

Особенности распространения спекловых фрактальных структур в свободном пространстве

Р.Т. Кубанов,^{*} А.М. Зотов, П.В. Короленко,[†] А.Ю. Мишин
 Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
 физический факультет, кафедра оптики, спектроскопии и физики наносистем
 Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
 (Поступила в редакцию 10.06.2024; подписана в печать 01.07.2024)

Рассмотрено дифракционное преобразование скейлинговых и статистических характеристик спекловых фрактальных полей. Для их модельного представления использованы свойства двумерной функции Вейерштрасса со случайными фазами ее гармоник и релеевским законом распределения интенсивности. Оценка характеристик светового поля на разных расстояниях от начальной плоскости проводилась методом его разложения по плоским волнам в сочетании с методом покрытий. Она показала, что при распространении световых спекловых пучков сохраняется фрактальность в поперечном распределении амплитуды поля, однако, значения фрактальной размерности может заметным образом изменяться. При этом имеет место скейлинг в пространственном спектре излучения. Это свойство обеспечивает высокую эффективность применения фрактальных спекловых структур в арт-терапии и офтальмологии.

PACS: 42.25.-p

УДК: 535.8

Ключевые слова: спеклы, фрактальность, фрактальная размерность, скейлинг, волновой фронт, пространственный спектр.

ВВЕДЕНИЕ

Спекловые фрактальные структуры нашли использование в оптической диагностике и медико-биологических исследованиях. Несмотря на достаточно подробную проработку приложений прикладной направленности, некоторые вопросы фундаментального характера нуждаются в более подробном изучении. Ряд из них связан с изучением особенностей дифракционного распространения волн со спекловой структурой. Работы, посвященные этой проблеме (например, обширная работа [1]), обходят, как правило, вопрос о влиянии дифракционного перераспределения интенсивности светового пучка на его фрактальные свойства. Однако решение этого вопроса имеет важное значение. Дело в том, что фрактальное излучение прежде, чем попасть на светочувствительную поверхность

используемого приемника проходит некоторое расстояние. В частности, при использовании такого излучения в арт-терапии и офтальмологии такой поверхностью является сетчатка глаза. В процессе распространения светового пучка под влиянием дифракции его скейлинговые свойства могут изменяться, и эти изменения требуют учета. Цель данной работы состоит в оценке степени стабильности фрактальных и статистических характеристик излучения при его распространении.

1. ИСПОЛЬЗУЕМАЯ МОДЕЛЬ

При модельном представлении изучаемых спекловых полей применялся способ, основанный на использовании свойств двумерной функции Вейерштрасса со случайными фазами ее гармоник [2, 3]

$$W_{x,y} = \sigma \sum_{v=0}^V \sum_{n=0}^N \left[b^{(D-2)n} \cos \left[2\pi s b^n \left[\left(x - \frac{K+1}{2} \right) \sin(\alpha v) + \left(y - \frac{K+1}{2} \right) \cos(\alpha v) \right] + \psi_n + \psi_v \right] \right] + A. \quad (1)$$

Здесь $W_{x,y}$ — амплитуда поля излучения в начальной плоскости; x, y — дискретные поперечные координаты ($0 \leq x, y \leq K$); σ — стандартное отклонение амплитуды от среднего значения; N — количество гармоник; V — количество азимутальных парциальных волн; n — номер гармоники; v — индекс азимутальной составляющей волны; α — элементарный азимутальный угол поворота; b — параметр скейлинга; s — масштабирующий параметр; ψ_n, ψ_v — фазы компонент

поля; A — компонента с однородным распределением амплитуды поля. При случайных значениях фаз ψ_n, ψ_v поле приобретало спеклоподобный вид, D — фрактальная размерность графика функции Вейерштрасса при одномерном представлении.

Для снижения влияния краевых эффектов распределение (1) умножалось на дополнительную корректирующую функцию $T_{x,y}$, играющую роль «мягкой» диафрагмы

$$T_{x,y} = \xi e^{-\left[\left(x - \frac{K+1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{K+1}{2} \right)^2 \right]^4}, \quad (2)$$

где ξ — постоянная величина, параметр u харак-

* aytytyfgtgf@gmail.com

† pvkoroenko@rambler.ru

теризует степень дискретизации поперечных координат. В зависимости от задания параметров, входящих в выражения (1,2), и величин случайных фаз гармоник в начальной плоскости формировалось спекловое поле с тем или иным распределением интенсивности. В качестве иллюстрации на рис. 1, а приведена одна из реализаций смоделированного спеклового фрактального пучка.

