

Работы А. Г. Свешникова в области численных методов расчета нерегулярных волноводов (обзор)

А. А. Быков*

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Поступила в редакцию 06.06.2023; подписана в печать 20.07.2023)

В серии работ профессора А. Г. Свешникова 1963 г. сформулирована и обоснована математическая модель распространения электромагнитных волн внутри металлического волновода с границей сложной формы, основанная на применении варианта метода Галеркина, который впоследствии был назван неполным методом Галеркина. Решение представляется в виде линейной комбинации координатных функций поперечного сечения, семейство которых находится из задачи на собственные значения поперечного сечения волновода. Коэффициенты линейной комбинации зависят от продольной координаты и находятся из условия ортогональности невязки системе проекционных функций, которые при использовании метода Галеркина совпадают с системой координатных функций (также поперечного сечения). В результате применения проекционных соотношений ортогональности и граничных условий излучения в бесконечных областях получается краевая задача для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений на отрезке. Мы покажем, что созданный 60 лет назад на кафедре математики физического факультета МГУ метод актуален и в настоящее время. Возросшие возможности математических инструментов и средств программирования позволяют существенно расширить класс задач, которые эффективно решаются с помощью неполного метода Галеркина. Мы приводим результаты решения одной задачи оптимизации волноводного трансформатора в нагруженном волноводе с помощью неполного метода Галеркина.

PACS: 84.40.Az

УДК: 519.63

Ключевые слова: волновод, рассеяние, трансформатор, оптимизация, метод Галеркина, работы А. Г. Свешникова.

ВВЕДЕНИЕ

В математической физике, вычислительной математике, вычислительной физике ключевую роль играет проблема решения (аналитического или численного) краевой задачи для уравнения в частных производных эллиптического типа в ограниченных или бесконечных областях.

Для решения задачи рассеяния на практике используются аналитические, асимптотические, численные методы. Здесь мы только перечислим основные методы, так как наша задача состоит в применении неполного метода Галеркина. Имеются подробные обзоры литературы по методам решения задач дифракции, например, [1]. К аналитическим относятся метод разделения переменных, методы теории функций комплексной переменной (для двумерных полей) [2]. Асимптотические методы используют как коротковолновые асимптотики (в том числе геометрикооптическое приближение) [3], метод Маслова [4], так и длинноволновые асимптотики (обычно называемые именем Релея, [5]). К числу физически обоснованных методов относится, в том числе метод краевых волн Уфимцева [6]. В области резонансных длин волн (сравнимых с размером объекта) применяются численные методы: интегральных уравнений [7–9], конечных разностей [10–12], конечных элементов [13], обобщенный

метод разделения переменных [14], метод Галеркина [15, 16]. Численную реализацию допускают вариационные методы [17, 18]. Вариационные методы основаны на формулировке задачи рассеяния как равносильной задачи экстремума функционала, для которого уравнения Максвелла выполняют роль уравнений Эйлера, представляющие необходимые условия экстремума [19]. Практически важные результаты прикладного характера получены методом дискретных источников. В формулирование, обоснование, применение этого метода для решения широкого класса практически важных задач значительный вклад внес профессор А. Г. Свешников с группой учеников [20].

Среди численных методов решения задач дифракции особое положение занимает **неполный метод Галеркина**, который можно назвать также методом введения к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Встречаются также названия «метод частичной дискретизации», «метод прямых». Заметим сразу, что этот метод позволяет не только получать численное решение, но и строить асимптотические приближения, обосновывать существование и единственность решения. Концепция неполного метода Галеркина сформулирована в работах [21, 22]. В этих работах неполный метод Галеркина был использован как для обоснования разрешимости некоторых нелинейных краевых задач, так и для построения разложения в ряд по малому параметру. Некоторые эпизоды истории создания и развития неполного метода Галеркина в 30–40 годах изложены в работе [23]. Широкое применение метода в практике численного моделирования в электроди-

* abykovmsu@mail.com

намике началось после серии публикаций А. Г. Свешникова [24, 25]. В этих работах неполный метод Галеркина использовался для расчета рассеяния акустических и электромагнитных волн на неоднородности в цилиндрическом волноводе с металлическими стенками. Один из важнейших результатов этой серии работ состоял в открытии того факта, что неполный метод Галеркина в применении к задачам в бесконечных областях, в отличие от метода Галеркина («полного»), позволяет точно поставить дополнительные условия, состоящие в отсутствии или заданном значении амплитуды волны, приходящей из бесконечно удаленной области. Эти условия называют «условия излучения». Причина в том, что для применения метода Галеркина требуется создать систему координатных функций, удовлетворяющих граничным условиям. Применение импедансных условий возможно, но тогда импеданс для всех координатных функций должен быть одинаков. Для задач с неограниченными областями построить счётную систему координатных функций не удастся. Неполный метод Галеркина позволяет поставить дополнительные условия так, что импеданс для каждой координатной функции задается индивидуально, что и обеспечивает одновременно точное выполнение условий на бесконечности и счётное множество координатных функций. По этой причине условия излучения неполного метода Галеркина называют **парциальные условия излучения**.

Развитие неполного метода Галеркина шло по пути расширения класса решаемых задач. Численный метод решения задачи рассеяния на ограниченном неоднородном прозрачном теле в свободном пространстве рассмотрено в работах [26, 27] для скалярного волнового уравнения и для уравнений Максвелла. В цилиндрических координатах метод сформулирован и обоснован в [28], задача рассеяния на поперечно-неоднородном цилиндре решена в работе [29]. Выполнен большой цикл работ по задаче рассеяния на периодических решетках [30]. В работе [31] метод приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям сформулирован в общем виде без привязки к определенной системе координат и к определенному типу граничных условий. В этой работе метод и получил название «Неполный метод Галеркина». В настоящее время метод используется для решения широкого класса задач дифракции на неоднородностях в волноводах и на периодических решетках [32], для расчета собственных волн гофрированных волноводов [33, 34]. Применение неполного метода Галеркина можно найти в зарубежных публикациях, например, [35–37]. Там неполный метод Галеркина именуется обычно «метод моментов» без ссылок на приоритетные работы [26, 27]. Мы ограничиваемся в этом кратком обзоре публикациями XX века. В наше время неполный метод Галеркина широко применяется научной группой под руководством профессора А. Н. Боголюбова.

Сформулируем основные отличительные черты, обуславливающие выбор метода приведения к обыкновен-

ным дифференциальным уравнениям (или, по-другому, «неполного метода Галеркина», [31]) для решения задач дифракции в резонансном диапазоне.

1. Метод позволяет создать универсальный алгоритм численного решения задач дифракции как на телах с плавной функцией диэлектрической проницаемости $\varepsilon(x, y, z)$, так и на объектах с резкими границами, в том числе на телах с многослойными покрытиями. Для задач с разрывной функцией $\varepsilon(x, y, z)$ метод дает обобщенное решение задачи, которое слабо сходится к решению задачи Максвелла с правильно поставленными условиями сопряжения полей на границах.
2. Метод позволяет понизить размерность задачи на единицу или на две единицы. В частности, при решении двумерных задач (такой пример рассматриваются в нашей работе), метод использует семейство «координатных функций» (в терминологии [41]), которые находятся из задачи Штурма–Лиувилля на отрезке (вообще говоря, в поперечном сечении волновода). При решении трехмерных задач следует использовать координатные функции от двух «поперечных» координат и получить в итоге краевую задачу для системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений на отрезке.
3. Решение задачи для уравнений Максвелла находится в виде предела функциональной последовательности, индекс которой есть число использованных координатных функций. При заданном числе координатных функций N метод порождает линейное пространство размерности $2N$ функций, определенных в заполненной неоднородным диэлектриком области, в которой требуется вычислить поля, и удовлетворяющих в этой области уравнениям Максвелла (в смысле выполнения системы соотношений ортогональности для невязки). Решение представляется в виде линейной комбинации базисных функций этого пространства, коэффициенты находятся из парциальных условий излучения, которые обеспечивают заданный способ возбуждения волновода. Парциальные условия излучения задаются на границе области (которая в двумерном случае представляет линию), что и означает понижение порядка.
4. Неполный метод Галеркина позволяет точно поставить и решить задачу рассеяния в неограниченной области с условиями излучения. Метод позволяет построить функциональную последовательность, которая сходится к точному решению в среднем по ограниченной неоднородной области, причем каждый член этой последовательности точно удовлетворяет условиям излучения на линии или поверхности сопряжения ограниченной области с неоднородным диэлектриком

и неограниченной области с однородным диэлектриком (удовлетворяющей условию регулярности, которые далее будут сформулированы). Заметим, что классический вариант метода Галеркина для задачи в бесконечной области не применим именно из-за невозможности точного удовлетворения условий излучения.

5. Неполный метод Галеркина позволяет создать корректную модель расчета собственных волн диэлектрических волноводов (оптических световодов), и для расчета периодических (например, гофрированных) планарных волноводов (в частности, решеточных элементов связи). В ограниченной области, занятой неоднородным телом, уравнения Максвелла выполняются в среднем, а условия излучения — точно.
6. Неполный метод Галеркина позволяет привести исходную задачу для уравнений Максвелла с условиями излучения к краевой задаче для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которая обладает свойством так называемой «жесткости». Краевую задачу или задачу Коши называют жесткой, если среди собственных значений матрицы вариации краевой задачи (для линейной задачи матрица вариации совпадает с матрицей линейной системы) встречаются собственные значения с большой по величине положительной отрицательной вещественной частью, причем имеется точно определение того, что называется большой величиной [38]. Численное решение жестких краевых задач приводит к значительному росту погрешностей округления ЭВМ. В применении к задачам электродинамики это приводит к ограничениям на размер неоднородного тела (диаметр которого в результате не может быть значительно больше длины волны). Разработан специальный численный метод решения жестких краевых задач, который снимает ограничения на размеры неоднородного тела [38, 39]. Практически, имеется возможность рассчитывать дифракцию на телах, диаметр которых в несколько десятков раз больше длины волны.

В последующих главах мы изложим методы решения задач рассеяния волн в нерегулярных волноводах, разработанные и обоснованные А. Г. Свешниковым. Мы приведем пример решения задачи рассеяния и оптимизации волноводного трансформатора с помощью неполного метода Галеркина.

1. НЕПОЛНЫЙ МЕТОД ГАЛЕРКИНА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

1.1. Постановка условий излучения

В настоящей работе мы рассматриваем одну из ключевых задач вычислительной электродинамики, кото-

рая может быть описана как расчет волноводного трансформатора. Волноводный трансформатор есть область сложной формы с неоднородным диэлектриком, которая сопрягается с несколькими полубесконечными регулярными волноводами, и ограничена несколькими поверхностями. Поле в каждом из продольно однородных (регулярных) волноводов можно представить в виде суперпозиции парциальных полей, некоторые из которых можно рассматривать как облучающие, а остальные как рассеянные. Задан вектор входного сигнала (представленного в виде частичной суммы некоторого функционального ряда), вектор внешних полей. Требуется найти вектор выходного сигнала. Электромагнитное поле удовлетворяет линейным уравнениям Максвелла, поэтому связь между входным и выходным векторами является линейной. Требуется найти матрицу рассеяния, с помощью которой можно выразить рассеянные поля через облучающие.

Называем регулярный волновод нагруженным, если внутри него имеется продольно-однородная, поперечно-неоднородная диэлектрическая вставка. Такие волноводы применяются как в микроволновой технике с длинами волн от миллиметровых до сантиметровых, также и в оптической технике с длинами волн от сотен нанометров до нескольких микрометров. Задача расчета сочленения нагруженных волноводов с помощью отрезка неоднородного нагруженного волновода с границей сложной формы является темой нашей работы. В основе применяемых для этой цели методов лежит ключевая задача рассеяния на ограниченной неоднородной области, соединяющей два регулярных волновода. В работе [24] разработан метод решения краевой задачи для уравнения

$$\Delta u + \kappa^2 u = 0, \quad u|_{\Sigma} = 0, \quad (1)$$

$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ в области D , ограниченной уходящей на бесконечность поверхностью Σ с условиями излучения. Мы опишем этот метод детально, а потом приведем результаты решения одной важной на практике конкретной задачи. Пусть D_1 есть подводящий полубесконечный отрезок продольно однородного (регулярного) волновода с поперечным сечением S_1 , D_3 есть принимающий полубесконечный отрезок регулярного волновода с поперечным сечением S_3 , оба волновода продольно однородные, D_2 есть область, соединяющая D_1 и D_3 . Пусть $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$. Предполагаем, что границы всех трех областей в точках сопряжения имеют коллинеарные нормали, вместе все три границы образуют гладкую поверхность. Продольную координату в области в D_1 обозначим z_1 , причем $z_1 \in (-\infty, a]$, в D_3 аналогично z_3 , причем $z_3 \in [b, +\infty)$. Названия подводящий и принимающий волновод условны, каждый фактически исполняет обе функции, но мы поставим условия излучения в соответствии с названиями.

