

## Двумерные фрактальные распределения: теория и практические приложения

Ф.А. Тулапин,<sup>\*</sup> П.В. Короленко, Р.Т. Кубанов,<sup>†</sup> О.В. Степанов, А.И. Терентьева  
*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,  
физический факультет, кафедра оптики, спектроскопии и физики наносистем  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2  
(Поступила в редакцию 10.06.2024; подписана в печать 29.06.2024)*

Выполнен краткий ретроспективный анализ свойств фрактальных световых изображений и их использования в медицине. С помощью алгоритмов, построенных на основе двумерной функции Вейерштрасса, выполнен расчет скейлинговых характеристик регулярных и стохастических спеклоподобных фрактальных структур. Показано, что скейлинг пространственных спектров фрактальных спекловых полей обеспечивает высокую эффективность их применения в арт-терапии и офтальмологии. В ходе моделирования световых полей с помощью функции Вейерштрасса было обнаружено, что их конфигурация при определенном наборе параметров дает возможность сформировать мультиплексную структуру светового излучения, которая может с успехом использоваться в оптических пинцетах.

PACS: 42.25.-p.

УДК: 535.8

Ключевые слова: фракталы, скейлинг, спеклы, пространственные спектры, арттерапия, офтальмология.

### ВВЕДЕНИЕ

Существуют литературные данные об успешном использовании фрактальных световых полей со спеклоподобной структурой для решения целого ряда медико-биологических задач. В частности, они нашли применение в арт-терапии [1–3] и офтальмологии [4–6]. В ходе арт-терапии пациенту предъявляются различного рода изображения (часто, фрактальные), обладающие определенной эстетической ценностью. Эстетическое воздействие фрактальных изображений на человека [7] можно объяснить скейлингом (масштабной инвариантностью) пространственных спектров изображений [8, 9].

При анализе механизма воздействия фрактально-го излучения на зрительный аппарат человека обобщенным оказался вопрос об особенностях восприятия мультифрактальных структур. Целью данной работы является анализ скейлинговых свойств мультифрактальных спеклоподобных распределений интенсивности световых полей. Решение этой задачи потребовало осуществить модернизацию двумерной функции Вейерштрасса, которая обычно используется для построения правильных регулярных фракталов [10, 11]. За счет модернизации функции Вейерштрасса появляется также возможность формирования мультиплексных световых пучков, обеспечивающих высокую степень локализации частиц в оптических пинцетах.

### 1. КРАТКАЯ ПРЕДЫСТОРИЯ ВОПРОСА

Физические основы арт-терапии заложил американский исследователь Р. Тейлор [12]. Он установил, что

благоприятное влияние на психику человека оказывают те оптические изображения, в которых присутствуют фрактальные признаки. Было замечено, что хорошо выраженной фрактальностью обладают пейзажи, выполненные в традиционной китайской технике (рис. 1). Благодаря МРТ-сканированию, специалисты по нейроэстетике доказали, что китайские пейзажи обладают успокаивающим действием.

Признаки фрактальности можно увидеть в картинах Винсента ван Гога и многих других художников.

Именно фрактальностью Р. Тейлор объясняет популярность картин американского художника Джексона Поллока, выполненных в технике разбрызгивания красок и напоминающих спеклоподобные структуры (рис. 2). Он выявил в картинах Поллока наличие фрактальности и определил их фрактальную размерность.

Поскольку, как было показано в ряде работ [10, 11], фрактальные изображения, включая спеклоподобные структуры, обладают самоподобными пространственными спектрами, при их созерцании отсутствует необходимость в восприятии (обработке) спектров в широком частотном диапазоне, достаточно зафиксировать лишь их низкочастотную часть.

Это ускоряет и облегчает процесс зрительного восприятия рассматриваемых объектов и, как следствие, создает ощущение комфорта, сочетающееся с чувством эстетического наслаждения. Происходящее при этом укрепление связей между нейронами в коре головного мозга способствует излечению ряда глазных болезней (например, глаукомы).

