

## Особенности преподавания курса оптики фрактальных объектов

Ю.В. Рыжикова,<sup>1\*</sup> С.Б. Рыжиков<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,  
физический факультет, кафедра оптики, спектроскопии и физики наносистем

<sup>2</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,  
физический факультет, кафедра общей физики

Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Поступила в редакцию 22.10.2023; подписана в печать 30.10.2023)

Предметом рассмотрения являются особенности преподавания курса оптики фрактальных объектов для студентов физиков. Приводится классификация фрактальных объектов по их Фурье спектрам. Дана схема анализа фракталов в предлагаемом учебном курсе «Оптика фрактальных объектов». Обсуждаются основные проблемы курса фрактальной оптики. Проводится систематизация анализа фрактальных объектов для получения качественного и количественного соответствия между исследуемой структурой объекта и его оптическими характеристиками.

PACS: 01.40.Fk; 42.25.Fx; 02.70.-c

УДК: 372.853, 535.015

Ключевые слова: оптика, фрактал, классификация фракталов, фрактальная размерность, коэффициент скейлинга, дендриты, систематизация анализа фракталов, оптические характеристики, методика преподавания физики.

### ВВЕДЕНИЕ

Фракталами (от лат. fractus — дробленый) называют структуры с самоподобными свойствами, т.е. когда часть структуры подобна структуре в целом [1, 2]. В настоящее время активно ведется изучение фрактальных и фракталоподобных (с частичным самоподобием) объектов и процессов. Обусловлено это тем, что элементы с фрактальной структурой стали широко использоваться в различных областях науки и техники. В частности, капиллярная система глаз представляет собой фрактальную структуру, по анализу которой можно установить заболевания в офтальмологии. В тизиографии можно проводить диагностику по виду образующихся в слюне и др. биологических жидкостях фрактальных структур [3]. Фрактальные элементы применяются в медицине: инкапсулирование, арт-терапия и др. В технике фрактальные структуры используются при создании компактных фрактальных антенн, узкополосных оптических фильтров, широкодиапазонных отражателей, при расчете фотонных кристаллов и новых композитных материалов [3–5]. В фотолитографии используются фрактальные маски для создания современных микросхем и др. Из приведенного далеко не полного перечня видно, что изучение фрактальных объектов является актуальным, междисциплинарным и требует усилий специалистов самых разных направлений [6–8].

Такое широкое использование фракталов и фракталоподобных объектов в столь разных областях приводит к необходимости их изучения и систематизации. Для изучения различных свойств фрактальных объектов на физическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова читается спецкурс «Оптика фрактальных объ-

ектов», который дополняется выполнением задач в специальном компьютерном оптическом практикуме.

Целью данной работы является рассмотрение особенностей преподавания курса оптики фрактальных объектов для студентов физиков. Обсуждаются основные проблемы курса фрактальной оптики, а также проводится систематизация анализа фрактальных объектов для получения соответствия между исследуемой структурой объекта и его оптическими характеристиками.

### 1. ОСОБЕННОСТИ СПЕЦКУРСА «ОПТИКА ФРАКТАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ»

В структуре спецкурса «Оптика фрактальных объектов» можно выделить три основные части. Первая часть курса носит общетеоретический характер. В ней вводятся основные понятия и определения фрактальной оптики. Во второй части рассматриваются основы методов анализа фрактальных объектов. Даются представления о структурном анализе фрактальных элементов, их фурье спектрах, вейвлет-анализе и корреляционном анализе. В третьей части курса рассмотрены оптические свойства дифракционных решеток и многослойных апероидических систем с фрактальными свойствами. В курсе также рассматриваются основные типы современных оптических материалов и виды технологий, используемые для изготовления фрактальных элементов.

Особенностью курса фрактальной оптики является изучение дифракционных образов объектов. При этом чтение курса связано с большой системной проблемой. Одной из основных количественных характеристик фракталов является их фрактальная размерность. К сожалению, в литературе приходится сталкиваться с тем, что разные авторы используют различные методы расчета фрактальной размерности.

