

Решение стационарной задачи распространения ГКЛ с анизотропным тензором диффузии

В.Д. Борисов^{1,*}, В.О. Юровский^{1,†}, И.А. Кудряшов^{2,‡}

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

²Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д.В. Скобельцына (НИИЯФ МГУ)
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Поступила в редакцию 30.05.2023; подписана в печать 21.09.2023)

Статья посвящена решению обратной задачи распространения галактических космических лучей (ГКЛ) от близкого источника (сверхновой) до наблюдателя посредством построения модели транспорта космических лучей с анизотропным тензором диффузии. Рассмотрена модель вклада точечного источника в фоновый спектр космических лучей, по лучшему подобию для χ^2 проведена аппроксимация наблюдаемых спектров протонов по данным NUCLEON, CALET и DAMPE. По оцененным расстояниям представлена возможная интерпретация колена КЛ (космических лучей) в области 10 ТэВ. Сделано предположение о возможных кандидатах, вызывающих изменение наблюдаемого спектра.

PACS: 13.85.Tr.

УДК: 524.1-65.

Ключевые слова: космические лучи, диффузия, близкий источник, колено космических лучей.

ВВЕДЕНИЕ

Последние результаты экспериментов в физике космических лучей, такие как NUCLEON [1], CALET [2] и DAMPE [3], а также и более ранние исследования [4] указывают на изменение показателя наклона спектра в области 10^{13} эВ (малое колено КЛ). Данное отклонение может быть объяснено рядом особенностей: вкладом спектра остатка близкой сверхновой в фоновый спектр, а также диффузионным транспортом ГКЛ в неоднородном магнитном поле Галактики.

В работе приведено решение стационарной задачи диффузионного транспорта в приближении анизотропной диффузии в Галактике для различных видов тензора диффузии, а также создана математическая модель распространения потока космических лучей от близкого источника, основанная на решении данной задачи. Проведена аппроксимация свободных параметров модели по экспериментальным данным и построена область для наиболее вероятного положения такого источника.

1. МОДЕЛЬ ТРАНСПОРТА

Заряженные частицы КЛ эффективно рассеиваются на турбулентных магнитных неоднородностях, волновой вектор \mathbf{k} которых удовлетворяет условию $|\mathbf{k}| = 2\pi/r_g$ [5], где r_g — гирорадиус частицы с зарядом Ze и импульсом p в магнитном поле величиной B равен $r_g = \frac{p}{ZeB} = \frac{R}{cB}$, где R — магнитная жесткость частицы и c — скорость света в вакууме.

В результате, движение частиц КЛ в Галактике представляет собой случайное изменение направления. Его можно рассматривать как марковский процесс, в котором частица «забывает» о своем первоначальном направлении движения на масштабе траектории, равном пробегу рассеяния $\lambda(R)$. В таком случае скорость диффузии будет определяться коэффициентами в тензоре.

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} D_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & D_{zz} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Диагональные коэффициенты тензора диффузии получены в [6] и имеют вид:

$$D_{xx} = 7.995 \cdot 10^{24} \cdot R^{-0.0061} / (3.068 \cdot 10^{16})^2, \text{ пк}^2/\text{с},$$

$$D_{yy} = 7.196 \cdot 10^{24} \cdot R^{-0.0155} / (3.068 \cdot 10^{16})^2, \text{ пк}^2/\text{с},$$

$$D_{zz} = 4.881 \cdot 10^{30} \cdot R^{-1.034} / (3.068 \cdot 10^{16})^2, \text{ пк}^2/\text{с}.$$

В простейшем случае диффузия КЛ описывается однородной (в иностранной литературе «leaky-box») моделью, т. е. моделью [7], где перенос частиц определяется средним временем истекания из Галактики, при этом диффузия является изотропной по всем направлениям. Предполагается, что концентрация КЛ в Галактике постоянна, их убывание происходит за счет истекания из Галактики, а восполнение — за счет образования в источниках (сверхновых). В данной работе рассматривается постепенное усложнение Leaky box model, заключающееся в приближении анизотропной диффузии. Тогда диффузионное уравнение в предположении, что источник точечный можно записать в виде [8]:

$$\nabla \hat{D} \nabla f = A \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (2)$$

* borisov.vd19@physics.msu.ru

† yrovskyvladimir@gmail.com

‡ ilya.kudryashov.85@gmail.com

где \hat{D} определяется выражением (1), f — поток от источника, \mathbf{r} — радиус-вектор частицы, A — коэффициент пропорциональности.

