2}^{N} \int d^2\beta \delta^{(k-2)}(r^{2k} - 0) \times \\ &\times B_{N,k}\big(DW, D^2W, \dots, D^{N-k+1}W\big) \end{aligned} \tag{A13}$$

$$\begin{aligned} B_{N,k}\big(DW, D^2W, \dots, D^{N-k+1}W\big) &\sim \\ \sim B_{N,k}\big(-W_0 n^2 r^{2n-2}, W_0 n^2 (n-1)^2 r^{2n-4}, \dots\big) \\ \sim \left(W_0 r^{2n}\right)^k \left(-r^{-2}\right)^N B_{N,k}\left(n^2, n^2(n-1)^2, \dots\right) \\ \sim (-1)^N W_0^k r^{2nk-2N} B_{N,k}\left(n^2, n^2(n-1)^2, \dots\right) \end{aligned} \tag{A14}$$

$$\begin{aligned} \int \delta^{(k-2)}(r^{2n} - 0) r^{2(nk-N)} r dr d\phi &= \\ &= \pi \int \delta^{(k-2)}(R^n - 0) R^{nk-N} dR \\ &= \frac{\pi}{n} \int \delta^{(k-2)}(t - 0) t^{\frac{nk-N+1}{n} - 1} dt \\ &= \frac{(-1)^k \pi}{n} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{k-2}_{t\to 0} \left(t^{\frac{nk-N+1}{n} - 1}\right) \\ &= \frac{(-1)^k \pi}{n} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{k-2}_{t\to 0} \left(t^{k-2+\frac{n+1-N}{n}}\right) \end{aligned} \tag{A15}$$

Из последней формулы видно, что при $N < n+1$ результат вычисления интеграла равен нулю, что означает $\frac{\partial^N V_{neg}}{\partial \ln \eta^N} = 0$. Однако начиная с $N = n+1$ ситуация радикально меняется:

$$\int \delta^{(k-2)}(r^{2n} - 0) r^{2(nk-n-1)} r dr d\phi = \frac{(-1)^k \pi}{n} (k-2)! \tag{A16}$$

Используя это рассуждение, для $N = n+1$ мы можем записать:

$$\frac{\partial^{n+1} V_{neg}}{\partial \ln \eta^{n+1}} = (-1)^{n+1} W_0 \sum_{k=2}^{n+1} \frac{(-1)^k \pi}{n} (k-2)! \times \\ \times B_{n+1,k}\left(n^2, n^2(n-1)^2, \dots\right) \tag{A17}$$

Поскольку мы показали, что все производные порядка $N < n+1$ равны нулю, снова используя формулу Фаа-ди-Бруно, мы можем перейти от производной по $\ln \eta$ к производной по $\eta = 1/2$:

$$\frac{\partial^{n+1} V_{neg}}{\partial \eta^{n+1}} = \pi W_0 \times G_n \tag{A18}$$

$$G_n = \frac{(-2)^{n+1}}{n} \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^k (k-2)! \times \\ \times B_{n+1,k}\left(n^2, n^2(n-1)^2, \dots\right) \tag{A19}$$

$G_n$ — это целые константы. Если $W$ имеет набор нулей $\alpha_i \neq 0$ порядка $n$, рассуждения немного отличаются в выражении (A7), однако поправки, возникающие во время сдвига, оказываются порядка $r^{2l-1}$. Поэтому ими можно пренебречь, и просто просуммировать каждый из вкладов. Наконец:

$$\frac{\partial^{n+1} V_{neg}}{\partial \eta^{n+1}} = \pi G_n \sum_i W_i \tag{A20}$$

[1] *Cahill K.E., Glauber R.J.* // Phys. Rev. **177**, 1882 (1969).
[2] *Schleich W.* Quantum Optics in Phase Space (WILEY-VCH, Berlin, 2001) p. 695.
[3] *Husimi K.* // Proceedings of the Physico-Mathematical

Society of Japan. 3rd Series **22**, 264 (1940).
[4] *Wigner E.* // Phys. Rev. **40**, 749 (1932).
[5] *Glauber R.J.* // Phys. Rev. **131**, 2766 (1963).
[6] *Vogel K., Risken H.* // Phys. Rev. A **40**, 2847 (1989).
[7] *Hudson R.* // Reports on Mathematical Physics **6**, 249 (1974).
[8] *Marshall W., Simon C., Penrose R., Bouwmeester D.* // Phys. Rev. Lett. **91**, 130401 (2003).
[9] *Romero-Isart O., Juan M.L., Quidant R., Cirac J.I.* // New Journal of Physics **12**, 033015 (2010).
[10] *Khalili F., Danilishin S., Miao H., Muller-Ebhardt H.* et al. // Phys. Rev. Lett. **105**, 070403 (2010).
[11] *Lvovsky A.I., Grangier P., Ourjoumtsev A.* et al. // Production and applications of non-gaussian quantum states of light (2020), arXiv:2006.16985 [quant-ph].
[12] *Walschaers M.* // PRX Quantum 2, 030204 (2021).
[13] *Bell J.S.* Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1987) p. 212.
[14] *Mari A., Eisert J.* // Phys. Rev. Lett. **109**, 230503 (2012).
[15] *Leonhardt U., Paul H.* // Phys. Rev. Lett. **72**, 4086 (1994). 12
[16] *Kenfack A., Zyczkowski K.* // Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics **6**, 396 (2004).
[17] *Lutkenhaus N., Barnett S.M.* // Phys. Rev. A **51**, 3340 (1995).
[18] *Chabaud U., Markham D., Grosshans F.* // Phys. Rev. Lett. **124**, 063605 (2020)

## Robustness of negativity of the Wigner function to dissipation

**B. N. Nougmanov**[1,2]

[1]*Russian Quantum Center, Moscow, Skolkovo, 121205, Russia*
[2]*oscow Institute of Physics and Technology*
*Dolgoprudny, 141701, Moscow region, Russia*
*E-mail: nugmanov.bn@phystech.edu*

Non-Gaussian quantum states described by negative valued Wigner functions are important both for fundamental tests of quantum physics and for the emerging quantum information technologies. In this paper, we analyze their vulnerability to dissipation. We find the maximal amount of losses at which the negativity disappears and the rate of decrease of the negativity volume around in the vicinity of its zero. We analyze also, how the squeezing affects robustness of the quantum state to losses and show that in some cases the squeezing can improve the robustnes.

PACS: 42.50.-p, 42.25.Bs, 42.79.Fm
*Keywords*: non-gaussian states, Wigner function, quasiprobability distributions, optical losses.
*Received 14 May 2024.*

**Сведения об авторе**

Нугманов Булат Ниязович — студент 6 курса МФТИ; тел.: (962) 559-18-40, e-mail: nugmanov.bn@phystech.edu.