\* ryzhikovaju@physics.msu.ru

Наиболее часто используется клеточный (Минковского), массовый (кластерный), Хаусдорфа–Безиковича (самоподобия) подходы к расчету фрактальной размерности [9, 10].

Ситуация осложняется тем, что авторы не всегда указывают по каким алгоритмам они вычисляли фрактальную размерность. Поэтому в курсе изучения фракталов проводится классификация подходов к расчету их фрактальной размерности. Вопрос определения фрактальной размерности восходит к началу изучения фракталов. Поэтому курс фракталов целесообразно начать с истории их открытия. Термин «фрактал» введен Б. Мандельбротом в 1967 г. Принято считать, что появление фрактальной размерности связано с работами Л.Ф. Ричардсона. Он выполнял задание определения длины береговой линии Великобритании. При этом он обнаружил, что береговая линия сильно изрезана, и ее длина зависит от масштаба карты. Чем более подробно изображена береговая линия, тем больше на ней выступов, тем больше ее длина (парадокс береговой линии).

Этот же принцип используется при определении клеточной размерности. Если нанести на клетчатую поверхность обычный объект, например, сплошной черный полукруг, то он наложится на какое-то число клеток. При этом размер клеток должен быть много меньше размера полукруга. Если уменьшить сторону клетки в 2 раза, то круг наложится на число квадратиков примерно в 2 раза превышающее предыдущее. Но если фигура является не сплошной, а сильно изрезана, то число занятых клеток увеличится больше, чем в 2 раза. Уменьшая сторону клеток, мы по формуле клеточной размерности [1, 9] в пределе получим, что двумерная сплошная фигура имеет размерность 2, а сильно изрезанная принимает дробные значения в интервале от 2 до 3. Для произвольной кривой фрактальная размерность принимает дробные значения в интервале от 1 до 2. Это объясняется тем, что объект слишком подробный, чтобы быть одномерным, но недостаточно сложный, чтобы быть двумерным.

Изучение дифракционных образов объектов вносит дополнительную сложность в определение фрактальной размерности. Для многих фундаментальных и прикладных задач важна фрактальная размерность не только исходного объекта, но и его образа, получающегося в дальней зоне дифракции света на исходном объекте [9]. Дифракционные образы могут иметь такую же фрактальную размерность, отличную от исходной или вовсе не проявлять фрактальных свойств [5]. С математической точки зрения изображение, получающееся в дальней зоне дифракции света, является Фурье-образом исходной структуры [7, 11]. Большинство студентов усваивает этот факт в курсе общей физики на младших курсах, но опыт показывает, что это все же полезно напомнить непосредственно в курсе фрактальной оптики. Проблема определения размерности в этом случае заключается в том, что если исходное изображение можно рассматривать черно-белым,

то Фурье-образ будет представлять рисунок с интенсивностью, изменяющейся от 0 до максимального уровня, т.е. будет иметь «оттенки серого». Для расчета клеточной фрактальной размерности необходимо ввести «уровень отсечки» или «пороговый уровень», т.е. считать, что части рисунка, имеющие величину интенсивности меньше порогового уровня — черные, а большую величину — белые. Это приводит к некоторой неопределенности выбора порогового уровня, поскольку значение фрактальной размерности может зависеть от значения порогового уровня [9]. В результате расчет клеточной размерности будет неточным. Поэтому для фракталов и Фурье-спектров с «оттенками серого» используют альтернативные способы расчета фрактальной размерности. Например, вычисляют массовую (кластерную) фрактальную размерность [1, 10].

Студентам важно уяснить, когда нужно вычислять фрактальную размерность Хаусдорфа–Безиковича, клеточную фрактальную размерность, а когда массовую. Поэтому проблема измерения фрактальной размерности является особенностью курса фрактальной оптики для физиков, которым приходится решать физические задачи, связанные с дифракцией света на исходных объектах с признаками самоподобия.

Среди фрактальных структур особый интерес представляют дендриты [3, 9, 12, 13]. Дендриты — это образования древовидной, ветвящейся структуры. Сегодня в литературе встречаются в основном, модели баллистической агрегации и диффузии, ограниченной агрегацией [3] (рис. 1). Эти структуры отличаются разветвленностью боковых ветвей и, соответственно, фрактальной размерностью. По фрактальной размерности дендрита можно определить механизм возникновения дендрита, т.е. закон взаимодействия частиц дендрита.