В расчетах использовались следующие параметры диска Галактики: цилиндр с диаметром $a \approx 30000$ пк и толщиной $h \approx 1000$ пк. При этом h — толщина диска без гало, т.к. в случае анизотропной диффузии тензор (1) на границе диск-гало терпит разрыв, и в рассматриваемой модели данная особенность приводит к неправильным результатам [9]. Магнитное поле Галактики состоит из регулярной и турбулентной компонент, при этом случайная составляющая турбулентного магнитного поля Галактики характеризуется максимальным масштабом $L = 300$ пк [10]. Для поля величины $B \sim 3$ мкГс гирорадиус протона с энергией 10 ГэВ составляет примерно 1 а.е. (характерное расстояние от Земли до Солнца), при энергии 10 ТэВ — примерно 1000 а.е. В свою очередь характерное время жизни КЛ в Галактике в приведенном диапазоне энергий существенно зависит от рассматриваемой модели, так в модели с гало это $T_T = 10^8$ лет, а в дисковой модели, рассматриваемой в данной статье $T_D = 3 \cdot 10^6$ лет [11]. Наша солнечная система расположена на сравнительно большом расстоянии от центра Галактики, и в отсутствии диффузии должно было бы наблюдаться существенное превышение потока КЛ из центра Галактики над потоком с противоположного направления. Однако данный эффект не наблюдается, что является следствием сильного «перемешивания» КЛ при их распространении от источников возникновения [5]. Наблюдаемое соотношение легких ($Z=3\div 5$) и средних ядер ($Z=6\div 9$) с энергией, превышающей 3 ГэВ/нуклон, составляет $N_L/N_M = 0.3$ [5]. Так как легкие ядра не образуются в звездах в цепочках термоядерного синтеза, то, следовательно, они должны образовываться при взаимодействии частиц КЛ со средой. При этом КЛ должны пройти достаточную толщу вещества 5–10 г/см² [12], в то время, как при пересечении Галактики по прямой (при отсутствии диффузии) эта толща вещества составила бы всего $x = 0.83$ г/см² [11]. Таким образом, можно говорить о диффузионном распространении КЛ.

В (2) сделаем замену переменных $\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = f(\sqrt{D_{par}x}, \sqrt{D_{par}y}, \sqrt{D_{\perp}z})$ и разобьем функцию f на $g(z) \cdot h(x, y)$. В данном приближении будем считать, что если частица покидает область диска Галактики, то вернуться она уже не может и, следовательно, при условии равенства нулю потоков на всей поверхности уравнение примет вид:

$$\Delta \tilde{f} = -\frac{1}{D_{par} \cdot D_{\perp}} \delta(\tilde{r} - \tilde{r}_0). \quad (3)$$

Для цилиндрических координат согласно [13, 14] получим:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \tilde{f}(r, r_0)}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{f}(r, r_0)}{\partial z^2} = 0, & 0 < \rho < a, \\ \tilde{f}|_S = 0, & r, r_0 \in \Omega, \end{cases} \quad (4)$$

где Ω — цилиндрическая область, а ρ и z — соответствующие координаты, $D_{\perp} = D_{xx} = D_{yy}$ — коэффициент тензора диффузии для плоскости диска, $D_{par} = D_{zz}$.

Тогда задача сводится к стандартной задаче определения потенциала заряда в проводящем заземленном цилиндре, и решение уравнения имеет вид:

$$\tilde{f} = \frac{1}{4\pi} \sum_{s=0}^{\infty} (\rho - \rho') \cdot \cos(s(\phi - \phi_0)) \times \int_0^{\infty} e^{-k(z-z_0)} \cdot J_s(kb) J_s(k\rho) dk, \quad (5)$$

где J_s — цилиндрические функции, источник расположен в точке $\rho = b, \phi = \phi_0, k = \frac{x_n}{a}, n = 1, 2, 3, \dots$.

Аналитическое восстановление f по \tilde{f} представляется невозможным, поэтому на данном этапе мы допускаем упрощение поставленной задачи, и система (4) переписывается с граничными условиями $\tilde{f}|_{r \rightarrow \infty} = 0$.