Изменяющаяся при удалении от начальной плоскости структура излучения рассчитывалась методом разложения начального поля излучения по плоским волнам и последующим их сложением с учетом фазовых набегов. Расчет осуществлялся в несколько этапов. Сначала с помощью процедуры быстрого преобразования Фурье определялся пространственный комплексный спектр излучения $S = cfft(W)$. Затем с учетом набегов плоских волн на разных расстояниях z определялся новый комплексный спектр S

$$S_{x,y} = S_{x,y} \exp[i2\pi z_T(c(x)^2 + c(y)^2)]. \quad (3)$$

В формуле (3) расстояния z выражаются в долях так называемой длины Тальбо $T = 2a^2/\lambda$, т.е. $z_T = z/T$. Входящие в эту формулу вспомогательные функции (t) имеют вид

$$c(t) = \text{mod}[t + (K + 1)/2, K + 1] + (K + 1)/2. \quad (4)$$

Наконец, на последнем этапе процедуры посредством обратного преобразования Фурье определяется распределение интенсивности $B_{x,y}$ на расстоянии z_T : $B = icfft(S)$.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ

Происходящие изменения в структуре спекловых волн при их распространении качественно иллюстрирует рис. 1, на котором приведена структура поля в начальной плоскости (рис. 1, а) и на расстоянии от нее $z_1 = 0.0001d^2/\lambda$, где d — размер рабочего поля, λ — длина волны (рис. 1, б).

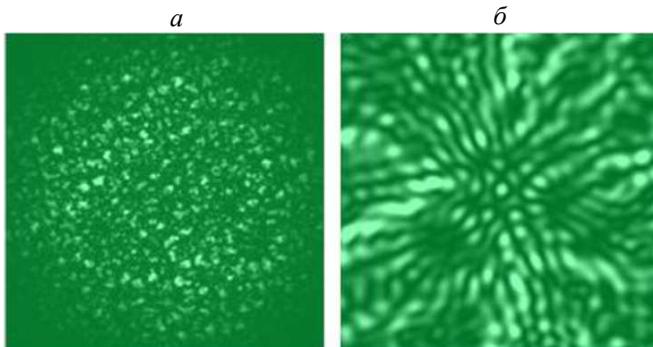


Рис. 1. Трансформация спеклового поля

Количественный анализ трансформации структуры спеклового поля показал, что такие характеристики поля как плотность вероятности и радиус корреляции значений интенсивности, их стандартное отклонение в области $0 < z < z_1$ в зависимости от реализации могут претерпевать заметные, а иногда значительные изменения. В то же время фрактальная размерность, рассчитанная методом покрытий, испытывала отклонения от среднего значения, равного 2.45, не превышающие 2%. Это говорит об устойчивости такой важной характеристики спеклового поля, как его фрактальная размерность.

В процессе расчетов использованный метод плоских волн потребовал определенной корректировки. Это связано с тем, что расходимость спеклового пучка требует увеличения размеров рабочего поля ввиду необходимости учета особенностей структуры пучка на его периферии. Указанная проблема была преодолена путем использования адаптивной схемы перманентного увеличения размеров рабочего поля.

В данной работе помимо анализа распространения спеклового поля с плоским волновым фронтом было рассмотрено распространение пучка, у которого волновой фронт имел сферическую форму. В этом случае в начальной плоскости помимо мягкой диафрагмы располагался фазовый экран, преобразующий плоский фронт в сферический. Задаваемая им форма волнового фронта определялась выражением

$$F_{x,y} = e^{i \frac{[x u - \frac{(K+1)u}{2}]^2 + [y u - \frac{(K+1)u}{2}]^2}{\lambda R} \pi}. \quad (5)$$

Здесь λ — длина волны, R — радиус кривизны волнового фронта, $i = \sqrt{-1}$. Подобную структуру волновой пучок приобретает после собирающей линзы. Согласно свойствам такой линзы пучок будет двигаться, уменьшая свои размеры, вплоть до расстояния $z = R$, где находится фокальная плоскость, а затем начнет неограниченно расходиться. При этом в фокальной плоскости линзы должен формироваться фурье-образ (пространственный спектр) распределения интенсивности пучка в начальной плоскости. Как показал расчет, регистрируемая в фокальной плоскости ($z = R$) структура пространственного спектра представляла систему убывающих по интенсивности концентрических окружностей, на которых располагались узкие пики пространственных частот (рис. 2). Показанная на рисунке система окружностей удовлетворяла принципу масштабной инвариантности с коэффициентом скейлинга $b = 2$ (именно такое значение параметра b задавалось в выражении (1) при построения спеклового структуры).