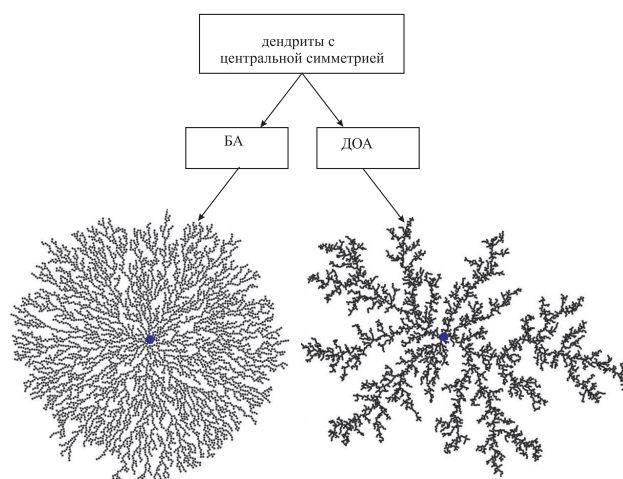


Рис. 1. Дендриты. Модель «баллистическая агрегация» (БА) —  $D = 1.86$  и модель «диффузия, ограниченная агрегацией» (ДОА) —  $D = 1.69$ .  $D$  — кластерная (массовая) фрактальная размерность

Следующая особенность курса связана с изучением вейвлет-преобразований. Фрактальная размерность является важной, но не единственной характеристикой анализа фрактальных и фракталоподобных структур. Многие особенности фракталов можно выявить с помощью Фурье и вейвлет-преобразований [9]. Вейвлет-преобразования не изучаются в курсе общей физики, поэтому им приходится уделять значительное место в курсе фрактальной оптики. Наиболее интересными базисами разложения являются вейвлеты типа «мексиканская шляпа» (вейвлет Гаусса 2-го порядка) и др. [14].

В одномерном случае вейвлет-преобразования можно рассчитывать, используя встроенные функции стандартных пакетов Matlab и др. Для двумерных объектов нужно писать программы самостоятельно, что может стать зачетными задачами для студентов.

Еще одна особенность изучения фракталов в курсе оптики — это нахождение соотношений коэффициентов скейлинга (масштабные инварианты) у исходных объектов (рис. 2) и их Фурье-образов. При определении коэффициентов скейлинга присутствует «договорной» элемент, например для рис. 2 можно считать этот коэффициент как отношение большей стороны треугольника к меньшей, и наоборот. Тогда масштабный коэффициент подобия может принимать значения  $\zeta = 2$  или  $\zeta = 0.5$ .



Рис. 2. Формирование фрактала «салфетка Серпинского».  $D \approx 1.58$ ,  $D$  — фрактальная размерность Хаусдорфа–Безиковича

На рис. 3 приведена схема систематизации фракталов по соответствию анализируемой структуры и ее Фурье спектров. Условно фракталы можно разбить на четыре основные группы [5].

К первой группе относятся фракталы, в структуре и фурье-спектре которых в явном виде присутствуют самоподобные элементы с определенным соотношением их размеров. Это соотношение определяет коэффициент скейлинга  $\zeta$ , который является инвариантом рассматриваемых систем. Фракталы первой группы характеризуются наличием одного постоянного коэффициента скейлинга как в структуре, так и в фурье-спектрах. Примерами фракталов первой группы является — структуры Кантора, ковер и салфетка Серпинского и др. [5]. Ко второй группе относятся объекты с внутренней симметрией самоподобия (объекты Фибоначчи, Морса–Туэ, двойного периода и др. [7, 15]). Фракталоподобные структуры этой группы характеризуются наличием фрактальности фурье-спектров с одним значением коэффициента скейлинга. Фракталы третьей группы отличаются от



Рис. 3. Схема систематизации фракталов по Фурье спектрам

первых двух тем, что им присуще различие коэффициентов скейлинга в геометрии фрактала и его фурье-образе. Часто фракталы этой группы характеризуются множественностью коэффициентов скейлинга. К этой группе относятся, так называемые, звездные фракталы и др. [4]. К четвертой группе относятся фрактальные объекты, которые не обладают фрактальностью фурье-спектров. К ней относятся дендритные структуры и фракталы, построенные на основе свойств множества Мандельброта [3, 5, 12, 13].