Условия излучения сформулированы в [24]. Эти условия равносильны возможности представления поля в подводящем и принимающем полубесконечных

отрезках волноводов с поперечным сечением соответственно S_1 и S_2 в виде суперпозиции облучающих и рассеянных полей. В рамках постановки задачи задаются амплитуды волн, приходящих из продольно-

однородных участков подводящего и отводящего волноводов, рассчитываются амплитуды уходящих на бесконечность волн:

$$u(M_1, z_1) = \sum_{n=1}^{n_1} A_n^{(1)} e^{i\gamma_n^{(1)}(z_1 - z_a)} \varphi_n^{(1)}(M_1) + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n^{(1)} e^{-i\gamma_n^{(1)}(z_1 - z_a)} \varphi_n^{(1)}(M_1) \text{ при } z_1 \leq a, \quad (2)$$

$$u(M_3, z_3) = \sum_{n=1}^{n_3} B_n^{(3)} e^{-i\gamma_n^{(3)}(z_3 - z_b)} \varphi_n^{(3)}(M_3) + \sum_{n=1}^{+\infty} T_n^{(3)} e^{i\gamma_n^{(3)}(z_3 - z_b)} \varphi_n^{(3)}(M_3) \text{ при } z_3 \geq b, \quad (3)$$

где $M_i = (x_i, y_i)$, $i \in \{1; 3\}$, $\{A_n^{(1)}\}$ есть комплексные амплитуды волн, облучающих неоднородный участок D_2 слева (со стороны D_1), $\{B_n^{(3)}\}$ то же справа (со стороны D_3),

C_i есть граница S_i , $i \in \{1; 3\}$. В суммах (2) и (3) обязательно $A_n^{(1)} = 0$ при $\text{Im } \gamma_n^{(1)} > 0$, так что среди облучающих волн присутствуют только амплитуды распространяющихся волн. Соответственно, в (4) знак левой части таков:

$$(\gamma_n^{(i)})^2 = \kappa^2 - (\lambda_n^{(i)})^2 \quad (4) \qquad (\gamma_1^{(i)})^2 > 0, \dots, (\gamma_{n_i}^{(i)})^2 > 0, \quad (6)$$

$$(\gamma_{n_i+1}^{(i)})^2 < 0, \dots, (\gamma_{n_i+k}^{(i)})^2 < 0$$

для $i \in \{1; 3\}$, причем $\text{Re } \gamma_n^i \geq 0$, а если $\text{Re } \gamma_n^i = 0$, то $\text{Im } \gamma_n^i \geq 0$. Величины $\lambda_n^{(i)}$ есть собственные значения краевой задачи Штурма–Лиувилля

для всех $k \geq 1$. Для выделения единственного решения уравнения (1) используем граничные условия в интегральной форме парциальных условий излучения. Продифференцируем (2), по z_1 , (3) по z_3 , умножим на собственную функцию $\varphi_n^{(1)}$ или соответственно $\varphi_n^{(3)}$ и проинтегрируем по поперечному сечению:

$$\Delta \varphi_n^{(i)} + \lambda_n^{(i)} \varphi_n^{(i)} = 0, \quad (x_i, y_i) \in S_i, \quad \varphi_n^{(i)} \Big|_{C_i} = 0, \quad (5)$$

$$\iint_{S_1} \left(\frac{\partial u}{\partial z_1} + i\gamma_n^{(1)} u \right) \varphi_n^{(1)}(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \Big|_{z_1=z_a} = 2i\gamma_n^{(1)} A_n^{(1)}, \quad (7)$$

$$\iint_{S_3} \left(\frac{\partial u}{\partial z_3} - i\gamma_n^{(3)} u \right) \varphi_n^{(3)}(x_3, y_3) dx_3 dy_3 \Big|_{z_3=z_b} = -2i\gamma_n^{(3)} B_n^{(3)}, \quad (8)$$

$n \in \{1, \dots\}$, причем $A_n^{(1)} = 0$ при $n > n_1$, $B_n^{(3)} = 0$ при $n > n_3$. Комплексные амплитуды рассеянных волн можно также найти из (2), (3):

$$\iint_{S_1} \left(-\frac{\partial u}{\partial z_1} + i\gamma_n^{(1)} u \right) \varphi_n^{(1)}(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \Big|_{z_1=z_a} = 2i\gamma_n^{(1)} R_n^{(1)}, \quad (9)$$

$$\iint_{S_3} \left(\frac{\partial u}{\partial z_3} + i\gamma_n^{(3)} u \right) \varphi_n^{(3)}(x_3, y_3) dx_3 dy_3 \Big|_{z_3=z_b} = 2i\gamma_n^{(3)} T_n^{(3)}. \quad (10)$$

Условия излучения ставятся, таким образом, для областей D_1 и D_3 . Задача (1), (7), (8) имеет единственное решение при условии наличия в D_2 сколь угодно малой области, в которой $\text{Im} \kappa > 0$.

1.2. Преобразование координат для трехмерной скалярной задачи

Теперь сформулируем метод решения этой задачи в том виде, в котором таковой был сформулирован

и обоснован в работе [24]. В областях $D_{1,2,3}$ введем криволинейную систему координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3) так, чтобы ось ξ_3 была направлена вдоль оси подводящего и отводящего волноводов. Новые координаты выберем так, чтобы якобиан преобразования $(x, y, z) \leftrightarrow (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ был всюду отличен от нуля (всегда можно даже обеспечить якобиан больше нуля). При этом область D_2 переходит в отрезок прямого цилиндра с поперечным сечением S_2 , внутри которого $\xi_3 \in [z_a, z_b]$. Сечение сопряжения областей D_1 и D_2 переходит в плоскую фигуру $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in S_2 \times \{z_a\}$, сечение

сопряжения D_2 и D_3 переходит в плоскую фигуру $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in S_2 \times \{z_b\}$. Области $D_{1;3}$ переходят в полубесконечные цилиндры:

$$\begin{aligned} D_1 &\leftrightarrow \{(\xi_1, \xi_2) \in S_2, \xi_3 \in (-\infty, z_a]\} = S_2 \times (-\infty, z_a], \\ D_3 &\leftrightarrow \{(\xi_1, \xi_2) \in S_2, \xi_3 \in [z_b, +\infty)\} = S_2 \times [z_b, +\infty). \end{aligned} \tag{11}$$

Функции замены (11) предполагаем дважды дифференцируемыми (для этого, возможно, придется расширить область D_2 , перенести часть областей $D_{1;3}$ в область D_3). При этом указанный якобиан не только отличен от нуля, но и сохраняет знак всюду внутри $D_{1;2;3}$. Далее продольную координату ξ_3 будем обозначать также ζ , а поперечные координаты $\xi_1 = \xi$ и $\xi_2 = \eta$.

В новых координатах (1) переходит в равносильное уравнение

$$L[v] + \kappa^2 \sqrt{g} v = 0, \tag{12}$$

где

$$L[v] = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(g^{i,j} \sqrt{g} \frac{\partial v}{\partial \xi_j} \right). \tag{13}$$

Выражения коэффициентов можно найти в [47]. Без ограничения общности можно считать, что $\xi_3 = z_1$ в области D_1 , $\xi_3 = z_3$ в области D_3 , замена координат задана так, что

$$\frac{\partial g^{i,j}}{\partial \xi_3} = 0 \tag{14}$$

при $\xi_3 < z_a$ и при $\xi_3 > z_b$. Следовательно, преобразование координат в подводящем D_1 и принимающем D_3

$$\iint_{S_2} \tilde{\varphi}_m^{(1)}(\xi_1, \xi_2) \left(\frac{\partial u}{\partial \xi_3} + i\gamma_m^{(1)} u \right) J^{(a)}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \Big|_{\xi_3=z_a} = 2iA_m^{(1)} \gamma_m^{(1)}, \tag{18}$$

$$\iint_{S_2} \tilde{\varphi}_m^{(3)}(\xi_1, \xi_2) \left(\frac{\partial u}{\partial \xi_3} - i\gamma_m^{(3)} u \right) J^{(b)}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \Big|_{\xi_3=z_b} = -2iB_m^{(3)} \gamma_m^{(3)} \tag{19}$$

для всех $m \in \{1, 2, \dots\}$, причем $A_m^{(1)} = 0$ при $m > n_1$, $B_m^{(3)} = 0$ при $m > n_3$. Здесь и далее

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_m^{(1)}(\xi_1, \xi_2) &= \varphi_m^{(1)}(x_1(\xi_1, \xi_2), y_1(\xi_1, \xi_2)), \quad \tilde{\varphi}_m^{(3)}(\xi_1, \xi_2) = \varphi_m^{(3)}(x_3(\xi_1, \xi_2), y_3(\xi_1, \xi_2)), \\ J^{(a)}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{D(x_1, y_1)}{D(\xi_1, \xi_2)} \Big|_{\xi_3 \leq z_a}, \quad J^{(b)}(\xi_1, \xi_2) = \frac{D(x_3, y_3)}{D(\xi_1, \xi_2)} \Big|_{\xi_3 \geq z_b}. \end{aligned} \tag{20}$$

Такова математическая модель, обоснованная строго (существование, единственность) в работе [24]. Аппроксимация решения $u(x, y, z)$, обеспечиваемая с помощью неполного метода Галеркина, состоит в построении функциональной последовательности v^N , каждый элемент которой есть конечная сумма:

$$v^{(N)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{n=1}^N V_n^{(N)}(\xi_3) \psi_n(\xi_1, \xi_2). \tag{21}$$

Так как $\{\varphi_n^{(1)}(x_1, y_1)\}$ на S_1 , $\{\varphi_n^{(3)}(x_3, y_3)\}$ на S_3 ,

волноводах проводится только в поперечном сечении, не затрагивая продольную координату ξ_3 .

1.3. Методика частичной дискретизации

Пусть $\{\psi_n, \mu_n\}$ есть собственные функции и значения задачи Штурма–Лиувилля

$$\Delta_{\xi_1, \xi_2} \psi_n + \mu_n^2 \psi_n = 0, \quad (\xi_1, \xi_2) \in S_2, \quad \psi_n|_{\partial S_2} = 0, \tag{15}$$

∂S_2 есть граница S_2 . Точное решение уравнения (12) может быть представлено в виде суммы ряда Фурье

$$u(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(\xi_1, \xi_2) U_n(\xi_3). \tag{16}$$

Векторная функция $U(\xi_3) = (U_1(\xi_3), U_2(\xi_3), \dots)^T$ удовлетворяет бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\iint_{S_2} \psi_m(\xi_1, \xi_2) (L[u] + \kappa^2 \sqrt{g} u) d\xi_1 d\xi_2 = 0, \tag{17}$$

$m \in \{1; 2; \dots\}$, $\xi_3 \in (z_a, z_b)$, и граничным условиям в интегральной форме парциальных условий излучения, которые получаются из (7), (8) заменой координат при интегрировании по поперечному сечению:

$\{\psi_n(\xi_1, \xi_2)\}$ на S_2 — полные ортогональные системы, то

$$\psi_m(\xi_1, \xi_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_{m,k}^{(1)} \tilde{\varphi}_k^{(1)}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_{m,k}^{(3)} \tilde{\varphi}_k^{(3)}(\xi_1, \xi_2), \tag{22}$$

при выполнении условий соответствия координат $(x_1, y_1, z_1) \leftrightarrow (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $z_1 = \xi_3$, $\xi_3 < z_a$, с учетом (20):

$$\iint_{S_2} \tilde{\varphi}_m^{(1)}(\xi_1, \xi_2) \left(\sum_{n=1}^N \frac{dV_n}{d\xi_3} \psi_n + i\gamma_n^{(1)} \sum_{n=1}^N V_n \psi_n \right) J^{(a)}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \Big|_{\xi_3=z_a} = 2iA_m^{(1)}\gamma_m^{(1)}, \quad (23)$$

Для заданной интегрируемой функции $f(\xi_1, \xi_2)$, непрерывных $\chi_1(\xi_1, \xi_2)$, $\chi_2(\xi_1, \xi_2)$, обозначим

$$\langle \chi_1 | f | \chi_2 \rangle_{S_2} = \iint_{S_2} \chi_1(\xi_1, \xi_2) f(\xi_1, \xi_2) \chi_2(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \quad (24)$$

Потребуем ортогональности невязки (т.е. результата действия оператора уравнения (12) на частичную сумму функционального ряда (21)) каждой из N координатных функций $\{\psi_1, \dots, \psi_N\}$ по поперечному сечению S_2 . Получим вместо бесконечной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (17) конечную систему

$$\iint_{S_2} \psi_m(\xi_1, \xi_2) (L[V^{(N)}] + \kappa^2 \sqrt{g} V^{(N)}) d\xi_1 d\xi_2 = 0, \quad (25)$$

$m \in \{1; \dots; N\}$, $\xi_3 \in (z_a, z_b)$. Теперь можно записать парциальные условия излучения (18), (19) в виде

$$\sum_{n=1}^N \left\langle \tilde{\varphi}_m^{(1)} | J^{(a)} | \psi_n \right\rangle_{S_2} \frac{dV_n}{d\xi_3} \Big|_{\xi_3=z_a} + \quad (26)$$

$$+ \sum_{n=1}^N i\gamma_n \left\langle \tilde{\varphi}_m^{(1)} | J | \psi_n \right\rangle_{S_2} V_n \Big|_{\xi_3=z_a} = 2i\gamma_m^{(1)} A_m^{(1)}, \quad (27)$$

$$\sum_{n=1}^N \left\langle \tilde{\varphi}_m^{(3)} | J^{(b)} | \psi_n \right\rangle_{S_2} \frac{dV_n}{d\xi_3} \Big|_{\xi_3=z_b} - \quad (28)$$

$$- \sum_{n=1}^N i\gamma_n \left\langle \tilde{\varphi}_m^{(3)} | J | \psi_n \right\rangle_{S_2} V_n \Big|_{\xi_3=z_b} = -2i\gamma_m^{(1)} B_m^{(1)} \quad (29)$$

для того же набора $\{m\}$. Вместе (25), (26) дают семейство краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка на отрезке, индексированную параметром N , который задает число координатных функций. Разумеется, для построения точного решения следует устремить $N \rightarrow +\infty$.

Из результатов [24], [25] следует **Теорема 1.** Пусть в области D_2 найдется круг (сколь угодно малого

радиуса), в котором $\text{Im } \rho(x, y) \geq \rho_0$, $\rho_0 > 0$. Тогда для любого N задача (25), (26) имеет единственное решение. Если $\rho(x, y)$ есть непрерывная функция, то $\|u^{(N)} - u\| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow +\infty$. Векторы коэффициентов рассеяния $\{A_n^{(N),(3)}\}$, $\{B_n^{(N),(1)}\}$ сходятся к точным значениям $\{A_n^{(3)}\}$, $\{B_n^{(1)}\}$ в норме l^2 .

Заметим, что векторная функция $V^N(\xi_3) = (V_1^{(N)}(\xi_3), \dots, V_N^{(N)}(\xi_3))^T$ не равна результату усечения векторной функции $U(\xi_3) = (U_1(\xi_3), U_2(\xi_3), \dots)^T$, представляющей точное решение. Однако, из теоремы 1 следует, что при любом фиксированном n найденные из (9), (10) коэффициенты рассеяния сходятся к точным:

$$A_n^{(N),(3)} \rightarrow A_n^{(3)}, \quad B_n^{(N),(1)} \rightarrow B_n^{(1)} \quad (30)$$

при $N \rightarrow +\infty$.