Скейлинг поля в фокальной плоскости является доказательством его фрактальности. Было установлено, что независимо от значений продольной координаты z распределению интенсивности в пучке можно поставить определенную фрактальную размерность D . Величина фрактальной размерности оценивалась двумя альтернативными методами: по поведению структурной функции поперечного распределения интенсивно-

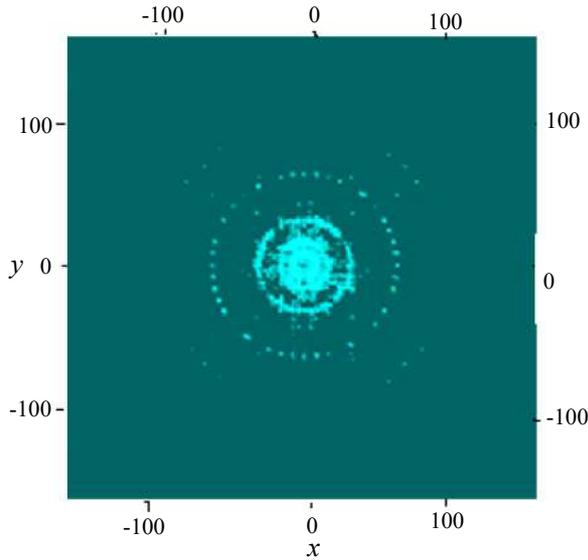


Рис. 2. Структура поля при $z = R$

сти [4] и методом покрытий [5]. Эти два способа давали близкие результаты. Приведенная на рис. 3 зависимость была рассчитана методом покрытий. Расчет проводился для следующего набора параметров:

$K = 255$, $\alpha = \frac{2\pi}{48}$, $V = 47$, $v = 0 \dots V$, $N = 5$, $n = 0 \dots N$, $\sigma = 3.3$, $s = 0.05$, $b = 2$, $R = 1.5$ м, $\lambda = 0.5 \cdot 10^{-6}$ м. Считалось, что размер рабочего поля, определяемого величиной K , в метрическом измерении равен $a = 0.02$ м. Тогда в этом же измерении расстояние между значащими точками рабочего поля составляет $u = a/K = 7.812 \times 10^{-5}$ м. На рис. 3 также изображен график изменения среднего размера p спеклов, который рассчитывался по уровню 0.5 от максимального значения автокорреляционной функции распределения интенсивности на рабочем поле. Значки на графиках получены путем усреднения величин D и p по пяти реализациям. Несмотря на происходящие изменения в структуре пучка, плотность вероятности распределения интенсивности, как показал расчет, подчинялась релеевскому закону.

Из рис. 3 видно, что в фокальной области линзы при $z = R$ размерность D , как и размеры спеклов p , минимальны. В области изображения пучка ($z = 2R$) фрактальная размерность, хотя и близка к начальному значению, но заметно из-за влияния дифракции ему уступает. Это обстоятельство следует учитывать при практическом использовании фрактального излучения в арт-терапии и офтальмологии.

С точки зрения практики важным является вопрос о степени адекватности распределения интенсивности в начальной плоскости и в плоскости изображения. Расчет коэффициента корреляции η распределений поля в этих плоскостях дал значение $\eta = 0.53$. Увеличение фрактальной размерности D изначального поля приводит к снижению η . Это хорошо видно из хода кривой на рис. 4.

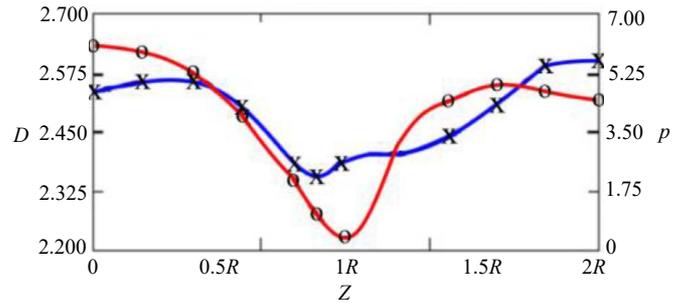


Рис. 3. Зависимость фрактальной размерности D (круглые значки) и среднего размера спеклов p (крестики) от расстояния до начальной плоскости

В наиболее значимой для практических применений области ($D < 1.5$) уменьшение величины η относительно максимального значения не превышает 30%. Тем самым можно говорить, что процессы дифракции, хотя и вносят определенные искажения в структуру изображения, с точки зрения практики не являются слишком критическими.