Особенности отдельных видов фракталов можно учесть на основе анализа их спектральных свойств. Для нахождения соответствия между структурой и спектральными характеристиками различных фракталов используется структурный и скейлинговый анализ, Фурье анализ и вейвлет анализ. Для стохастических фракталов этот стандартный набор инструментов анализа дополняется корреляционным анализом [16]. Схема анализа детерминированных и стохастических фракталов представлена на рис. 4.

Компьютеризированная система поддержки обучения спецкурса «Оптика фрактальных объектов» включает:

1. мультимедийные демонстрации для сопровождения изложения лекционного материала;
2. комплекс обеспечения индивидуальной работы студентов на лабораторных занятиях оптического компьютерного практикума кафедры;
3. систему контроля знаний, на основе разработанных тестов оценивания уровня обученности студентов, обработку и хранение результатов тестов.

В результате освоения дисциплины студент должен:

1. знать проблематику и инструментарий физических исследований в области фрактальной

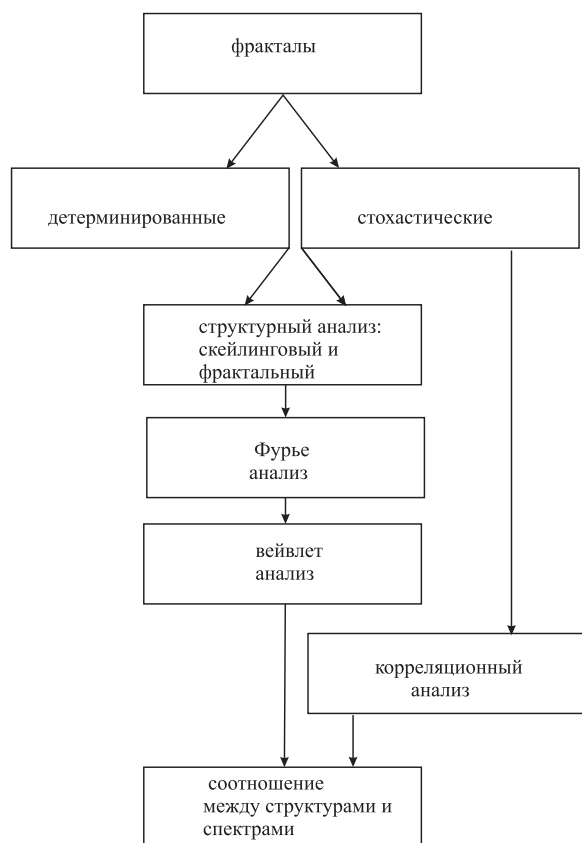


Рис. 4. Схема анализа фракталов

оптики;

2. уметь применять теорию и методы фрактального анализа для обработки сигналов и структур с самоподобными признаками;
3. владеть математическим аппаратом фрактального анализа.

В результате освоения дисциплины у студентов формируются следующие профессиональные компетенции:

1. способность применять навыки анализа, синтеза и моделирования систем фрактальной оптики;
2. способность осуществлять расчет фрактальных объектов;
3. способность применять навыки анализа параметров оптических систем для формирования наноструктурированных фрактальных элементов;
4. готовность использовать программный продукт для расчета оптических параметров фрактальных систем.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обучение физиков курсу «Оптика фрактальных объектов» открывает для студентов широкие возможности решения различных задач междисциплинарных исследований. В частности, относящихся к анализу формирования дендритоподобных систем с целью моделирования развития биологических структур на ранних этапах их структурной самоорганизации. На основе применения скейлингового и фрактального анализа можно сформулировать и решить множество прямых и обратных задач фрактальной оптики. Кроме этого фрактальные методы используются в социогуманитарных дисциплинах. Например, фрактальные подходы можно использовать для описания влияния фрактальных изображений на когнитивные процессы, связанные с эстетическими аспектами восприятия самоподобных объектов.