### 2. МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Поскольку мультифракталы — это фракталоподобные структуры, фрактальная размерность которых за-

<sup>\*</sup> filiptulapin@mail.ru

<sup>†</sup> tytyfytgf@gmail.com



Рис. 1. Шен Чжоу. Прощание на реке



Рис. 2. Джексон Поллок. Конвергенция

висит от координат на рабочем поле, то их можно построить путем трансформации известных фрактальных распределений, задаваемых, в частности, двумерной фрактальной функцией Вейерштрасса [10, 11]. Однако если в указанных работах фрактальная размерность  $D$  световых полей, моделируемых с помощью функции

Вейерштрасса, считалась постоянной, то в данной работе она задавалась с помощью соотношения

$$D = D_0 + d \sin(2\pi srk), \quad (1)$$

где  $D_0$  — постоянная величина,  $k, m$  — дискретные поперечные координаты,  $d$  — полуширина диапазона

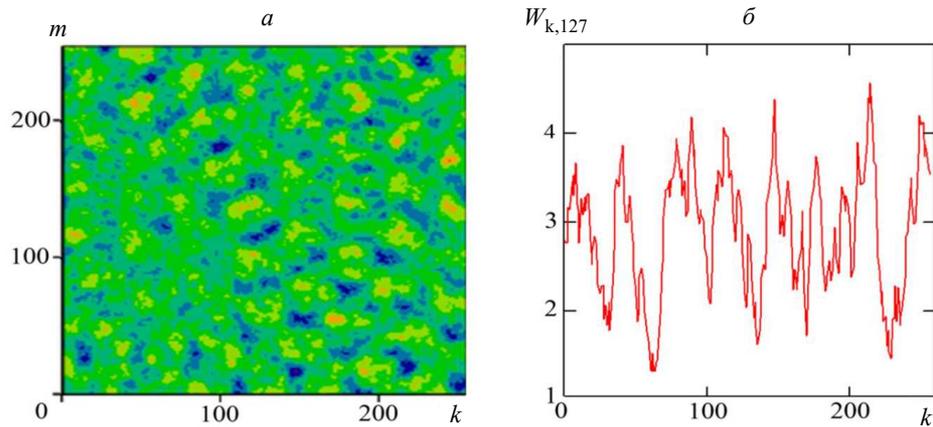


Рис. 3. Структура спеклового поля. *a* — общий вид, *б* — распределение интенсивности по поперечной координате

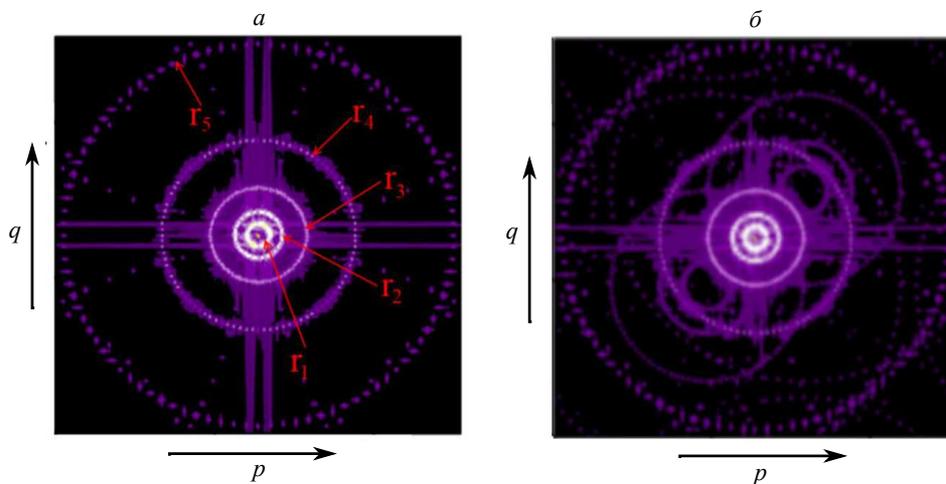


Рис. 4. Пространственный спектр монофрактального (*a*) и мультифрактального (*б*) спеклового поля

изменения фрактальной размерности,  $r$  — динамический параметр осцилляции фрактальной размерности,  $s$  — масштабирующий параметр.

На рис. 3 показано характерное для мультифрактального спеклового поля распределение интенсивности, рассчитанное указанным способом.

Результат расчета пространственного спектра такого спеклового поля, выполненный посредством быстрого преобразования Фурье, приведен на рис. 4.

В случае монофрактала ( $d = 0$ ) спектр представлял упорядоченную систему концентрических убывающих по интенсивности окружностей, на которых располагались пики пространственных частот  $p$  и  $q$ . Центр окружностей находился на оси системы, а отношение их радиусов строго соответствовало коэффициенту скейлинга  $b = 2$ . Тем самым можно говорить о пространственной инвариантности спектра, доказывающей его фрактальность и облегчающей зрительное восприятие спекловой структуры.