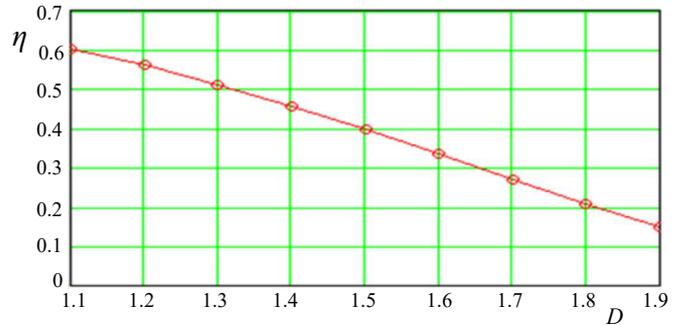


Рис. 4. Влияние фрактальной размерности D на коэффициент корреляции η

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Важным результатом выполненного анализа дифракционного распространения фрактального спеклового излучения является установление неизменности скейлинговой структуры пространственного спектра и фрактальной формы поперечного распределения интенсивности. Однако величина фрактальной размерности, фиксируемой на различных расстояниях, в общем случае может меняться в больших пределах. В то же время фрактальные размерности пучков в начальной плоскости и в плоскости изображения близки между собой. Коэффициент корреляции изначального поля и его изображения зависит от задаваемой в начальной плоскости фрактальной размерности и снижается с ее увеличением.

Полученные результаты следует принимать во внимание при совершенствовании используемых в меди-

цине методов светостимуляции. Кроме того, они могут быть применены для тестирования работы про-

странственного модулятора света, с помощью которого формируются фрактальные световые пучки различной конфигурации.

-
- [1] *Bender N., Yilmaz H., Bromberg Y., Cao H.* // *Optica*. **5**, N 5. 595. (2018).
[2] *Зотов А.М., Короленко П.В., Мишин А.Ю., Рыжикова Ю.В.* // *Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон.* N 6. 52. (2019).
[3] *Вохник О.М., Короленко П.В., Кубанов Р.Т.* // *Изв РАН. Сер. физ.* **86**, № 1. 16.(2022).
[4] *Короленко П.В., Маганова М.С., Меснянкин А.В.* Новационные методы анализа стохастических процессов и структур в оптике. М., 2004.
[5] *Митин В.Ю.* // *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика.* Вып. 2(21). 16. (2013).

Features of Speckle Fractal Structures Propagation in Free Space

R.T. Kubanov^a, A.M. Zotov, P.V. Korolenko^b, A.Yu. Mishin

¹*Department of Optics, Spectroscopy and Physics of Nanosystems, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia*

E-mail: ^aytytyfgtgf@gmail.com, ^bpvkorolenko@rambler.ru

The diffraction transformation of scaling and statistical characteristics of speckle fractal fields is considered. For their model representation, the properties of the two-dimensional Weierstrass function with random phases of its harmonics and the Rayleigh law of intensity distribution are used. The characteristics of the light field at different distances from the initial plane are estimated by the method of its expansion in plane waves in combination with the coating method. It showed that during the propagation of light speckle beams, fractality in the transverse distribution of the field amplitude is preserved, but the values of the fractal dimension can change noticeably. In this case, scaling takes place in the spatial spectrum of radiation. This property ensures high efficiency of using fractal speckle structures in art therapy and ophthalmology.

PACS: 42.25.-p.

Keywords: speckles, fractality, fractal dimension, scaling, wave front. spatial spectrum.

Received 10 June 2024.

Сведения об авторах

1. Кубанов Рустам Татарханович — аспирант; e-mail: ytytyfgtgf@gmail.com.
2. Зотов Алексей Михайлович — ст. науч. сотрудник; e-mail a.zotov@physics.msu.ru.
3. Короленко Павел Васильевич — профессор; e-mail a.zotov@physics.msu.ru.
4. Мишин Алексей Юрьевич — вед. инженер; тел.: (495) 939 5740, e-mail physic_tx@list.ru.