Указанный объем материала успешно изучается на кафедре оптики, спектроскопии и физики наносистем физического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова в течение 17 недель (34 часа), еще 38 часов отводится на самостоятельную работу студентов и выполнение зачетного задания.

[1] *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с. ISBN: 5-93972-108-7.

[2] *Белоновская И.Д., Баранов В.В.* // Высшее образование в России. №3. 83. (2013).

[3] *Ружицкая Д.Д., Рыжиков С.Б., Рыжикова Ю.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. №5. 3 (2021).

[4] *Гридчина В.В., Короленко П.В., Рыжикова Ю.В.* // Изв. РАН. Сер. физ. **79**, № 12. 1691. (2015).

[5] *Рыжикова Ю.В., Рыжиков С.Б.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. **78**, № 4. 2340406 (2023).

[6] *Лесовик В.С.* // Высшее образование в России. № 3. 77. (2014).

[7] *Короленко П.В., Конопальцева Н.Ю., Мишин А.Ю., Рыжикова Ю.В.* // Физическое образование в Вузах. **25**, № 3. 123. (2019).

[8] *Зотов А.М., Ковальчук М.В., Короленко П.В., Рыжи-*

*кова Ю.В.* Использование фрактальных методов в научных исследованиях и учебном процессе / Сборник научных трудов XV Международной конференции ФССО. 2019. Санкт-Петербург: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, Т. 1. С. 68-72.

[9] *Рыжикова Ю.В., Рыжиков С.Б.* // Ученые записки физического ф-та Московского ун-та. № 5. 1850401 (2018).

[10] *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с. ISBN: 5-03-001712-7.

[11] *Goodman J.W.* Introduction to Fourier Optics. New York, St. Louis, San Francisco, Auckland, Bogota, Caracas, Lisbon, London, Madrid, Mexico City, Milan, Montreal, New Delhi, San Juan, Singapore, Sydney, Tokyo, Toronto: The McGraw-Hill Companies, Inc, 1996. 441 p. ISBN: 0-07-024254-2.

[12] *Косырев А.В., Короленко П.В., Рыжикова Ю.В.* // Изв. РАН. Сер. физ. **85**, № 1. 74. (2021).

- [13] Witten T.A., Sander L.M. // *Phys. Rev. B.* **27**, N 19. (2003) 5686 (1983).  
[14] Астафьева Н.М. // *УФН.* **166**, № 11. 1145. (1996).  
[15] Albuquerque E.L., Cottam M.G. // *Phys. Rep.* **376**. 225  
[16] Goodman J.W. *Statistical Optics*. New York: John Wiley & Sons, Inc, 2015. 544 p. ISBN: 1119009456, 9781119009450.

## Features of teaching a course on fractal objects optics

Yu. V. Ryzhikova<sup>1,a</sup>, S.B. Ryzhikov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Department of optics, spectroscopy and nanosystems physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia*

<sup>2</sup>*Department of general physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia*  
E-mail: <sup>a</sup>ryzhikovaju@physics.msu.ru

The subject of consideration is the features of teaching a course on optics of fractal objects for physics students. The classification of fractal objects according to their Fourier spectra is given. The scheme for analyzing fractals in the proposed educational course «Optics of Fractal Objects» is given. The main problems of the fractal optics course are discussed. The analysis of fractal objects is being systematized to obtain a qualitative and quantitative correspondence between the structure of the object being studied and its optical characteristics.

PACS: 01.40.Fk; 42.25.Fx; 02.70.-c

*Keywords:* optics, fractal, fractals classification, fractal dimension, scaling coefficient, dendrites, fractal analysis systematization, optical characteristics, teaching method.

*Received 22 October 2023.*

### Сведения об авторах

1. Рыжикова Юлия Владимировна — канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-57-40, e-mail: ryzhikovaju@physics.msu.ru.
2. Рыжиков Сергей Борисович — доктор пед. наук, доцент, доцент; тел.: (495) 939-57-40, e-mail: sbr@physics.msu.ru.