При  $d > 0$ , когда поле мультифрактально, на систе-

му концентрических окружностей накладываются дополнительные неупорядоченные кольцевые фрагменты, смещенные относительно оптической оси. Однако, как показал расчет, их интенсивность пренебрежимо мала по сравнению с концентрическими элементами и не может повлиять на скейлинговые свойства спектров.

### 3. ФОРМИРОВАНИЕ МУЛЬТИПЛЕКСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ ОПТИЧЕСКИХ ПИНЦЕТОВ

Свойства функции Вейерштрасса могут быть также использованы для построения мультиплексной системы пучков, обеспечивающих высокую степень локализации частиц в оптических пинцетах. Совершенствование оптических пинцетов представляет актуальную задачу в силу их широкого использования в медико-биологических исследованиях. С их помощью удалось определить механические характеристики молекул ДНК путем их растяжения, осуществить пересад-

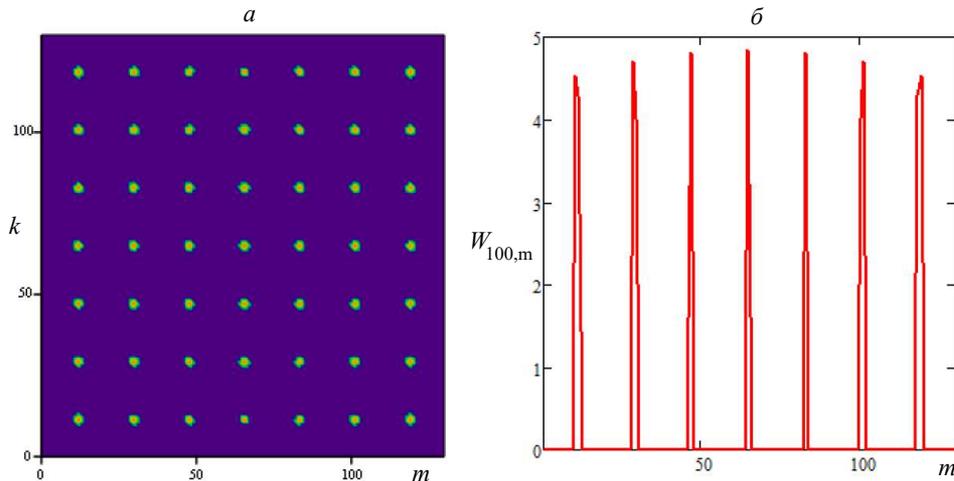


Рис. 5. Мультиплексная структура излучения: а — общий вид, б — распределение поля по поперечной координате

ку генов в клетки, а также реализовать технологию искусственного оплодотворения.

Поскольку сейчас наибольшее распространение получил градиентный метод захвата частиц, обеспечивающий локализацию частиц в области наибольших градиентов напряженности поля, в процессе проводимого исследования ставилась задача определить возможность реализации указанного метода применительно к системе управляющих пучков, формирующих мультиплексное излучение. Интенсивность излучения описывалось с помощью функции  $W_{k,m}$ , представляющей собой суперпозицию двух одномерных взаимно ортогональных функций Вейерштрасса  $W_k$  и  $W_m$ :

$$W_{k,m} = |W_k| + |W_m|, \quad (2)$$

где

$$W_k = \sigma \sum_{n=0}^N [b^{(D-2)n} \cos[2\pi \cdot s \cdot b^n \cdot (k - 64)]] , \quad (3)$$

$$W_m = \sigma \sum_{n=0}^N [b^{(D-2)n} \cos[2\pi \cdot s \cdot b^n \cdot (m - 64)]] . \quad (4)$$

На рис. 5 показано распределение  $W_{k,m}$ , рассчитанное для следующего набора параметров:  $N = 2$ ,  $\sigma = 3.3$ ,  $b = 3$ ,  $s = 0.02$ ,  $D = 1.53$ . Существенно, что при малой ширине парциальные пучки характеризуются высоким градиентом изменения амплитуды. Это обеспечивает при проекции данного распределения на плоскость, где располагаются малые частицы,

притяжение частиц к области вблизи оси парциальных пучков.