2. НЕПОЛНЫЙ МЕТОД ГАЛЕРКИНА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Математическая модель задачи для системы уравнений Максвелла, которая может быть применена для создания численного алгоритма, значительно сложнее модели для обобщенного уравнения Гельмгольца и разработана была позднее. В работе [25] разработан метод решения задачи рассеяния в нерегулярном волноводе для уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \text{rot} \mathbf{H} = -i\kappa \mathbf{E}, \\ \text{rot} \mathbf{E} = i\kappa \mathbf{H}, \end{cases} \quad (31)$$

с граничным условием

$$[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]|_{\partial D} = 0, \quad (32)$$

и условиям излучения в левом и правом продольно однородных отрезках:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} \Big|_{D_1} = \sum_{n=1}^{+\infty} R_n e^{-i\gamma_n^{(1)}(z_1-a)} \begin{Bmatrix} \mathbf{E}_n^{(1)\leftarrow} \\ \mathbf{H}_n^{(1)\leftarrow} \end{Bmatrix} + A_n e^{+i\gamma_n^{(1)}(z_1-a)} \begin{Bmatrix} \mathbf{E}_n^{(1)\rightarrow} \\ \mathbf{H}_n^{(1)\rightarrow} \end{Bmatrix} \quad \text{при } z_1 \in (-\infty, a], \quad (33)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} \Big|_{D_3} = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n e^{-i\gamma_n^{(3)}(z_3-b)} \begin{Bmatrix} \mathbf{E}_n^{(3)\leftarrow} \\ \mathbf{H}_n^{(3)\leftarrow} \end{Bmatrix} + T_n e^{+i\gamma_n^{(3)}(z_3-b)} \begin{Bmatrix} \mathbf{E}_n^{(3)\rightarrow} \\ \mathbf{H}_n^{(3)\rightarrow} \end{Bmatrix} \quad \text{при } z_3 \in [b, +\infty), \quad (34)$$

Гладкая замена координат переводит уравнения Максвелла в систему шести скалярных уравнений, три из которых записываются для компонент магнитного поля:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\zeta}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial \zeta} = -i\kappa \frac{\sqrt{g}}{\rho} (g^{11} E_\rho + \rho g^{12} E_\varphi + g^{13} E_\zeta), \quad (35)$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial \zeta} - \frac{\partial H_\zeta}{\partial \rho} = -i\kappa \sqrt{g} (g^{12} E_\rho + \rho g^{22} E_\varphi + g^{23} E_\zeta), \quad (36)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho H_\varphi}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} = -i\kappa \frac{\sqrt{g}}{\rho} (g^{13} E_\rho + \rho g^{23} E_\varphi + g^{33} E_\zeta), \quad (37)$$

и трем аналогичным для второго уравнения (31). В работе [25] предполагалось, что после замены координат область $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ переходит в круговой бесконечный цилиндр $r \in [0; 1)$, $\varphi \in [0; 2\pi)$, $\zeta \in (-\infty, +\infty)$. Граничные условия теперь будут иметь вид

$$E_\varphi|_{\rho=1} = 0, \quad E_\zeta|_{\rho=1} = 0. \quad (38)$$

Применение неполного метода Галеркина приводит систему (31) к краевой задаче для системы шести связанных векторных уравнений, аналогичных (21). Мы подробно изложим эту методику в следующей публикации. Здесь упомянем, что после публикации [25] была разработана методика решения системы Максвелла, основанная на применении неполного метода Галеркина к преобразованной системе, в которой проведено явное выражение продольных координат через поперечные, а также к системе, в которой поля выражаются через потенциалы.

3. РАССЕЙЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕРЕГУЛЯРНОМ ПЛАНАРНОМ НАГРУЖЕННОМ ВОЛНОВОДЕ

Далее мы продемонстрируем применение неполного метода Галеркина на примере задачи рассеяния электромагнитных волн на локальной неоднородности, находящейся в нерегулярном участке **планарного** волновода с диэлектрическим заполнением.

Исследуемая волноведущая система состоит из подводящего прямоугольного регулярного нагруженного полубесконечного волновода, участка волновода с криволинейными гладкими границами с неоднородным заполнением, и принимающего прямоугольного регулярного нагруженного полубесконечного волновода. Под нагруженным волноводом мы понимаем волновод, внутри которого расположен диэлектрический сердечник. Так как такая система может быть использована для преобразования моды заданного типа в подводящем волноводе в моду другого заданного типа в принимающем волноводе, будем называть такую конфигурацию **волноводным трансформатором**. В частности, подводящий и принимающий волноводы могут

быть одинаковыми, и заданные типы волн также одинаковыми, но принимающий волновод может быть по-другому расположен в пространстве, например, повернут. В этом случае мы считаем, что имеет место преобразование (трансформация) моды и также применяем указанную терминологию.

Рассмотрим задачу о волноводном трансформаторе, расположенном в изогнутом нагруженном планарном волноводе. Рассматриваемая волноводная система состоит из трех секций, которые обозначаем G_1, G_2, G_3 (в отличие от $D_{1;2;3}$ это области на плоскости). Систему координат в каждой из секций обозначаем (x_j, y_j) , $j \in \{1; 2; 3\}$, системы $(x, y)_{1;2;3}$ могут быть повернуты одна относительно другой, рис. 1. Координата z меняется во всех областях в пределах или $z \in (-\infty, +\infty)$, или $z \in (z_1, z_2)$. Вдоль z волновод однороден, это оправдывает название «планарный». Далее при описании области координату z не указываем.

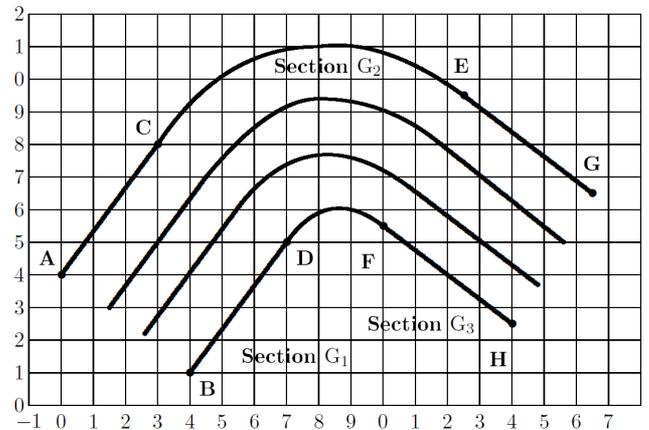


Рис. 1. Волноводный трансформатор в изогнутой секции, сопрягающей нагруженные полубесконечные планарные волноводы. Средняя полоса содержит неоднородный диэлектрик, крайние полосы — однородный диэлектрик

Теперь опишем три основных модели волноводного трансформатора, которые фактически были сформулированы в работах А. Г. Свешникова [24], [25]:

- Диэлектрический трансформатор в планарном волноводе с прямолинейными границами,
- Диэлектрический трансформатор в планарном волноводе с искривленными границами,
- Диэлектрический трансформатор в цилиндрическом волноводе с искривленными границами.

3.1. Диэлектрический трансформатор в планарном волноводе с прямолинейными границами

3.1.1. Система уравнений неполного метода Галеркина

Во всех трех секциях мы используем неполный метод Галеркина [26] для построения решения задачи (1) со всеми дополнительными условиями, в том числе условиями на границах, условиями излучения, условиями сопряжения.

Мы рассмотрим сначала «ключевую» задачу о рассеянии электромагнитных волн ТЕ поляризации в прямоугольном нагруженном волноводе, после чего применим её к каждой секции и добавим условия сопряжения. Найдем решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \zeta^2 u + \kappa^2 \rho(x, y)u = -f(x, y), \quad (39)$$

$(x, y) \in G$, $G = (-\infty, +\infty) \times (0, b)$, с граничными условиями

$$\left(\alpha_{12} \frac{\partial u}{\partial y} - \alpha_{11} u \right) \Big|_{y=0} = 0, \quad \left(\alpha_{22} \frac{\partial u}{\partial y} + \alpha_{21} u \right) \Big|_{y=b} = 0 \quad (40)$$

и с условиями излучения, которые далее сформулируем. Здесь $\alpha_{ij} \geq 0$, одновременно α_{i1} и α_{i2} не обращаются в нуль. Пусть

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \rho_1(y) & \text{при } (x, y) \in G_1, \\ \rho_2(x, y) & \text{при } (x, y) \in G_2, \\ \rho_2(y) & \text{при } (x, y) \in G_3, \end{cases} \quad (41)$$

$G_1 = (-\infty, x_a) \times (0, b)$, $G_2 = (x_a, x_b) \times (0, b)$, $G_3 = (x_b, +\infty) \times (0, b)$. Диэлектрическая проницаемость предполагает отсутствие активной среды, но допускает наличие поглощения в G_2 : $\rho_{1,3}(y)$ — вещественные функции, $\text{Re } \rho(x, y) > 0$, $\text{Im } \rho_2 \geq 0$. Дополнительно предположим, что $f(x, y) = 0$ при $x < x_a$ и при $x > x_b$.

Пусть $\varrho(y)$ есть кусочно-гладкая на отрезке $[0, b]$ функция, $\varrho(y) > 0$ на всех своих промежутках непрерывности, значение в точках разрыва можно задать произвольно. Пусть $\{\vartheta_n(y)\}$, $n \in \{1; \dots\}$ есть полная ортогональная с весом ϱ система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} \vartheta''_{yy} + \mu^2 \varrho \vartheta = 0, \\ \left(\alpha_{12} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} - \alpha_{11} \vartheta \right) \Big|_{y=0} = 0, \quad \left(\alpha_{22} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \alpha_{21} \vartheta \right) \Big|_{y=b} = 0. \end{cases} \quad (42)$$

Решение задачи (39) построим как предел функциональной последовательности $v^{(N)}(x, y)$, $N \in \{1, 2, \dots\}$ при $N \rightarrow +\infty$. Очередной член этой последовательности будем искать в виде

$$v^{(N)}(x, y) = \sum_{n=1}^N X_n^{(N)}(x) \vartheta_n(y), \quad (43)$$

далее верхний индекс $X^{(N)}$ не указываем, он неявно присутствует во всех выражениях для приближенного решения. Чтобы найти $\{X_n(x)\}$, $n \in \{1, 2, \dots, N\}$, потребуем выполнения условий ортогональности:

$$\begin{aligned} \int_0^b \vartheta_m(y) \varrho(y) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \zeta^2 v + \kappa^2 \rho(x, y)v \right) dy = \\ = - \int_0^b \vartheta_m(y) \varrho(y) f(x, y) dy \end{aligned} \quad (44)$$

для всех $m \in \{1, \dots, N\}$, $x \in (x_a, x_b)$. Пусть

$$\langle \vartheta_m | \rho | \vartheta_n \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^b \vartheta_m(y) \varrho(y) \rho(x, y) \vartheta_n(y) dy, \quad (45)$$

$$\langle \vartheta_m | f \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^b \vartheta_m(y) \varrho(y) f(x, y) dy. \quad (46)$$

Из условий ортогональности (с учетом весовой функции) собственных функций задачи (42) найдем

$$\langle \vartheta_m | 1 | \vartheta_n \rangle = \|\vartheta_m\|^2 \delta(m, n), \quad (47)$$

получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned} \|\vartheta_m\|^2 \frac{d^2 X_m}{dx^2} - (\mu_m^2 + \zeta^2) \|\vartheta_m\|^2 X_m + \\ + \kappa^2 \sum_{n=1}^N \langle \vartheta_m | \rho | \vartheta_n \rangle X_n = - \langle \vartheta_m | f \rangle \end{aligned} \quad (48)$$

для всех $m \in \{1, \dots, N\}$ на промежутке $x \in (x_a, x_b)$.

Обозначим функциональные векторы–столбцы:

$$\Theta(y) \stackrel{\text{def}}{=} (\vartheta_1(y), \vartheta_2(y), \dots, \vartheta_N(y))^T, \quad (49)$$

$$X(x) \stackrel{\text{def}}{=} (X_1(x), X_2(x), \dots, X_N(x))^T. \quad (50)$$

Очередной член функциональной последовательности $v(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} v^{(N)}(x, y)$ запишем в виде

$$v(x, y) = \Theta^T(y) X(x), \quad (51)$$

имеется в виду произведение строки $\Theta^T(y)$ на столбец $X(x)$. Тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Theta^T(y) \frac{d^2 X}{dx^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\Theta^T(y) \mathcal{M}^2 X(x), \quad (52)$$

где

$$\mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_N). \quad (53)$$

Векторную функцию $X(x)$ найдем из условий ортогональности невязки, которые при записи в векторно-матричной форме примут вид:

$$\begin{aligned} \langle \Theta | 1 | \Theta^T \rangle \frac{d^2 X}{dx^2} - (\mathcal{M}^2 + \zeta^2) \langle \Theta | 1 | \Theta^T \rangle X + \\ + \kappa^2 \langle \Theta | \rho | \Theta^T \rangle X = - \langle \Theta | f \rangle, \end{aligned} \quad (54)$$

где

$$\langle \Theta | v(x, y) | \Theta^T \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^b \Theta(y) \varrho(y) v(x, y) \Theta^T(y) dy, \quad (55)$$

$$\langle \Theta | f(x, y) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^b \Theta(y) \varrho(y) f(x, y) dy. \quad (56)$$

3.1.2. Условия излучения

Пусть секции I и III волновода являются регулярными, т.е. однородными в продольном направлении, но, возможно, неоднородными в поперечном направлении:

$$\rho(x, y) = \rho_1(y) \text{ при } x \leq x_a, \quad (57)$$

$$\rho(x, y) = \rho_3(y) \text{ при } x \geq x_b, \quad (58)$$

В секции G_1 : $x \leq x_a$, система (54) примет вид

$$\langle \Theta | 1 | \Theta^T \rangle \frac{d^2 X}{dx^2} - (\mathcal{M}^2 + \zeta^2) \langle \Theta | 1 | \Theta^T \rangle X + \kappa^2 \langle \Theta | \rho_1 | \Theta^T \rangle X = 0. \quad (59)$$

Частное решение уравнения (59) будем искать в виде $X(x) = Z e^{\pm i\gamma x}$. Для вектора Z получим задачу на собственные значения

$$(\kappa^2 \langle \Theta | \rho_1 | \Theta^T \rangle - (\mathcal{M}^2 + \zeta^2) \langle \Theta | 1 | \Theta^T \rangle) Z = \gamma^2 \langle \Theta | 1 | \Theta^T \rangle Z. \quad (60)$$

Обозначим $\{\pm \gamma_j^{(1)}\}$ – собственные значения, $\{Z_j^{(1)}\}$ – собственные векторы–столбцы. Матрица (60) симметрическая, функция $\rho_1(y)$ вещественная, поэтому можно выбрать ветвь корня так, чтобы было верно условие $\text{Re } \gamma_j \geq 0, \text{Im } \gamma_j \geq 0$. Запишем собственные значения и векторы в матричной форме:

$$\Gamma_1^{(1)} = \text{diag}(\gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_N^{(1)}), \quad \mathcal{Z}_1^{(1)} = (Z_1^{(1)}, \dots, Z_N^{(1)}). \quad (61)$$

Общее решение (59) имеет вид (верхний индекс $\star^{(1)}$, относящий обозначенные величины к первой секции, временно писать не будем до получения искомого результата):

$$X = \mathcal{Z}_1 e^{i\Gamma_1(x-x_a)} A_1 + \mathcal{Z}_1 e^{-i\Gamma_1(x-x_a)} B_1, \quad (62)$$