Тогда, возвращаясь к старым координатам, получим:

$$f \approx \frac{1}{\sqrt{D_{xx}} \cdot D_{zz} \cdot \sqrt{\frac{(x-x_0)^2}{D_{xx}} + \frac{(y-y_0)^2}{D_{yy}} + \frac{(z-z_0)^2}{D_{zz}}}}. \quad (6)$$

Предположим, что распределение источников в диске происходит по закону Гаусса $g(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}}$, а в перпендикулярном к нему направлении равномерно $\tilde{g}(z) = const$, здесь σ_x, σ_y — дисперсии соответствующих координат [15]. Для фиксированных показателей наклона спектра γ в постановке задачи (4) проводилось численное интегрирование для полного потока КЛ Φ :

$$\Phi = \int_V \frac{\tilde{g}(z) \cdot g(x, y) \cdot E^{\gamma}}{\sqrt{D_{xx}} \cdot D_{zz} \cdot \sqrt{\frac{(x-x_0)^2}{D_{xx}} + \frac{(y-y_0)^2}{D_{yy}} + \frac{(z-z_0)^2}{D_{zz}}}} dV \quad (7)$$

Полученный результат представлен на рис. 1.

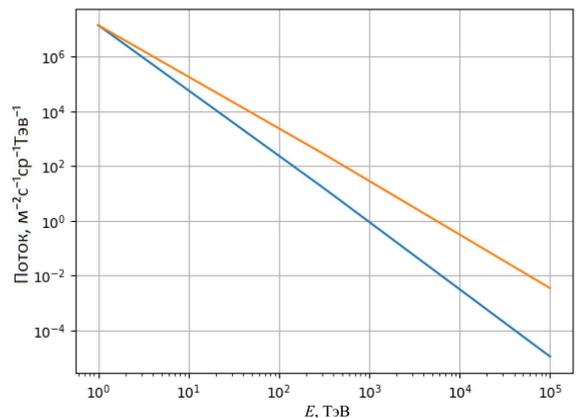


Рис. 1. Вид энергетического спектра космических лучей в диапазоне 1 ТэВ–100 ПэВ

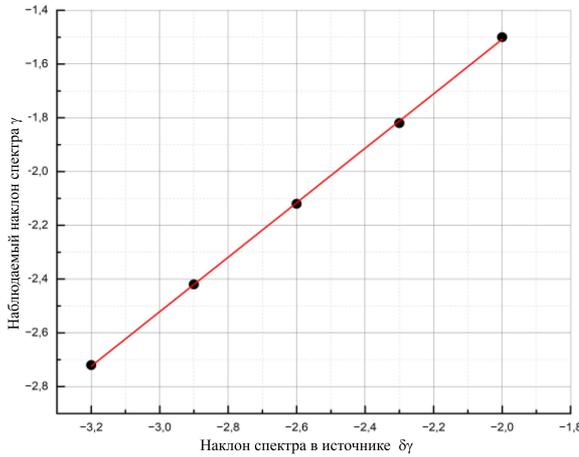


Рис. 2. Зависимость показателя наклона наблюдаемого спектра от показателя наклона спектра в источнике

Здесь оранжевым цветом отмечен наблюдаемый энергетический спектр Фс показателем $\gamma = -2.7$, а синим с $\gamma = -2.9$.

В большинстве программных пакетов таких, как GALPROP [16], PICARD [17] или DRAGON2 [18] численное решение из-за использования разностной схемы возможно только в прямом случае в изотропном приближении, при этом данные программные пакеты либо не решают обратную задачу распространения ГКЛ (PICARD), либо требуют большие вычислительные мощности (GALPROP), что в случае замены изотропного тензора на анизотропный многократно увеличивает время вычислений. В нашей модели, после расчета потока Φ решалась обратная задача, заключающаяся в восстановлении спектра в источнике по наблюдаемому спектру: для каждого значения γ в диапазоне от $\gamma = -3.2$ до $\gamma = -2.0$ определено значение наклона спектра от спектра в источнике и построена зависимость, которая хорошо аппроксимируется линейной функцией. После чего определено наилучшее значение для γ , которое использовано в модели близкого источника для определения кандидата, вызывающего изменение наблюдаемого спектра. Зависимость наблюдаемого наклона спектра от спектра в источнике для протонов при различных показателях γ представлена на рис. 2.