Варьируя параметры функции Вейерштрасса и уровень начальных значений поля, можно влиять на структуру излучения согласно поставленной задаче.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

К настоящему времени накоплен большой литературный материал, указывающий на эффективность светотерапии на основе фрактальных структур. Однако соответствующие медицинские технологии, разрабатываемые с целью их использования в арт-терапии и офтальмологии, находятся еще в стадии становления и нуждаются в расширении вариативного типоряда оптических стимулов. Такое расширение можно осуществить путем включения в состав используемых тестовых световых структур мультифрактальных изображений, а также изображений с геометрией полиномиальных аттракторов.

Существует возможность расширить область применения аппарата, базирующегося на свойствах функции Вейерштрасса, за счет формирования мультиплексного излучения с высоким градиентом интенсивности образующих пучков для использования в оптических пинцетах. Такое излучение с использованием построенных в данной статье алгоритмов может быть получено с помощью получивших широкое распространение пространственных модуляторов света.

[1] Пьянкова С.Д. // Психологические исследования. **12**(63). 238. (2019).  
 [2] Simion R.M. // J. of Exp. Psychotherapy. **19**, N 2(74). 14. (2016).

[3] Joschko R., Roll S., Willich S.N. // Systematic Reviews. **11**. N 96. 1. (2022).  
 [4] Каданер Г.И., Овчинников Б.В., Рубинштейн М.М. // Оптический журнал. **74** (12). 19. (2007).

- [5] *Матросова Ю.В., Фабрикантов О.Л.* // Офтальмология. **15** (2S). 52. (2018).
- [6] *Прокopenko В.Т., Матвеев Н.В., Олейник Р.В.* и др. // Светотехника. № 4. 50. (2021).
- [7] *Peitgen H.O., Richter P.H.* // The Beauty of Fractals. Springer-Verlag, New York. 1986.
- [8] *Шелепин Ю.Е.* Введение в нейроиконику: Монография. СПб.: Троицкий мост, 2017.
- [9] *Зотов А.М., Короленко П.В., Мишин А.Ю., Рыжикова Ю.В.* // ВМУ. Серия 3. Физика. Астрономия. № 6. 52. (2019).
- [10] *Зотов А.М., Короленко П.В., Павлов Н.Н.* // Изв. РАН. Сер. физ. **86**. № 1. 19. (2022).
- [11] *Вохник О.М., Короленко П.В., Кубанов Р.Т.* // Изв. РАН. Сер. физ. **86**. № 11. 1602. (2022).
- [12] *Taylor R.P., Spehar B, Wise J.A., Clifford C.W.G.R.* // The Journal of Nonlinear Dynamics, Psychology and Life Sciences. **9**, N 1. 89. (2005).

## Two-dimensional fractal distributions: theory and practical applications

F.A. Tulapin<sup>a</sup>, P.V. Korolenko, R.T. Kubanov<sup>b</sup>, O.V. Stepanov, A.I. Terentyeva

*Department of Optics, Spectroscopy and Physics of Nanosystems, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University  
Moscow 119991, Russia*

*E-mail: <sup>a</sup>filipptulapin@mail.ru, <sup>b</sup>ytytyfgtgf@gmail.com*

A brief retrospective analysis of the properties of fractal light images and their use in medicine is performed. Using algorithms based on the two-dimensional Weierstrass function, the scaling characteristics of regular and stochastic speckle-like fractal structures are calculated. It is shown that scaling of spatial spectra of fractal speckle fields ensures high efficiency of their application in art therapy and ophthalmology. During the modeling of light fields using the Weierstrass function, it was found that their configuration with a certain set of parameters makes it possible to form a multiplex structure of light radiation, which can be successfully used in optical tweezers.

PACS: 42.25.-p.

*Keywords:* fractals, scaling, speckles, spatial spectra, art therapy, ophthalmology.

*Received 10 June 2024.*

### Сведения об авторах

1. Тулапин Филипп Андреевич — студент; e-mail: tulapinfilipp@gmail.com.
2. Короленко Павел Васильевич — профессор; e-mail a.zotov@physics.msu.ru.
3. Кубанов Рустам Татарханович — аспирант; e-mail: ytytyfgtgf@gmail.com.
4. Степанов Олег Владимирович — студент; e-mail: olezhka.stepanov.2013@mail.ru.
5. Терентьева Анастасия Ильинична — студентка; e-mail: aterenteva100@gmail.com.