$x < x_a$, где A_1 – вектор–столбец комплексных амплитуд парциальных волн, бегущих в правом направлении, B_1 – то же в левом направлении. Так как

$$\frac{dX}{dx} = \mathcal{Z}_1 i\Gamma_1 e^{i\Gamma_1(x-x_a)} A_1 - \mathcal{Z}_1 i\Gamma_1 e^{-i\Gamma_1(x-x_a)} B_1, \quad (63)$$

то для любого $x \in (-\infty, x_a]$ верно

$$\begin{cases} i\Gamma_1 \mathcal{Z}_1^{-1} X(x) = i\Gamma_1 e^{i\Gamma_1(x-x_a)} A_1 + i\Gamma_1 e^{-i\Gamma_1(x-x_a)} B_1, \\ \mathcal{Z}_1^{-1} \frac{dX}{dx} = i\Gamma_1 e^{i\Gamma_1(x-x_a)} A_1 - i\Gamma_1 e^{-i\Gamma_1(x-x_a)} B_1. \end{cases} \quad (64)$$

Поэтому условия излучения для секции G_1 можно записать в виде условия заданных комплексных амплитуд волн, приходящих слева направо из секции G_1 к неоднородной области G_2 :

$$i\Gamma_1 \mathcal{Z}_1^{-1} X(x_a) + \mathcal{Z}_1^{-1} \frac{dX}{dx} \Big|_{x=x_a} = 2i\Gamma_1 A_1. \quad (65)$$

Амплитуды рассеянных волн можно найти из равенства

$$i\Gamma_1 \mathcal{Z}_1^{-1} X(x_a) - \mathcal{Z}_1^{-1} \frac{dX}{dx} \Big|_{x=x_a} = 2i\Gamma_1 B_1. \quad (66)$$

Для секции G_3 : $x \geq x_b$, аналогично запишем условия излучения:

$$i\Gamma_3 \mathcal{Z}_3^{-1} X(x_b) - \mathcal{Z}_3^{-1} \frac{dX}{dx} \Big|_{x=x_b} = 2i\Gamma_3 B_3, \quad (67)$$

амплитуды рассеянных волн можно найти из равенства

$$i\Gamma_3 \mathcal{Z}_3^{-1} X(x_b) + \mathcal{Z}_3^{-1} \frac{dX}{dx} \Big|_{x=x_b} = 2i\Gamma_3 A_3. \quad (68)$$

Таким образом, основная краевая задача для расчета очередного члена $X^{(N)}(x)$ функциональной последовательности, представляющей решение задачи рассеяния на локальной неоднородности, имеет вид

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} - \mathcal{M}^2 X + \kappa^2 \langle \Theta | \rho | \Theta^T \rangle X = \langle \Theta | f \rangle, \quad x \in (x_a, x_b), \\ i\Gamma_1 \mathcal{Z}_1^{-1} X(x_a) + \mathcal{Z}_1^{-1} \frac{dX}{dx} \Big|_{x=x_a} = 2i\Gamma_1 A_1, \\ i\Gamma_3 \mathcal{Z}_3^{-1} X(x_b) - \mathcal{Z}_3^{-1} \frac{dX}{dx} \Big|_{x=x_b} = 2i\Gamma_3 B_3, \end{cases} \quad (69)$$

где A_1 есть заданные комплексные амплитуды парциальных волн, облучающих нерегулярный участок с левой стороны, B_3 есть то же для парциальных волн, облучающих нерегулярный участок с правой стороны.

3.2. Рассеяние на ограниченном теле в регулярном волноводе с однородным заполнением

Часто встречающийся на практике случай однородных подводящего и отводящего волноводов допускает более простую постановку граничных условий излучения. Если в областях G_1 и G_2 среда не только продольно–однородна, но и поперечно–однородна:

$$\rho(x, y) = \rho_1 = \text{const при } x \leq x_a, \quad (70)$$

$$\rho(x, y) = \rho_3 = \text{const при } x \geq x_b, \quad (71)$$

то решение задачи с граничными условиями и условиями излучения (69) можно найти из краевой задачи, в которой граничные условия расщепляются на серию

функции $\varphi(x_2, y_2)$ и $\psi(x_2, y_2)$ гладкие, якобиан $\begin{vmatrix} \varphi'_{x_2} & \varphi'_{y_2} \\ \psi'_{x_2} & \psi'_{y_2} \end{vmatrix} > 0$ всюду в секции G_2 . Система координат (x_2, y_2) также смещена и повернута относительно (x_1, y_1) и относительно (x_3, y_3) . Граница секции II состоит из четырех кривых:

$$\partial G_{2.2} = \{\varphi(x_2, y_2) = \varphi_1 \wedge \psi(x_2, y_2) \in [\psi_1, \psi_2]\}, \quad (83)$$

$$\partial G_{2.4} = \{\varphi(x_2, y_2) = \varphi_2 \wedge \psi(x_2, y_2) \in [\psi_1, \psi_2]\}, \quad (84)$$

$$\partial G_{2.1} = \{\varphi(x_2, y_2) \in [\varphi_1, \varphi_2] \wedge \psi(x_2, y_2) = \psi_1\}, \quad (85)$$

$$\partial G_{2.3} = \{\varphi(x_2, y_2) \in [\varphi_1, \varphi_2] \wedge \psi(x_2, y_2) = \psi_2\}, \quad (86)$$

мы указываем сначала координату x_2 , затем y_2 . Граница $\partial G_{2.1}$ секции G_2 сопрягается с границей $\partial G_{1.2}$ секции G_1 , $\partial G_{2.3}$ сопрягается с $\partial G_{3.2}$. Расположение секций и функции преобразования координат предполагаем гладкими и гладко сопряженными, так что полная граница всего волновода является совокупностью двух гладких кривых $L_1 = \partial G_{1.1} \cup \partial G_{2.2} \cup \partial G_{3.1}$ (нижняя) $L_2 = \partial G_{1.3} \cup \partial G_{2.4} \cup \partial G_{3.3}$ (верхняя).

Область I может иметь диэлектрическое заполнение, в бесконечной подобласти $G_{1a} = (-\infty, x_{1a}) \times (0, b)$ в это продольно-однородная (вдоль оси x_1) функция $\rho_1(y_1)$, в конечной части $G_{1b} = (x_{1a}, x_{1b}) \times (0, b)$ это заданная функция $\rho_1(x_1, y_1)$, на которую мы накладываем минимальные ограничения, так что подводящий волновод состоит из бесконечного регулярного участка и (возможно, но не обязательно) конечного нерегулярного участка. Диэлектрическая проницаемость $\rho_1(x_1, y_1)$ есть кусочно-гладкая функция в G_1 , причем $\rho_1(x_1, y_1) = \rho_1(y_1)$ при $x_1 < x_{1a}$, $-\infty < x_{1a} < x_{1b}$. Диэлектрическая проницаемость $\rho_2(x_2, y_2)$ задана в G_2 , причем $\text{Im} \rho_2(x_2, y_2) \geq 0$. Диэлектрическая проницаемость $\rho_3(x_3, y_3)$ задана в G_3 , $\rho_3(x_3, y_3)$ есть кусочно-гладкая функция в G_3 , причем $\rho_3(x_3, y_3) = \rho_3(y_3)$ при $x_3 > x_{3a}$, $x_{3a} > x_{3b}$.

Пусть $E_z(x, y, z) = e^{i\zeta z} u(x, y)$. Рассмотрим задачу рассеяния (39) с условиями первого рода:

$$\Delta u + (\kappa^2 \rho(x, y) - \zeta^2) u = 0, \quad u|_{L_1} = 0, \quad u|_{L_2} = 0 \quad (87)$$

в области $D \subset \mathbb{R}^2$ с границей $L_1 \cup L_2$ и с условиями излучения,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} \quad (88)$$

Если планарный волновод бесконечен вдоль оси $z \in (-\infty, +\infty)$, то зависимость всех полей от z принимаем равной $\exp(i\zeta z)$, а если $z \in (z_1, z_2)$, то для TE поляризации зависимость E_z от z вида $\cos\left(\pi m \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\right)$, для TM поляризации зависимость $E_{x,y}$ от z вида $\sin\left(\pi m \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\right)$. Соответственно, значения ζ в этом случае также заданы очевидным образом.

В секции G_1 комплексная амплитуда электрического поля $u(x_1, y_1) = E_z(x_1, y_1)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} - \zeta^2 u + \kappa^2 \rho(x_1, y_1) u = 0, \quad (89)$$

$(x_1, y_1) \in G_1$, с граничными условиями

$$u|_{\partial G_{1.1}} = 0, \quad u|_{\partial G_{1.3}} = 0 \quad (90)$$

и с условиями излучения в области $G_{1.1} = (-\infty, x_{1a}) \times (0, b)$. В области G_3 уравнение и граничные условия аналогичны (89) и (90), только теперь используем декартовы координаты (x_3, y_3) , система (x_3, y_3) смещена и повернута относительно (x_1, y_1) . То же верно для G_2 , но это область с четырьмя, вообще говоря, криволинейными границами, гладко сопрягающимися в четырёх угловых точках. Мы найдем решение $u \in C^2(G) \cap C(\bar{G})$. На возможных линиях разрыва функции $\rho(x, y)$ условия сопряжения будут выполнены в среднем.

4.2. Преобразование координат для прямоугольного изогнутого волновода

Задача, решение которой мы представляем в данной работе в качестве иллюстрации применения неполного метода Галеркина, может быть решена методом замены координат, при которой преобразованию подвергаются только две координаты из трех (это будут x и y), третья координата z не изменяется. В преобразованной системе (ξ, η) область сложной формы, описанная в разделе 3, занимает полосу G с прямоугольными границами $\eta \in \{0; b\}$, $\xi \in (-\infty, +\infty)$. Пусть элемент длины дуги выражается формулой $ds^2 = dx^2 + dy^2$ в оригинальной ортогональной системе координат (x, y) . В преобразованной системе (ξ, η) элемент длины дуги равен

$$ds^2 = g_{11}(\xi, \eta) d\xi^2 + (g_{12} + g_{21}) d\xi d\eta + g_{22} d\eta^2 \quad (91)$$

причем

$$\begin{cases} g_{11}(\xi, \eta) = (x'_\xi)^2 + (y'_\xi)^2, \\ g_{12}(\xi, \eta) = g_{21}(\xi, \eta) = x'_\xi x'_\eta + y'_\xi y'_\eta, \\ g_{22}(\xi, \eta) = (x'_\eta)^2 + (y'_\eta)^2. \end{cases} \quad (92)$$

Обозначим

$$g = \det \hat{G}, \quad \hat{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = g^{ij} \sqrt{g}, \quad (93)$$

$$\check{G} = (\hat{G})^{-1} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{pmatrix}. \quad (94)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{div grad } u &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\sqrt{g} \left(g^{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + g^{12} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\sqrt{g} \left(g^{21} \frac{\partial u}{\partial \xi} + g^{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right], \quad (95) \end{aligned}$$

и основное уравнение (87) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\sqrt{g} \left(g^{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + g^{12} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\sqrt{g} \left(g^{21} \frac{\partial u}{\partial \xi} + g^{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right] - \sqrt{g} \zeta^2 u + \sqrt{g} \kappa^2 \rho u = 0. \quad (96)$$

Для построения алгоритма численного решения задачи запишем (96) в виде

$$\frac{\partial}{\partial \xi} a_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} a_{12} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} a_{21} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} a_{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \sqrt{g} \zeta^2 u + \kappa^2 \sqrt{g} \rho u = 0. \quad (97)$$

Приближенное решение находим в виде (51), вместо (49) и (50) используем аналогичные функции соответственно от η и от ξ . Коэффициенты суммирования находим из краевой задачи для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, которую получим, подставив (51) в (97) и затем в систему соотношений ортогональности невязки системе координатных функций, аналогичную (44):

$$\int_0^b \vartheta_m (L[v^N] + \kappa^2 \sqrt{g} v^N) d\eta = 0, \quad (98)$$

$m \in \{1, \dots, n\}$, с граничными условиями (26). Оператор L включает первые пять слагаемых левой части (97). Далее мы используем формулы (52), а также аналогичные формулы для однократного дифференцирования:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \Theta^T(\eta) \frac{dX}{d\xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \Upsilon^T(\eta) M X(\xi), \quad (99)$$

где

$$\begin{aligned} \Upsilon(\eta) &\stackrel{\text{def}}{=} (v_1(\eta), v_2(\eta), \dots, v_N(\eta))^T, \\ v_n(\eta) &= \sqrt{\frac{2}{b}} \cos \mu_n \eta. \end{aligned} \quad (100)$$

Из (98) получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта система второго порядка, в отличие от (77), также будет включать первые производные. Граничные условия излучения будут иметь вид (69) или (77) в случае поперечно-однородных секций G_1, G_3 .

4.3. Параметризация границы волновода

Опишем формат входных данных, задающих переходный участок в параметрической форме. Мы задаем форму опорной линии (ОЛ), которая определяет форму изогнутого участка. Для подводящего и принимающего участков ОЛ есть прямые, которые повернуты одна относительно другой на заданный угол, в нашем случае ОЛ ортогональны, так как рассматриваем поворот на 90° . Пусть s есть координата на ОЛ, равная длине

дуги от точки старта до текущей точки. Зададим зависимость единичного направляющего вектора опорной линии

$$(P(s), Q(s)) = (\cos \Omega(s), \sin \Omega(s)) \quad (101)$$

от координаты длины дуги s на ОЛ в виде дифференциального уравнения

$$\frac{d\Omega}{ds} = \omega(s), \quad (102)$$

$s \in [s_1, s_2]$, начальное значение $\Omega(s_1)$ согласовано с направляющим вектором подводящего волновода, $\Omega(s_2)$ — с направляющим вектором принимающего волновода. Функцию $\omega(s)$ выбираем так, чтобы обеспечить гладкое сопряжение изогнутого участка волновода и каждого из двух прямолинейных участков. Для этого достаточно гладкости $\omega(s)$ и выполнения условий $\omega(s_1) = 0, \omega(s_2) = 0$. Например,

$$\omega(s) = 6 \frac{(s - s_1)(s_2 - s)}{(s_2 - s_1)^3} (\Omega_2 - \Omega_1), \quad (103)$$

причем $\omega(s) > 0$ на (s_1, s_2) и тогда $\int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \omega(s) ds = \Omega_2 - \Omega_1$. Здесь Ω_1 и Ω_2 есть заданные стартовый и финишный направляющие углы ОЛ. В показанных далее результатах мы полагаем поворот на 90° : $\Omega_1 = -\frac{\pi}{4}$, $\Omega_2 = \frac{\pi}{4}$, именно под такими углами направляем соответственно подводящий и принимающий волноводы. Найдем векторную функцию $(x_0(s), y_0(s))$, которая задает ОЛ в параметрической форме, из задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{ds} &= P(s), \quad \frac{dy_0}{ds} = Q(s), \\ x_0(s_1) &= x_{0.start}, \quad y_0(s_1) = y_{0.start}, \end{aligned} \quad (104)$$

$(x_{0.start}, y_{0.start})$ есть координаты стартовой точки на опорной линии, от которой начинается изогнутый участок. Разумеется, можно поступить и наоборот, задать ОЛ в параметрической форме и найти затем направляющий вектор, проделав эти преобразования в обратном порядке. Далее мы вводим криволинейную систему координат (ξ, η) , в которой $\xi = s$,

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= x_0(\xi) - Q(\xi)(\eta - b_1(\xi)), \\ y(\xi, \eta) &= y_0(\xi) + P(\xi)(\eta - b_1(\xi)), \end{aligned} \quad (105)$$

$\eta \in [0; b(s)]$, функция $b(\xi)$ задает ширину волновода. Таким образом, опорная линия может располагаться внутри изогнутого участка, но может располагаться по одной из его границ. Мы приняли именно такое расположение: $b_1(s) = 0$. При этом одна (условно нижняя) граница задается в виде $x(s) = x_0(s), y(s) = y_0(s)$, вторая (условно верхняя) — в виде $x(s) = x_0(s) - Q(s)b(s), y(s) = y_0(s) + P(s)b(s)$.