2. МОДЕЛЬ БЛИЗКОГО ИСТОЧНИКА

Из ранее опубликованных работ [6] следует, что математическая модель потока КЛ строится как сумма покомпонентного вклада фона и источника:

$$F_{sum} = F_{bgr}(R) + F(R), \quad (8)$$

где R — магнитная жесткость. В качестве фона была выбрана простая степенная зависимость

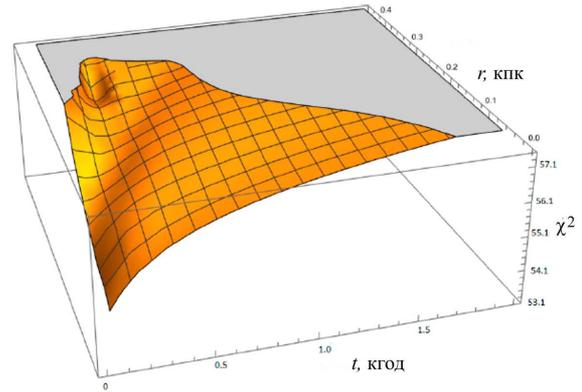


Рис. 3. Определение наиболее вероятного положения источника для $\gamma = -3.1$

$F_{bgr}(R) = a_0 R^{-\gamma}$, где параметры a_0 и γ брались из данных экспериментов NUCLEON [1], ATIC [19], AMS [4] и DAMPE [3] по протонам в области 50–3000 ГэВ (область до излома). Спектр в источнике в таком случае задается двойным степенным законом с изломом и сшивкой функций в точке излома [20]. Функция источника примет вид:

$$Q_i(R, r, t) = R^{-\gamma} \left(1 + \left(\frac{R}{R_{max}} \right)^\omega \right)^{-\delta\gamma/\omega} \times \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{t} - \mathbf{t}_0), \quad (9)$$

где γ — показатель спектра до излома, $\delta\gamma$ — разница в показателях спектров до и после излома, ω — коэффициент сглаживания излома, R_{max} — положение излома.

Тогда для близкого источника при введении $Q(R, r, t)$ можно записать классическое диффузионное уравнение:

$$\frac{\partial N(R)}{\partial t} - \nabla \cdot (\hat{D} \nabla N) = Q(R, r, t), \quad (10)$$

где N — концентрация КЛ, \hat{D} — диагональный тензор диффузии, вычисляемый по формуле (1).

Для решения уравнения (10) введем функцию Грина [21, 22], тогда в анизотропном случае получим:

$$G(D_\alpha, D_\perp, r, t) = \frac{\exp\left[\frac{-r(\alpha)^2}{4D_\alpha \cdot t}\right]}{(4\pi \cdot D_\alpha \cdot t)^{3/2}} \cdot \frac{\exp\left[\frac{-r(z)^2}{4D_\perp \cdot t}\right]}{(4\pi \cdot D_\perp \cdot t)^{3/2}}. \quad (11)$$

Здесь брались диффузионные коэффициенты в плоскости диска Галактики D_α и перпендикулярно к нему $D_\perp = D_{zz}$, подробное описание модели приведено в п. 1. Отметим, что свертка интеграла с δ -функцией дает значение интересующего нас выражения [23], поэтому интеграла в формуле (11) нет. Так

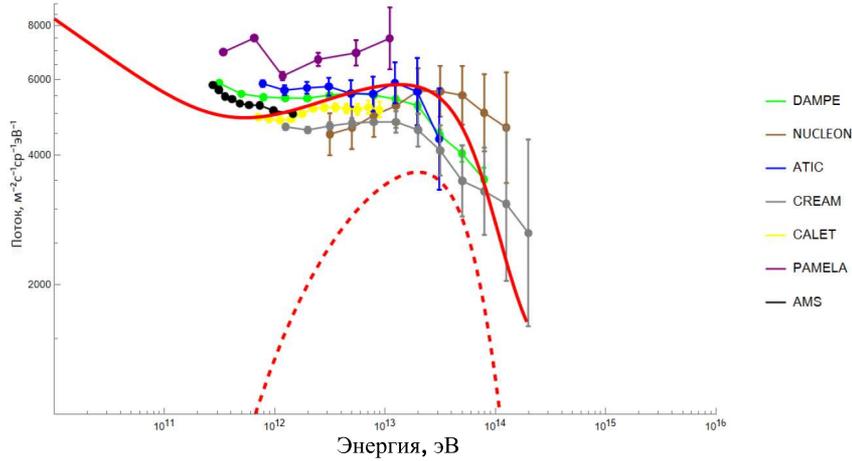


Рис. 4. Аппроксимация экспериментальных данных: красная пунктирная линия – наблюдаемый вклад близкого источника Vela Junior, красная сплошная линия – суперпозиция фона и спектра источника, определяемая выражением (8)