Коэффициенты уравнения эллиптического типа (97) находим численным дифференцированием функций (105). Для заданной функции $f(\xi, \eta)$ положим

$$\begin{aligned} \frac{D}{D\xi}f(\xi, \eta) &= \frac{f(\xi + h, \eta) - f(\xi - h, \eta)}{2h}, \\ \frac{D}{D\eta}f(\xi, \eta) &= \frac{f(\xi, \eta + h) - f(\xi, \eta - h)}{2h}, \end{aligned} \quad (106)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi, \eta) = \frac{D}{D\xi}x(\xi, \eta), \quad \frac{\partial x}{\partial \eta}(\xi, \eta) = \frac{D}{D\eta}x(\xi, \eta) \quad (107)$$

и т.д. Такой подход позволяет при вычислении функций

$$\begin{aligned} g_{11}(\xi, \eta) &= (x'_\xi)^2 + (y'_\xi)^2, \quad g_{22}(\xi, \eta) = (x'_\eta)^2 + (y'_\eta)^2, \\ g_{12}(\xi, \eta) &= g_{21}(\xi, \eta) = x'_\xi x'_\eta + y'_\xi y'_\eta, \end{aligned} \quad (108)$$

$$a_{11} = \frac{g^{22}}{\sqrt{g}}, \quad a_{12} = \frac{-g^{12}}{\sqrt{g}}, \quad a_{21} = \frac{-g^{21}}{\sqrt{g}}, \quad a_{22} = \frac{g^{11}}{\sqrt{g}}, \quad (109)$$

использовать произвольную параметризацию функций, определяющих направляющую кривую, ширину волновода $b(s)$, плотность среды $\rho(\xi, \eta)$. Из условий практической реализуемости мы варьируем только параметры, определяющие размещение диэлектрической нагрузки внутри изогнутого участка волновода. По той же причине в однородных участках подводящего и отводящего полубесконечных участков диэлектрическая нагрузка выполнена в форме диэлектрических слоев заданной ширины, расположенных вдоль центральной плоскости. В неоднородной области мы можем изменять положение диэлектрического слоя относительно центральной плоскости в сторону внутреннего или внешнего изогнутых границ. Мы представляем функцию $h(s)$, задающую положение середины диэлектрического слоя в зависимости от продольной координаты на ОЛ, в виде сплайна, число и значение параметров которого можно изменять.

5. МЕТОД ГОМОТОПИИ

Задачи оптимизации электродинамических систем составляют важный раздел прикладной электродинамики. Мы предполагаем, что конфигурация волноводного трансформатора зависит от нескольких параметров, которые можно варьировать для достижения оптимального в некотором смысле результата. Решение прямой задачи рассеяния позволяет найти значение целевой функции, которая, таким образом, также зависит от нескольких параметров. Практически полезные результаты можно получить только из параметрических моделей, которые обладают свойством практической реализуемости. Вместе с тем, требуется обеспечить достаточную вариативность модели, которая позволяет получить приемлемое значение целевой функции.

Мы избегаем прямого применения методов численной оптимизации функции без оценки производной, например, Нелдера–Мида, так как наша задача допускает применение значительно более мощного и физически оправданного **метода гомотопии**. Метод дифференциальной гомотопии (называемый также методом погружения или методом инвариантного погружения) сформулирован в [48], [49] для решения абстрактного нелинейного уравнения. Мы в этой главе примем метод дифференциальной гомотопии на сетке значений параметра гомотопии для решения нелинейного уравнения, которое выражает необходимые условия локального экстремума заданной нами целевой функции. Для интегрирования дифференциального уравнения гомотопии мы используем метод Эйлера, поэтому фактически можно сразу формулировать разностный (сеточный) вариант метода дифференциальной гомотопии.

Обозначим вектор параметров $\mathcal{P} = (p_1, \dots, p_L)$, целевую функцию обозначим $\mathcal{W}(\mathcal{P})$. В нашем случае целевая функция вычисляется из решения серии краевых задач для уравнений Максвелла с условиями излучения при фиксированных геометрических параметрах волноводного трансформатора и с зафиксированным диэлектрической нагрузкой, но, возможно, с различными длинами волн $\{\lambda_i\}$ в заданном диапазоне. Пусть $T(\lambda, \mathcal{P})$ есть коэффициент прохождения по энергии волны заданного типа из подводящего в принимающий участки. Тогда целевая функция есть нормированная некоторым образом сумма значений $-\sum_{\{i\}} T(\lambda_i, \mathcal{P})c_i$ для заданного набора длин волн $\{\lambda_i\}$ и с заданными весовыми коэффициентами c_i , в этом случае целевая функция минимизируется, для единообразия мы добавили коэффициент -1 .

Задачу синтеза нагруженного волновода с заданной целевой функцией будем записывать в виде

$$\mathcal{W}(\mathcal{P}) \rightarrow \min. \quad (110)$$

Введем в задачу параметр гомотопии τ , который меняется от 0 до 1. Теперь геометрические параметры волноводного трансформатора и диэлектрическая нагрузка результаты решения и целевая функция также зависят от параметра гомотопии. Семейство задач гомотопии можно записать в виде

$$\mathcal{W}(\mathcal{P}, \tau) \rightarrow \min, \quad (111)$$

$\tau \in [0; 1]$. Пусть задача $\mathcal{W}(\mathcal{P}, 1) \rightarrow \min$ совпадает с поставленной исходя из потребностей практики. Семейство задач (111) выберем так, чтобы были выполнены два условия:

1. Задача $\mathcal{W}(\mathcal{P}, 0) \rightarrow \min$ имеет точное аналитическое решение,
2. Зешение $\mathcal{P}(\tau)$ задачи (111) гладко зависит от параметра гомотопии на промежутке $\tau \in [0; 1]$.

В данном случае параметр гомотопии τ выберем так, чтобы он определял угол поворота принимающего вол-

новода относительно возбуждающего:

$$\tau = \frac{2}{\pi}(\Omega_2 - \Omega_1). \quad (112)$$

При $\tau = 0$ получим задачу о распространении волн в прямолинейном волноводе, состоящем из трех участков: регулярного подводящего (I), регулярного принимающего (III) и участка сочленения (II), границы которого являются продолжением границ участков (I) и (III). Очевидно, что идеальное решение задачи о передаче облучающей моды в моду принимающего волновода соответствует единой прямолинейной нижней границе и параллельной прямолинейной верхней границе всех трех областей, а также продольно однородному заполнению всех трех участков. Таким образом, задача синтеза $\mathcal{W}(\mathcal{P}, 0) \rightarrow \min$ действительно имеет идеальное аналитическое решение (т.е. нулевое значение целевой функции при том, что целевая функция по своему определению неотрицательна).

Теперь введем сетку гомотопии $\{\tau_k\}$, $k \in \{0; 1; \dots, K\}$, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_K = 1$, $\tau_k = \frac{k}{K}$. Соответственно,

$$(\Omega_2 - \Omega_1)_k = \tau_k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (113)$$

(вместо $\frac{\pi}{2}$ можно поставить любой другой заданный угол поворота). Решение задачи оптимизации при очередном значении $\tau = \tau_{k+1}$ находим методом Ньютона. Значение целевой функции для варьированного вектора параметров $\mathcal{P} + \delta\mathcal{P}$ вычисляем по формуле Тейлора с многочленом первого порядка:

$$\mathcal{W}(\mathcal{P} + \delta\mathcal{P}, \tau_{k+1}) = \mathcal{W}(\mathcal{P}, \tau_{k+1}) + \text{Grad } \mathcal{W}^T \cdot \delta\mathcal{P} + R, \quad (114)$$

причем

$$\text{Grad } \mathcal{W} = \left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p_L} \right)^T \quad (115)$$

есть вектор столбец размерности L , $\text{Grad } \mathcal{W}^T$ означает транспонирование вектора (в данном случае столбец в строку). Остаточный член R далее опускаем. Градиент целевой функции $\text{Grad } \mathcal{W}$ находим численно методом центральной разности:

$$(\text{Grad } \mathcal{W})_j = \frac{\mathcal{W}(\mathcal{P} + h \cdot \delta\mathcal{P}_j, \tau) - \mathcal{W}(\mathcal{P} - h \cdot \delta\mathcal{P}_j, \tau)}{2\varepsilon}, \quad (116)$$

$\delta\mathcal{P}_j = (0; \dots; 0; \dots; 1; 0; \dots; 0)^T$, единица находится на j -й позиции, вектор градиента и все остальные векторы считаем столбцами. На каждом шаге итерационного метода решения частичной задачи оптимизации на шаге гомотопии решаем систему уравнений необходимых условий экстремума Ферма для задачи:

$$\text{Grad } \mathcal{W} = \mathbf{0}. \quad (117)$$

В свою очередь, задачу (117) решаем итерационным методом Ньютона. Обозначим

$$G(\mathcal{P}) = \text{Grad } \mathcal{W}, \quad (118)$$

это векторная функция размерности L от L переменных:

$$G(\mathcal{P}) = (g_1(\mathcal{P}), \dots, g_L(\mathcal{P}))^T. \quad (119)$$

Итерационный процесс поиска оптимального вектора параметров запишем с использованием вектора приращения $\delta\mathcal{P}^{(i)}$:

$$\mathcal{P}_{k+1}^{(i+1)} = \mathcal{P}_{k+1}^{(i)} + \delta\mathcal{P}^{(i)}, \quad (120)$$

$i \in \{0; 1 \dots\}$ есть номер итерации на одном шаге гомотопии. Начальное значение итерационного процесса вектора параметров, начиная со второго шага гомотопии, берем методом линейной экстраполяции двух предыдущих:

$$\mathcal{P}_{k+1}^{(0)} = \mathcal{P}_k + \frac{\mathcal{P}_k - \mathcal{P}_{k-1}}{h_\tau}. \quad (121)$$

Теперь уравнение (117) примет вид $G(\mathcal{P}) = \mathbf{0}$. Используем формулу Тейлора (остаточный член сразу опустим):

$$G(\mathcal{P} + \delta\mathcal{P}) = G(\mathcal{P}) + J \cdot \delta\mathcal{P}. \quad (122)$$

Здесь J есть функциональная матрица (матрица Якоби) векторной функции $G(\mathcal{P})$:

$$J = \begin{pmatrix} (g_1(\mathcal{P}))'_{p_1} & (g_1(\mathcal{P}))'_{p_2} & \dots & (g_1(\mathcal{P}))'_{p_L} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (g_L(\mathcal{P}))'_{p_1} & (g_L(\mathcal{P}))'_{p_2} & \dots & (g_L(\mathcal{P}))'_{p_L} \end{pmatrix} \quad (123)$$

Решим уравнение

$$G(\mathcal{P}) + J \cdot \delta\mathcal{P} = \mathbf{0}, \quad (124)$$

и найдем вектор приращения на шаге итерации:

$$\delta\mathcal{P} = -J^{-1} \cdot G(\mathcal{P}). \quad (125)$$

Начальные значения вектора параметров \mathcal{P}_{k+1} берем равными финальным значениям предыдущего шага \mathcal{P}_k . Условие останова итерационного процесса зададим в виде

$$\|\delta\mathcal{P}\| < \varepsilon. \quad (126)$$

Применение гомотопии позволяет на каждом шаге гомотопии располагать начальными значениями вектора параметров в близкой окрестности точки оптимума. В этой окрестности целевая функция может быть с достаточной точностью аппроксимирована многочленом Тейлора второго порядка. Это обстоятельство делает оправданным применение формулы Тейлора (114), (122).

В книге [44] детально исследован процесс выбора оптимального шага сетки при решении аналогичного класса задач. Мы используем этот алгоритм для сетки по параметру гомотопии. Этот метод позволяет найти оптимальную величину шага гомотопии для построения экономичного алгоритма. При уменьшении шага гомотопии $h_\tau = \frac{1}{K}$ линейно увеличивается число шагов и объем вычислительной работы, но одновременно уменьшается число итераций поиска локального минимума целевой функции, так что существует оптимум. Из результатов [44] следует, что наименьший объем вычислительной работы всего процесса гомотопии будет иметь место в том случае, когда на каждом шаге гомотопии делается от двух до трех итераций. Мы используем этот критерий оптимальности для выбора шага гомотопии. Начальное число шагов гомотопии мы всегда принимаем равным степени числа 2, затем используем алгоритм Мерсона [44] для коррекции шага. При достижении заданной точности поиска локального минимума за 2 итерации шаг гомотопии увеличивается в 2 раза, при недостижении заданной точности за 4 итерации шаг гомотопии уменьшается в 2 раза.

Вопрос о выполнении условия 2 (гладкая зависимость от параметра гомотопии) невозможно решить в общем виде для любого волноводного трансформатора. Пусть на некотором шаге гомотопии τ_k найдена локально минимальная целевая функция, причем выполнены достаточные условия локального минимума (знакоопределенность соответствующей квадратичной формы). Из этого следует, что найдется некоторый промежуток значений параметра гомотопии $\tau \in [\tau_k, \tau^*)$, на котором точка Ферма в пространстве параметров (т.е. точка, в которой выполнено условие (117)) будет точкой локального минимума. Это следует из того, что матрица Гессе функции (117) есть непрерывная функция параметров. Однако, в некоторой точке τ^* указанная матрица Гессе может стать вырожденной, и соответственно целевая функция в этой точке может иметь стационарную точку, но уже не обязательно точку минимума. Такие значения параметра гомотопии на траектории вектора параметров $\mathcal{P}(\tau)$ называют точками бифуркации, или это точки множества катастрофы в терминологии [46]. Это не может быть препятствием для применения метода гомотопии, так как имеются детально исследованные в теоретическом и практическом плане методы исследования целевой функции в окрестности точки катастрофы [45].