как поток от мгновенного точечного источника с заданной магнитной жесткостью R выражается функцией Грина уравнения диффузии, то поток космических лучей F , удовлетворяющий уравнению (10) для точечного источника в приближении мгновенной вспышки со спектром $Q_i(R, r, t)$, вычисляется как:

$$F(R, r, t) = (c/4\pi) \cdot G(D_\alpha, D_\perp, r, t) \cdot Q_i(R, r, t). \quad (12)$$

1.2. Аппроксимация экспериментальных данных

Для дальнейшего определения потенциального близкого источника, вносящего изменение в наблюдаемый спектр, необходимо определить параметры, такие, как расстояние до него и энергию взрыва. Для этого уравнение (12) аппроксимировалось по свободным параметрам методом градиентного спуска для нахождения наиболее вероятного положения источника. Свободными параметрами являлись возраст источника, его продольная и поперечная составляющие координаты (радиус-вектор источника). Этот этап осуществлен с использованием стандартных пакетов Wolfram Mathematica.

На рис. 3 видна общая структура поверхности, описывающей нормированную вероятность: по оси абсцисс отложен возраст источника t в кгодах, по оси ординат расстояние до источника r в кпк, а по оси аппликата $\chi^2 = \sum_i [(f_i^{mod} - F_i) / \sigma_i]^2$, здесь f_i^{mod} – вклад модельных спектров, F_i – точки экспериментальных спектров, σ_i – соответствующие ошибки. Определено наиболее вероятное положение источника: оно лежит в интервале от 0.2 до 0.7 кпс. Для определения кандидата был рассмотрен каталог гамма-пульсаров по данным эксперимента Fermi-LAT [24] а также каталог

радио-пульсаров ATNF [25]. Так как расстояние и возраст определены довольно неточно, то в своих расчетах мы пользовались минимальными оценками расстояния до каждого источника для того, чтобы оценить максимально возможный его вклад.

Лучшим кандидатом является сверхновая Vela Junior (G266.2-1.2, RX J0852.0-4622), что согласуется с ранее опубликованными работами [26]. Далее, по определенным параметрам R, r, t для данного источника проводилась аппроксимация экспериментальных данных по протонам в предположении (8). Данные результаты представлены на рис. 4.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Численно была решена обратная задача распространения ГКЛ. На основании предложенной модели и экспериментальных данных был оценен наклон спектра в источнике в приближении анизотропной диффузии.
2. Были аппроксимированы экспериментальные данные NUCLEON, CALET, DAMPE и др. по протонам в области 10 ТэВ моделью близкого источника по лучшему фиту для χ_i^2 в случае анизотропного тензора.
3. Поиск кандидатов на роль близкого источника, определяющего форму малого колена в спектре протонов, показал, что кандидатом, подходящим по возрасту и расстоянию, является остаток сверхновой Vela Junior (при минимальной оценке расстояния) при этом построенная модель довольно хорошо описывает экспериментальные данные.