Сформулированный метод называют методом дискретной гомотопии (используем сетку параметра гомотопии). При стремлении шага параметра гомотопии к нулю получим дифференциальное уравнение гомотопии. Практической разницы между дискретной гомотопией и дифференциальной гомотопией нет, так как при использовании дифференциального варианта придется так или иначе составлять разностную схему для решения уравнения гомотопии. Описанный метод дискретной гомотопии соответствует неявному варианту

метода Эйлера решения уравнения дифференциальной гомотопии.

6. ОПТИМИЗАЦИЯ ИЗОГНУТОГО ВОЛНОВОДА

6.1. Оптимизация изогнутого волновода с однородным диэлектрическим заполнением

Задача расчета поля в изогнутом волноводе даже без диэлектрического заполнения не является тривиальной. Для решения применяют несколько методов, указанные во введении. В частности, вполне успешно применяют метод интегральных уравнений [8]. Заметим, что для изогнутого планарного волновода с однородным заполнением метод интегральных уравнений, так же как неполный метод Галеркина, позволяет понизить размерность задачи на единицу, так как используются потенциалы, сосредоточенные на одномерном многообразии. В то же время отметим, что для применения неполного метода Галеркина наличие неоднородного заполнения диэлектриком вообще не важно, так как даже для однородного заполнения диэлектриком после замены координат задача с однородной средой в области сложной формы приводится к равносильной задаче с неоднородной средой в области простой (прямоугольной) формы, решение в обоих случаях находится из краевой задачи для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений на отрезке. Таким образом, здесь понижение порядка на единицу достигается независимо от наличия неоднородного диэлектрического заполнения.

Для одномодового и двумодового волновода высокое значение коэффициента трансформации по мощности (больше 0.999) можно получить без диэлектрического заполнения.

Продemonстрируем применение неполного метода Галеркина для расчета оптимальной конфигурации изгиба планарного волновода с однородным диэлектриком. Для решения задачи оптимизации с одномерным пространством параметров метод гомотопии применять не обязательно, годится метод поиска локального экстремума функции одной переменной. Для определенности зададим часто встречающийся на практике угол изгиба волновода на $\alpha = 90^\circ$. При ширине волновода $b = 1$ в диапазоне длин волн $\lambda \in (0.4; 1)$ удается найти оптимальный радиус изгиба однородного волновода, при котором коэффициент передачи энергии $T \geq 0.999$. Оптимальное решение имеет ярко выраженный резонансный характер. Как видно из приводимых далее рисунков, поле в середине изогнутой секции деформируется существенно, затем вновь собирается в основную моду в конце этой секции.

Одно из решений задачи оптимизации радиуса изгиба для однородного волновода при $\kappa = 2.6\pi$, $\frac{b}{\lambda} = 1.3$ дает оптимальный радиус $R = 1.31$, все прочие геометрические параметры находятся из (101)–(105), преобразование координат (106)–(109).

На рис. 2 показана функция $g(\xi, \eta)$, показывающая в соответствии с (93), (96) эквивалентную диэлектрическую проницаемость $\rho_{\text{eff}} = \sqrt{g}$ в области искривленной секции G_2 для однородного волновода с оптимальным радиусом изгиба.

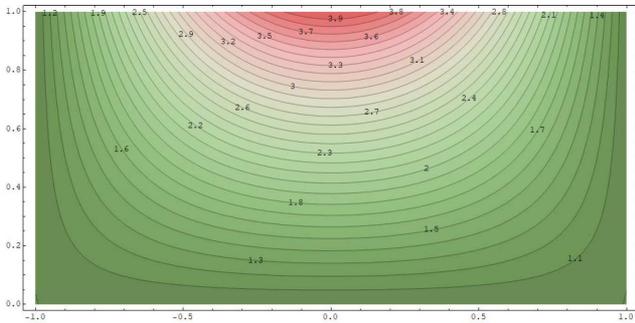


Рис. 2. Эквивалентная диэлектрическая проницаемость для изогнутого однородного волновода: $\kappa = 2.6\pi$, радиус изгиба $R = 1.3$.

При этом поле имеет плоскость симметрии, совпадающую с геометрической плоскостью симметрии волновода в целом, рис. 3. На рисунке можно обратить внимание на линию максимального уровня, которая в начале и в конце искривленного участка расположена одинаково относительно границ. Отличие профиля волны по амплитуде в поперечном сечении на входе и на выходе не превышает одного процента.

При увеличении количества распространяющихся мод подводящего волновода оптимизация радиуса изгиба приводит к более сложной картине поля, которое уже не обладает симметрией, за счет чего коэффициент прохождения уменьшается. Например, при $\kappa = 3.6\pi$, $\frac{b}{\lambda} = 1.8$, оптимальный радиус $R = 1.49$, рис. 4, коэффициент прохождения по энергии 0.9985. Теперь в принимающем волноводе возникает старшая прошедшая мода (в данном случае это третья симметричная мода), которая порождает интерференционную картину вместе с главной модой, рис. 4. На выходе поле оказывается поджато к центру и соответственно уменьшено вблизи стенок.

При дальнейшем увеличении количества распространяющихся мод подводящего волновода оптимизации радиуса изгиба уже не достаточно для достижения коэффициента прохождения больше 0.999. Например, при $\kappa = 4.6\pi$, $\frac{b}{\lambda} = 2.3$, оптимальный радиус $R = 1.4$, коэффициент прохождения по энергии не превышает 0.97, рис. 5. Поле на выходе включает заметную по рисунку компоненту старших мод, как симметричных, так и антисимметричных. Разумеется, имеется возможность увеличить размерность пространства параметров, включив, например, вариацию толщины волновода. Но для нас исследование волновода с однородным заполнением не является самоцелью, нас интересует нагруженный волновод.

7. ИЗГИБ МНОГОМОДОВОГО ВОЛНОВОДА С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

7.1. Применение метода гомотопии

Для многомодового волновода высокое значение коэффициента трансформации по мощности (больше 0.999) получить без диэлектрического заполнения можно получить, вероятно, существенно расширив пространство параметров. Для практически реализуемых конфигураций получить высокое качество не удастся. За счёт внутренних переотражений возникают как отраженные назад моды, так и старшие моды принимающего участка.

Для компенсации этого эффекта можно использовать изгиб многомодового волновода с диэлектрическим заполнением (нагруженного). Для нагруженных волноводов размерность пространства параметров естественно увеличить, включив управление расположением диэлектрического слоя относительно центральной линии волновода, а также ширину диэлектрического слоя. В задачах рассматриваемого класса чрезмерная детализация модели нецелесообразна ввиду практической сложности изготовления такого трансформатора с достаточной точностью. Поэтому мы рассматриваем только трехпараметрическую модель с указанными тремя параметрами. В данном случае параметром гомотопии можно принять угол изгиба α , равный углу между подводящим и отводящим прямолинейными участками. Достаточно рассмотреть задачу на отрезке гомотопии $\alpha \in [\alpha_{\text{start}}, \alpha_{\text{finish}}]$, как и для однородного волновода задаём $\alpha_{\text{finish}} = 90^\circ$. Чтобы не погружаться в детали технического воплощения (практически, сформулированный метод позволяет задать практически произвольную конфигурацию), рассмотрим модель диэлектрического слоя с плотностью

$$\rho(\xi, \eta) = \rho_0 + (\rho_1 - \rho_0)e^{-(\eta - \eta_0(\tilde{\xi}))^2 / (2\sigma^2(\tilde{\xi}))}, \quad (127)$$

значение плотности среды на периферии (около стенок) равно ρ_0 , а в центральном слое ρ_1 , причем $\rho_1 > \rho_0$. Вместо ξ здесь используется относительная продольная координата $\tilde{\xi}$:

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi - \xi_a}{\xi_b - \xi_a}, \quad (128)$$

в пределах искривленной секции эта величина принимает значения $\tilde{\xi} \in [0; 1]$. Ширина диэлектрического слоя внутри изгиба управляется одним параметром σ_2 :

$$\sigma(\tilde{\xi}) = \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) \cdot 2\tilde{\xi}(2 - 2\tilde{\xi}), \quad (129)$$

в секции G_1 используем функцию (129) при $\xi = \xi_a$, соответственно $\tilde{\xi} = 0$, в секции G_3 используем (129) при $\xi = \xi_b$, и тогда $\tilde{\xi} = 1$. Параметр $\sigma_2 - \sigma_1$ может быть положительным, и тогда в секции G_2 слой толще, чем в подводящем и отводящем волноводах, или

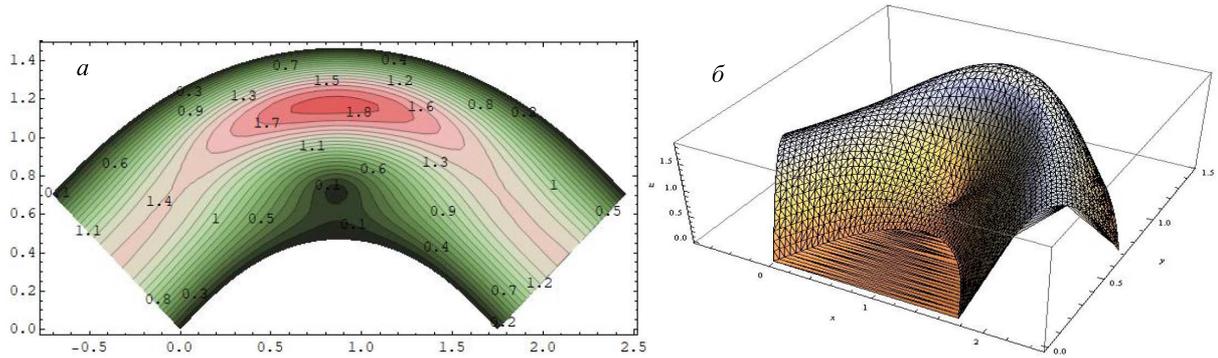


Рис. 3. Поле для оптимизированного по радиусу изгиба трансформатора в однородном волноводе. Оптимальный радиус изгиба $R = 1.3$, $\kappa = 2.6\pi$, $\frac{b}{\lambda} = 1.3$. (a) Ось x направлена по горизонтали, ось y по вертикали, (б) график $z = u(x, y)$

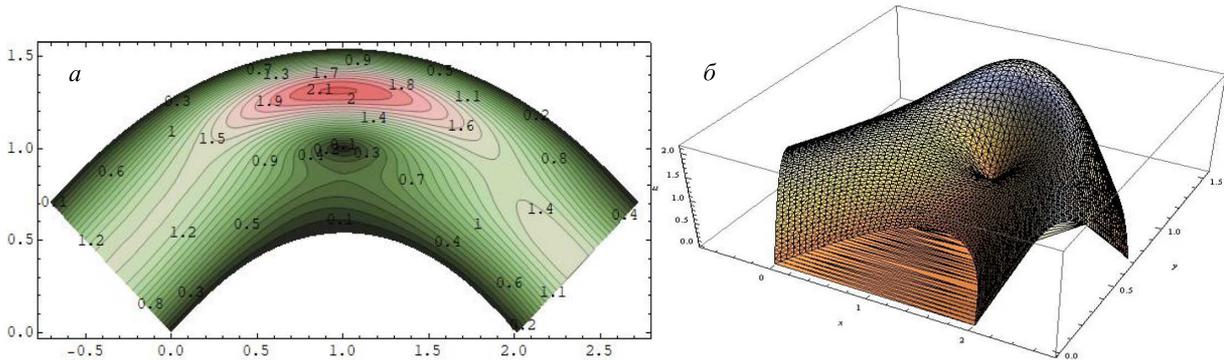


Рис. 4. Поле в искривленной области для оптимизированного по радиусу изгиба трансформатора в однородном волноводе. Оптимальный радиус изгиба $R = 1.3$, $\kappa = 3.6\pi$, $\frac{b}{\lambda} = 1.8$. Ось x направлена по горизонтали, ось y по вертикали

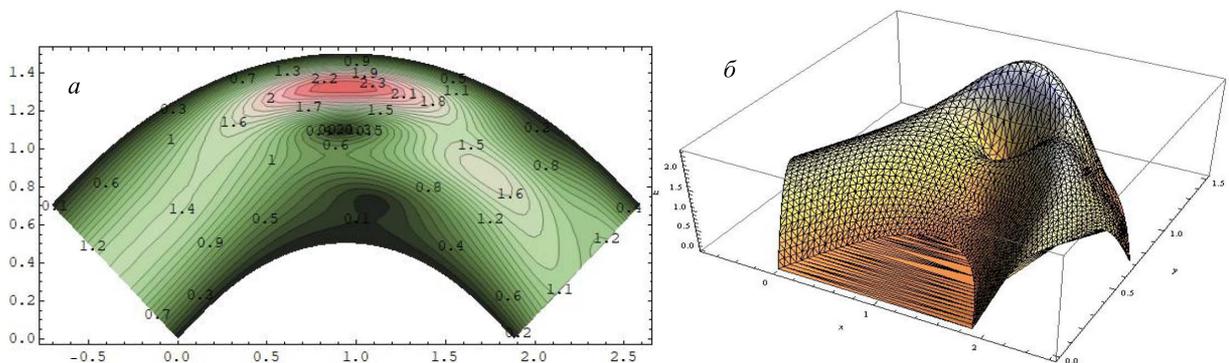


Рис. 5. Поле в неоднородной области для криволинейного симметричного оптимизированного трансформатора для $\kappa = 4.6\pi$ с оптимальным радиусом изгиба $R = 1.4$. Ось x направлена по горизонтали, ось y по вертикали

отрицательным, и тогда в секции G_2 слой становится тоньше.

Положение диэлектрического слоя управляется также одним параметром b_2 :

$$\eta_0(\tilde{\xi}) = \frac{b}{2}(b_1 + b_2 \cdot (2\tilde{\xi})^2(2 - 2\tilde{\xi})^2), \quad (130)$$

где $b_1 = 1$. В подводящем и отводящем волноводах $\eta_0(\xi) = \frac{b}{2}$, так что слой располагается вдоль средней линии. В середине изогнутого участка слой смещается на b_2 относительно средней линии. Вместе (127), (129), (130) соответствуют одной из механических моделей

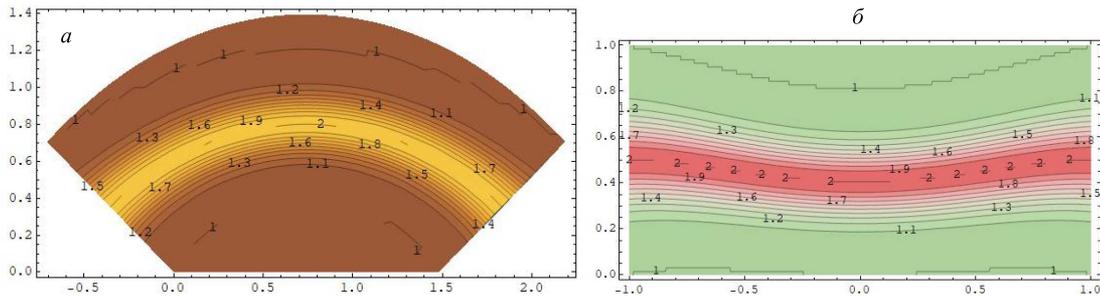


Рис. 6. Карта линий равного уровня диэлектрической проницаемости в изогнутой секции: (а) в координатах (ξ, η) , (б) в координатах (x, y)

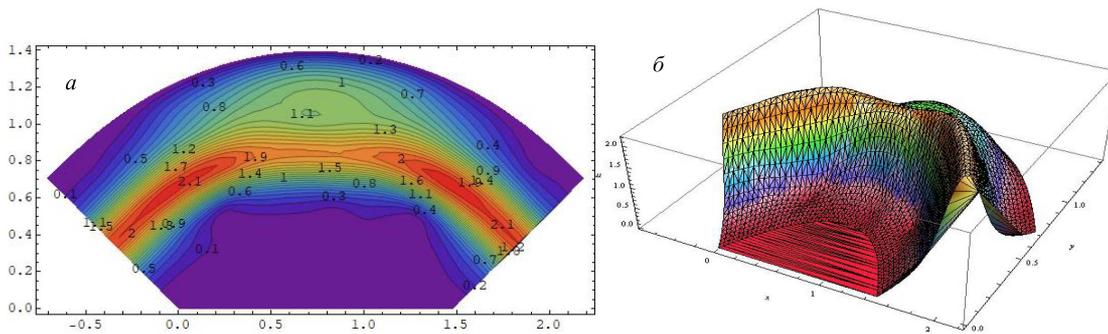


Рис. 7. Поле в неоднородной области для криволинейного симметричного оптимизированного трансформатора для $\rho = (1; 2)$, $R = 1.1$, $\kappa = 4.6\pi$

диэлектрического сердечника из упругого материала, который изгибается и растягивается (или сжимается) в искривленной секции в результате изгиба самого волновода. Следует принять условность представленной модели, мы демонстрируем не реальное устройство, а возможности комбинации метода Галеркина и метода гомотопии.

Пусть $T(\alpha, \mathcal{P})$ есть значение коэффициента трансформации по мощности для заданной моды (мы рассматриваем основную моду подводящего волновода) в зависимости от вектора параметров $\mathcal{P} = (r, \sigma_2, b_2)$, радиус изгиба r , угла изгиба α , параметры σ_2, b_2 . Значение волнового числа κ параметром не является, но может рассматриваться сетка по κ . Пусть $\{\alpha_j\}$ есть сетка на оси угла изгиба, и соответствующие значения \mathcal{P}_j получены решением задачи оптимизации $T(\alpha, \mathcal{P}) \rightarrow \max$. Пусть значение \mathcal{P}_j найдено. Решим задачу оптимизации $T(\alpha_{j+1}, \mathcal{P}_{j+1}) \rightarrow \max$ методом Ньютона с оценкой производной методом конечных разностей, это сводится к реализации шагов (120)–(125). Таким образом, мы находим сеточную функцию $\mathcal{P}_j = \mathcal{P}(\alpha_j)$ методом дискретной гомотопии. Таким же образом ставим задачу оптимизации для заданного набора длин волн.

Начальное значение вектора параметров разностной гомотопии \mathcal{P}_0 мы можем указать достаточно произвольным образом. Ясно, что при выборе разных значений этой величины мы будем выходить в конце концов на одно из дискретного множества решений оптимальной задачи. Иначе говоря, для угла $\alpha_{\text{finish}} = 90^\circ$

существует, вообще говоря, несколько решений задачи нахождения оптимального радиуса.

7.2. Оптимальные параметры трансформатора в нагруженном волноводе

Для многомодового нагруженного волновода характерно многообразие локальных решений задачи оптимизации (т.е. поиска оптимального вектора параметров при наложении ограничений на множество значений вектора параметров). Ограничимся здесь одним примером. Мы принимаем $\rho_0 = 1$ (воздух), $\rho_1 = 2$ (вместо точного значения диэлектрической проницаемости материала нагрузки). Для многомодового изогнутого нагруженного волновода удастся найти вектор параметров так, что в области изгиба поле распространяющейся трансформируемой волны внутри изогнутой области сохраняет структуру направляемой моды подводящего волновода. Иначе говоря, в отличие от волновода с однородным диэлектриком оптимальная конфигурация трансформатора основана не на резонансной трансформации, когда в изогнутом участке основная мода конвертируется в старшие моды, а в конце изогнутого участка старшие моды обратно конвертируются в основную почти полностью. Вместо этого оптимальное расположение диэлектрического слоя совместно с изгибом стенок приводят к отсутствию конверсии энергии основной моды в старшие.

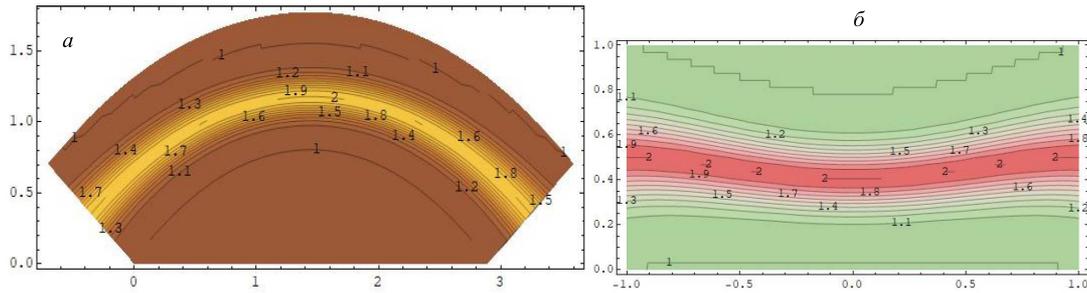


Рис. 8. Карта линий равного уровня диэлектрической проницаемости в неоднородной области для оптимизированного трансформатора в нагруженном волноводе, изогнутом на 90° . Второе решение, радиус изгиба $R = 2.15$, $\kappa = 4.6\pi$, $\frac{b}{\lambda} = 2.3$

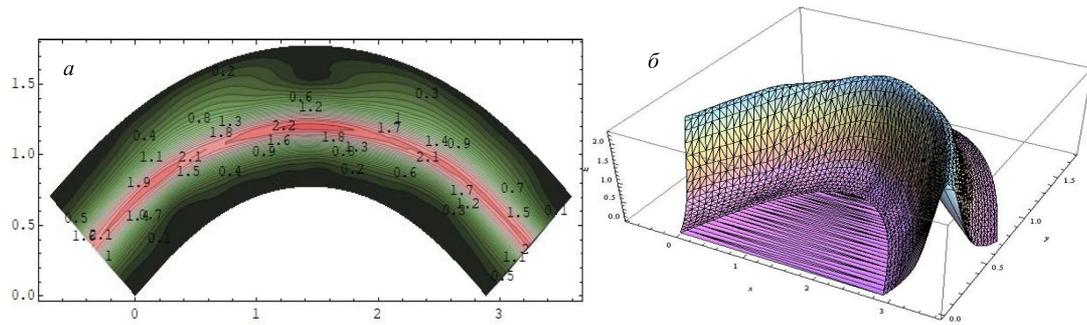


Рис. 9. Поле в неоднородной области для криволинейного симметричного оптимизированного трансформатора для $\kappa = 4.6\pi$, протяженность неоднородного участка $L = 7$

Приведем результат оптимизации для $\kappa = 4.6\pi$, $\frac{b}{\lambda} = 2.3$. При указанном профиле диэлектрической проницаемости в подводящем волноводе (127) (и таким же профилем в принимающем волноводе) нормированное волновое число

$$\tilde{\kappa}_n = \frac{\lambda_n}{\kappa \sqrt{\max \rho(y)}} \quad (131)$$

принимает для направляемых мод значения

n	1	2	3	4	5
$\tilde{\kappa}_n$	0.912	0.752	0.637	0.508	0.225

(132)

Наибольшее возможное значение $\tilde{\kappa}_n$ равно 1 и достигается только для однородного заполнения. Имеется всего 5 направляемых мод. Направляемые моды в приведенной таблице соответствуют чередующимся чётным и нечётным (относительно средней линии) модам. Волновод без диэлектрического сердечника с теми же параметрами (ненагруженный) имел бы 4 моды, для которых $\tilde{\kappa}_n = \sqrt{1 - \frac{\mu_n^2}{\kappa^2}}$.

При $\kappa = 4.6\pi$, $\frac{b}{\lambda} = 2.3$ для принятой нами модели изогнутого участка (102), (103). Одно из решений для оптимального радиуса изгиба $R = 1.1$, оптимальный сдвиг средней линии в сторону центра кривизны $\frac{12}{128}$,

в средней области сужение диэлектрического слоя от $\sigma_1 = 16 \cdot 2^{-7}$ до $\sigma_2 = 13 \cdot 2^{-7}$, коэффициент пропускания основной моды по энергии 0.999. Расположение слоя на рис. 6 показано как в системе координат (ξ, η) , так и в (x, y) . Поле показано на рис. 7.

Для тех же параметров (длина волны, профиль диэлектрической проницаемости) есть по крайней мере ещё одно решение: для радиуса изгиба внутренней границы $R = 2.15$ в рамках трехпараметрической модели достигается значение $T = 0.998$. Сдвиг во внутреннюю сторону на $\delta\eta_0 = 12 \cdot 2^{-7}$ ширины, $\sigma_{1,2} = (16; 12) \cdot 2^{-7}$. Расположение слоя на рис. 8 показано как в системе координат (ξ, η) , так и в (x, y) . Карта поля на рис. 9

8. СИММЕТРИЧЕСКИЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТРАНСФОРМАТОР В ПРЯМОЛИНЕЙНОМ ВОЛНОВОДЕ

Как ещё одно применение неполного метода Галерки мы рассмотрим возможность трансформации основной моды волновода с однородным заполнением в основную же моду такого же волновода с однородным заполнением с другой диэлектрической проницаемостью. Эта задача важна, в частности, для расчета оптимальных поглощающих покрытий. Отличие только в том, что следует использовать квазипериодические условия (условия Флоке: $u(x, y + b) = e^{i2\pi\nu} u(x, y)$) и соответствующие координатные функции $\varphi_n(y) = e^{i2\pi(\nu+n)y/b}$.

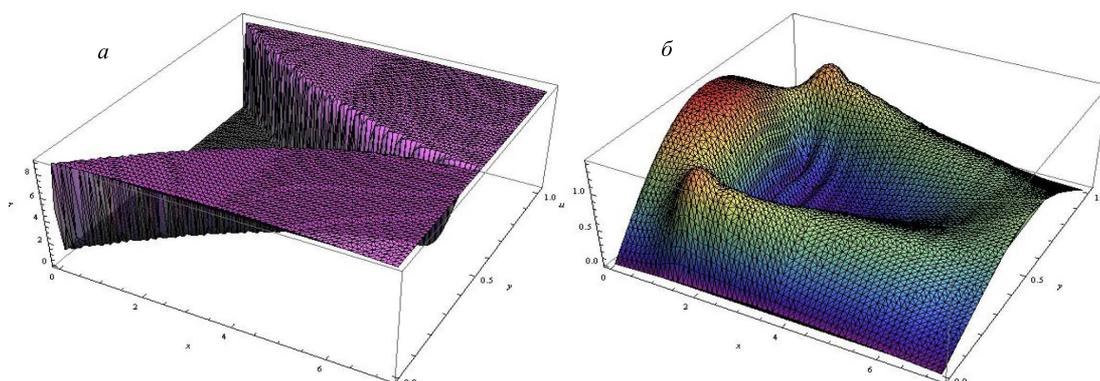


Рис. 10. (а) Диэлектрическая проницаемость в неоднородной области для криволинейного симметрического оптимизированного трансформатора в прямолинейном волноводе, протяженность неоднородного участка $L = 7$. (б) Карта напряженности электрического поля

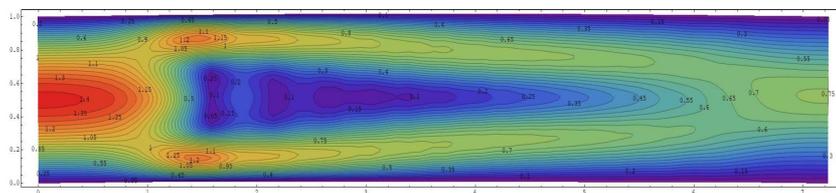


Рис. 11. Поле в неоднородной области для криволинейного симметрического оптимизированного трансформатора для $\kappa = 1.6\pi$, протяженность неоднородного участка $L = 7$

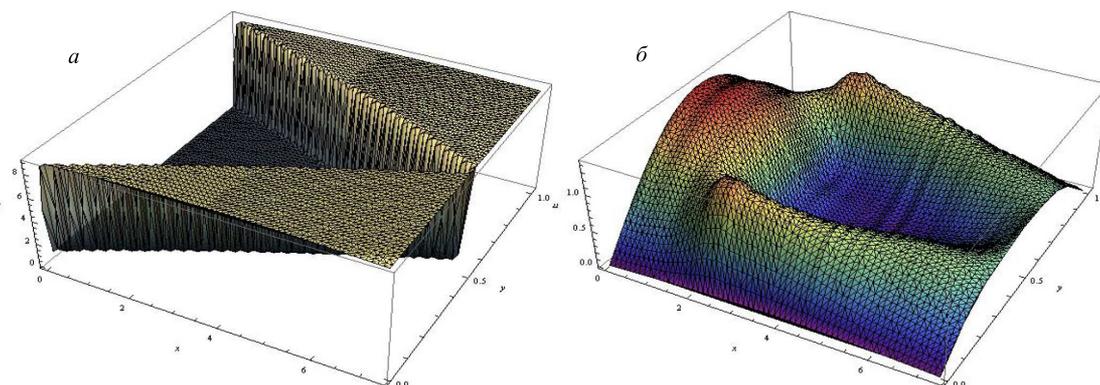


Рис. 12. (а) Диэлектрическая проницаемость в неоднородной области для криволинейного симметрического неоптимизированного трансформатора, протяженность неоднородного участка $L = 7$. (б) График напряженности электрического поля

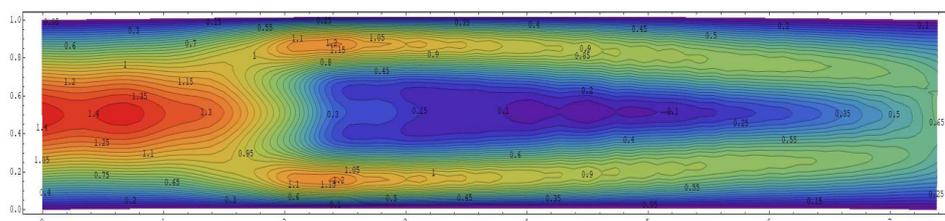


Рис. 13. Поле в неоднородной области для криволинейного симметрического оптимизированного трансформатора для $\kappa = 1.6\pi$, протяженность неоднородного участка $L = 7$.