- [1] *Аткин Е., Булатов В., Дорохов В.* и др. // Письма в ЖЭТФ. **108**, № 1. 5 (2018) (*Atkin E., Bulatov V., Dorokhov V.* et al. // JETP Lett. **108**. N 1. 513. (2018)).
- [2] *Adriani O.* et al. (CALET Collaboration) // Phys. Rev. Lett. **122**, N 18. Art. N 181102. (2019).
- [3] DAMPE Collaboration // Nature. **552**, N 7683. 63. (2017).
- [4] *Aguilar M.* // Phys. Rev. Lett. **114**, N 17. Art. N 171103. (2015).
- [5] *Березинский В.С., Буланов С.В., Догель В.А.* и др. Астрофизика космических лучей. М.: Наука, 1990.
- [6] *Yurovsky O., Kudryashov I.A.* // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. **1**. (2023).
- [7] *Ginzburg V.L., Ptuskin V.S.* // Rev. Mod. Phys. **48**. 161. (1976).
- [8] *Strong A.W., Moskalenko I.V., Ptuskin V.S.* // Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **57**. 285. (2007).
- [9] *Pranab J. Deka, Kissmann R., Einkemmer L.* Efficient numerical methods for Anisotropic Diffusion of Galactic Cosmic Rays. arXiv:2307.12276. (2023).
- [10] *Giacinti G., Sigl G.* Local Magnetic Turbulence and TeV-PeV Cosmic Ray Anisotropies // arXiv:1111.2536v1 2011.
- [11] *Гинзбург В.Л.* Астрофизика космических лучей. М.: Наука, 1990.
- [12] *Ишханов Б.С., Капитонов И.М., Тутынь И.А.* Нуклеосинтез во Вселенной. (Основные этапы развития Вселенной от момента Большого Взрыва). М.: URSS, 2019.
- [13] *Ptuskin V.S., Strelnikova O.N., Sveshnikova L.G.* // Astroparticle physics. **31**, N 4. 284. (2009).
- [14] *Панов А.Д., Адамс Д.Х. мл., Ан Х.С.* и др. // Изв. РАН. Сер. физ. **73**, № 5. 602 (2009). (*Panov A.D., Adams J.H., Ahn H.S.* et al. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. **73**, N 5. 564. (2009).)
- [15] *Case G., Bhattacharya.* // A&A Supplement. Ser.120. 437. (1996).
- [16] *Strong A.W., Moskalenko I.* // Astrophys. J. **509**. 212. (1998).
- [17] *Kissmann R.* // Astropart. Phys. **55**. 37. (2014).
- [18] *Vittino A., Evoli C., Gaggero D.* // Nucl. Part. Phys. Proc. **297-299**. 135. (2018).
- [19] *Ahn H.S., Seo E., Adams J., Bashindzhagyan G.* // Advances in Space Research. **37**(10). (2004).
- [20] *Huandel J.R.* // Astroparticle Physics. **19**, 193 (2003).
- [21] *Kudryashov I.A., Kovalev I.M., Kurganov A.A.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. **85**, N 4. 379. (2021).
- [22] *Yurovsky V.O., Peryatinskaya A.I., Borisov V.D., Kudryashov I.A.* Numerical study of GCR proton transport, Proceedings of 38th International Cosmic Ray Conference. PoS(ICRC2023), 2023.
- [23] *Мамвеев Л.В.* Неклассические процессы переноса в сильно неоднородных средах: диссертация доктора физико-математических наук: 01.04.14 Москва, 2016. 220 с.
- [24] *Abdo A.A.* and Fermi LAT Collaboration. // Astroph/0910.1608v1.
- [25] *Manchester R.N., Hobbs G.B., Teoh A., Hobbs M.* The ATNF Pulsar Catalogue. astro-ph/0412641v1.
- [26] *Sveshnikova L.G., Strelnikova O.N., Ptuskin V.S.* // Proceedings of 32 ICRC, Beijing, China. **6**. 184. (2011).

Solution of the stationary problem of GCR propagation with an anisotropic diffusion tensor

V.D. Borisov^{1,a}, V.O. Yurovsky^{1,b}, I.A. Kudryashov^{2,c}

¹Lomonosov Moscow State University Faculty of Physics, Moscow 119991, Russia

²Lomonosov Moscow State University, Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, Moscow 119234, Russia
E-mail: ^aborisov.vd19@physics.msu.ru, ^byurovskyvladimir@gmail.com, ^cilya.kudryashov.85@gmail.com

The article is concerned with the inverse problem solution of the propagation of galactic cosmic rays (GCR) from a close source (supernova) to an observer by means of constructing a model of cosmic ray transport with an anisotropic diffusion tensor. A model of the contribution of a point source to the background spectrum of cosmic rays is considered. The best fit for the approximation of the observed proton spectra according to the data from NUCLEON, CALET, and DAMPE was determined. According to the estimated distances, a possible interpretation of the CR (cosmic ray) knee in the region of 10 TeV is presented. An assumption is made about possible candidates causing a change in the observed spectrum.

PACS: 13.85.Tr.

Keywords: Cosmic rays, diffusion, close source, cosmic ray knee.

Received 30 may 2023.

Сведения об авторах

1. Борисов Владислав Дмитриевич — студент; e-mail: borisov.vd19@physics.msu.ru.
2. Юровский Владимир Олегович — студент; e-mail: yurovskyvladimir@gmail.com.
3. Кудряшов Илья Анатольевич — канд. физ.-мат. наук, науч. сотр; e-mail: ilya.kudryashov.85@gmail.com.