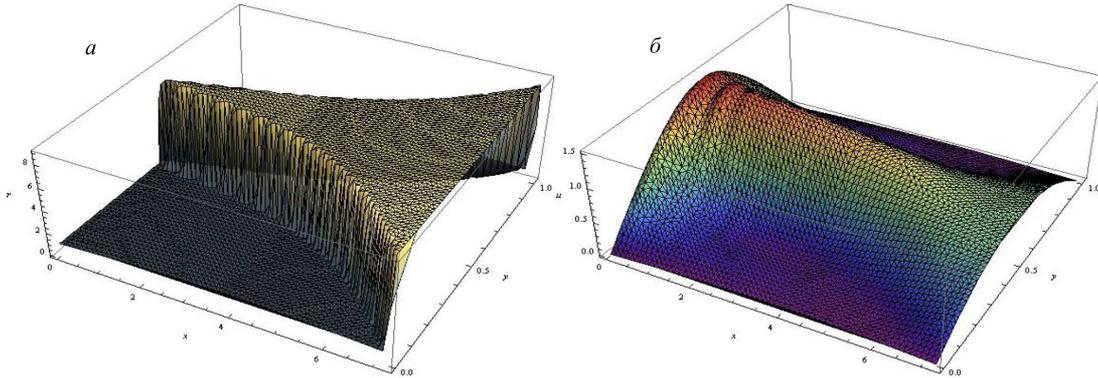


Рис. 14. (а) Диэлектрическая проницаемость в неоднородной области для криволинейного симметричного оптимизированного трансформатора в прямолинейном волноводе, протяженность неоднородного участка $L = 7$. (б) Карта напряженности электрического поля

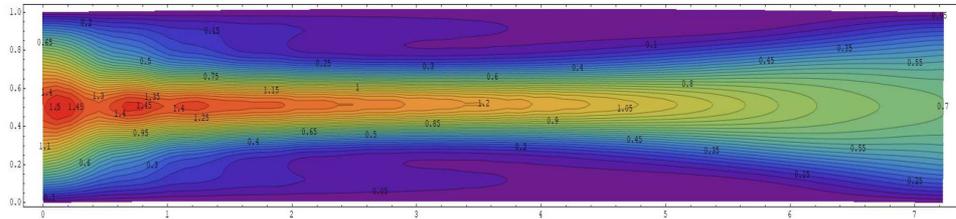


Рис. 15. Поле в неоднородной области для криволинейного симметричного оптимизированного трансформатора для $\kappa = 1.6\pi$, протяженность неоднородного участка $L = 7$

Для того, чтобы избежать применения конкретных параметров, зададим диэлектрические проницаемости среды $\rho = 1$ (подводящий волновод) и $\rho = 9$ (принимающий волновод). Подводящий волновод работает в одномодовом режиме при $\kappa = 1.6\pi$, при этом принимающий будет в четырехмодовом режиме, и получение высокого коэффициента трансформации в основную моду не является тривиальной задачей. Если бы граница раздела двух сред была прямолинейной, ортогональной к металлическим границам, то коэффициент прохождения определялся бы законом Снеллиуса и был бы недостаточно велик. Диэлектрический трансформатор с криволинейными границами позволяет поднять коэффициент пропускания по энергии до величины больше 0.999. Имеется серия возможных значений длины неоднородного участка, при которых коэффициент трансформации достигает значения 1. Мы покажем результат оптимизации для случая длины переходного участка $L = 7$. Так как нас интересует сейчас трансформация в основную (чётную) моду, естественно использовать симметричный трансформатор, рис. 10. Мы задали границу раздела двух сред в виде сплайновой функции с несколькими параметрами, для решения задачи оптимизации использовали метод гомотопии.

На рис. 11 показано поле в области трансформатора. В передней части трансформатора поле деформируется сильнейшим образом, энергия перекачивается в старшие моды, составляющая основной моды прак-

тически отсутствует. В тыловой части трансформатора поле вновь собирается в поле основной моды за счет резонансного взаимодействия парциальных волн, рассеянных на криволинейной границе раздела.

Для сравнения покажем результат расчета трансформатора с оптимальной длиной (в данном случае она равна 7.382) с прямолинейными границами. Коэффициент пропускания по мощности (при оптимизации только по длине неоднородного участка, но не по форме границы раздела) в данном случае равен 0.958. Несмотря на схожесть рис. 11 и рис. 13, можно заметить, что на рис. 11 поле на правом конце неоднородного участка является собственной функцией поперечного сечения $c_1 \sin \frac{\pi x}{b}$, а на рис. 13 там же заметна значительная компонента $c_3 \sin \frac{3\pi x}{b}$. Заметна также интерференция главной моды и отражённой моды в области $x < x_a$, на рис. 13 этого не наблюдается, так как амплитуда отражённой волны пренебрежимо мала. Наиболее интересной с практической точки зрения в современных приложениях является оптимизация периодических диэлектрических решёток, трансформирующих падающую из воздушной среды плоскую волну в направляемую моду оптического световода с последующим направлением собранного поля на оптический сенсор в диапазоне видимого света и в инфракрасном диапазоне. Для решения этой задачи неполный метод

Галеркина в сочетании с методом гомотопии эффективен в наивысшей степени.

Рассмотрим также и другую возможную конфигурацию трансформатора из однородного волновода в волновод с однородным же заполнением, но с другой диэлектрической проницаемостью, рис. 14. Теперь введение среды с увеличенной плотностью начинается с центральной области волновода. Оптимизация в рамках двухпараметрической модели доводит коэффициент прохождения основной моды до 0.999, но с совершенно другой картиной поля, рис. 15. Тот же подход позволяет решить актуальную в настоящее время задачу синтеза оптимального профиля периодической диэлектрической решетки, расположенной на поверхности планарного световода, конвертирующей падающую плоскую волну в направляемую моду.

На рис. 15 показано поле в области трансформатора. В передней части трансформатора поле деформируется сильнейшим образом, энергия перекачивается в старшие моды, составляющая основной моды практически отсутствует. В задней части поле вновь собирается в поле основной моды за счет резонансного взаимодействия парциальных волн, рассеянных на криволинейной границе раздела.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ: ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ НЕПОЛНОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА

Неполный метод Галеркина для нерегулярных волноводов, разработанный и обоснованный в работах А. Г. Свешникова, был применен для решения большого числа практически важных задач, в том числе:

1. Задача об излучении волноводной моды в открытое пространство с рупорным переходом, оптимизация рупорного излучателя.
2. Задача синтеза беззехового покрытия измерительной камеры с периодически расположенными призматическими поглощающими элементами.
3. Синтез управляемой решетки с периодически расположенными активными элементами.
4. Анализ и синтез оптического волнового трансформатора, поверхностного приемника с периодически модулированной поверхностью.
5. Расчет поля в волноводно–лестничной системе, применяемой в электровакуумных приборах с электронным пучком.
6. Задача оптимизация волноводного трансформатора для преобразования основной моды при перемене сечения волновода с фланцем.
7. (в настоящей работе) Задача синтеза волноводного трансформатора, преобразующего направляемую моду заданного типа в направляемую волну другого типа.

Автор благодарен А. Г. Свешникову за многолетнюю поддержку на протяжении почти полувека.

-
- [1] *Фелсен Л.Б., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. М.: Мир, 1978.
 - [2] *Левин Л.* Теория волноводов. М., Радио и связь, 1981.
 - [3] *Keller J.B.* // J. Opt. Soc. Am. **52**, N 2. 116. (1962).
 - [4] *Маслов В.П.* Асимптотические методы и теория возмущений. М.: Наука, 1988.
 - [5] *Tsang L., Kong J.H., Ding K.H.* Scattering of Electromagnetic waves.
 - [6] *Уфимцев П.Я.* Метод краевых волн в физической теории дифракции. М.: Советское радио, 1962.
 - [7] *Хижняк Н.А.* Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев: Наукова думка, 1986.
 - [8] *Дмитриев В.И., Захаров Е.В.* Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. М.: Изд-во МГУ, 1987.
 - [9] *Миттра Р.*, ред. Вычислительные методы в электродинамике. М.: Мир, 1977.
 - [10] *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Красильникова А.В., Минаев Д.В., Свешников А.Г.* Математическое моделирование волнующих систем на основе метода конечных разностей. // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. № 5. 39. (1998).
 - [11] *Henderson J., Luca R.* Boundary Value Problems for Second-Order Finite Difference Equations and Systems. De Gruyter Studies in Mathematics. GmbH, Berlin, 2023.
 - [12] *Rumpf R.C.* Electromagnetic and Photonic Simulation: Finite-Difference Frequency-Domain. Artech House Publishers, 2022.
 - [13] *Taflov A., Hagness S.* Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method. Artech House, Lobdon, 2000.
 - [14] *Бадюков В.Ф.* // Радиотехн. и электроника. **32**, № 9. 1853. (1987).
 - [15] *Гавурин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1997.
 - [16] *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988.
 - [17] *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985.
 - [18] *Никольский В.В.* // Изв. ВУЗов, Радиофизика. **20**, № 1. 3. (1977).
 - [19] *Никольский В.В.* Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. М.: Наука, Главн. ред. физ.-мат. лит., 1967.
 - [20] *Еремин Ю.А., Свешников А.Г.* Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции. М.: изд-во МГУ, 1992.
 - [21] *Канторович Л.В.* // Прикл. матем. и механ. **6**, № 1. 31. (1942).
 - [22] *Schelkunoff S.* // Bell Syst. Techn. J. **34**, № 5. 995. (1955).

- [23] Канторович Л.В. // Успехи матем. наук. **42**, № 2(254). 31. (1987).
- [24] Свешников А.Г. // ЖВМ. **3**, № 1. 170. (1963).
- [25] Свешников А.Г. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **3**, № 2. 314. (1963).
- [26] Свешников А.Г. // Докл. АН СССР. **184**, № 1. 63. (1969).
- [27] Свешников А.Г., Ильинский А.С. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **11**, № 4. 960. (1971).
- [28] Свешников А.Г., Ильинский А.С., Павлов А.Л. // Радиотехн. и электроника. **17**, № 7. 1387. (1972).
- [29] Павлов А.Л. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **14**, № 2. 509. (1974).
- [30] Ильинский А.С. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **14**, № 4. 1063. (1974).
- [31] Свешников А.Г. // Докл. АН СССР. **236**, № 5. 1076. (1977).
- [32] Копенкин А.Н., Кураев А.А., Слепян А.Я., Слепян Г.Я., Черепенин В.А. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **27**, № 12. 1894. (1987).
- [33] Альховский Э.А., Асафьев В.И., Ильинский А.С., Цибизов Н.К. // Радиотехн. и электроника. **32**, № 5. 1103. (1987).
- [34] Быков А.А. // Изв. ВУЗов, Радиофизика. **25**, № 6. 695. (1982).
- [35] Mir G. // J. Engeneering Math. **12**, N 2. 157. (1978).
- [36] Mei K.K. // J. Electromagnetic waves, Appl. **1**, N 3. 201. (1987).
- [37] Moharam M.G., Gaylord T.K. // J. Optical Soc. of America, Part A. **3**, N 11. 1780. (1986).
- [38] Быков А.А. // Докл. АН СССР. **251**, № 5. 1040. (1980).
- [39] Быков А.А. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **29**, № 3. 355. (1989).
- [40] Быков А.А. Computer modeling in electrodynamics: Galerkin method. 6-я Международная конференция Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации (ARMIMP-2013), Proceedings, ИРЭ РАН, С.24.
- [41] Гавурин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1971.
- [42] Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966.
- [43] Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
- [44] Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
- [45] Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1979.
- [46] Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990.
- [47] Дубровин Б.А., Новиков С.Н., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1986.
- [48] Беллман Р., Энджел Э. Динамическое программирование и уравнения в частных производных. М.: Мир, 1974.
- [49] Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968.

A. G. Sveshnikov's works in the numerical methods for the irregular waveguides design

A. A. Bykov

*Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia
E-mail: abykovmsu@mail.com*

In a series of works by Professor A.G.Sveshnikov in 1963 a mathematical model of the propagation of electromagnetic waves inside a metal waveguide with a complex shape boundary was formulated. This model is based and substantiated on the modified Galerkin method. Later it was named al the incomplete Galerkin method. The solution of the boundary value problem is presented in the form of a linear combination of coordinate functions of the cross-section, the complete set of which is found from the eigenvalues-eigenvectors-problem inside the cross-section of the waveguide. The coefficients of the linear combination depend on the longitudinal coordinate. They are found from the condition of orthogonality of the discrepancy to the system of projection functions. In case of the Galerkin method, the set of the projection functions is equal to the set of coordinate functions (also cross-section depended). A boundary value problem for a system of linear ordinary differential equations of the second order is obtained as the result of the application of projection relations of orthogonality and boundary conditions of radiation in infinite regions. We show that the method created 60 years ago at the Department of Mathematics of the Faculty of Physics of Moscow State University is still relevant today. The increased capabilities of computers, mathematical and programming tools make it possible to significantly expand the class of problems that are effectively solved using the incomplete Galerkin method. We present the results of solving one problem of optimizing a waveguide transformer in a loaded waveguide using an incomplete Galerkin method.

PACS: 84.40.Az.

Keywords: waveguide, scattering, transformer, optimization, Galerkin method, works of A.G. Sveshnikov.

Received 06 June 2023.

Сведения об авторе

Быков Алексей Александрович — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: abykovmsu@mail.com.