Релятивистское описание спектров масс четырежды тяжёлых тетракварков

В. О. Галкин,[1*] Е. М. Савченко[1,2†]
[1]*Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук Россия, 119333, Москва, ул. Вавилова, д. 40*
[2]*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой теории и физики высоких энергий Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2*
(Поступила в редакцию 31.05.2023; подписана в печать 04.07.2023)

На основе релятивистской дикварк-антидикварковой картины тетракварков рассчитаны массы основных и возбуждённых состояний четырежды тяжёлых тетракварков с открытыми очарованием и/или прелестью. В рамках квазипотенциального подхода построен релятивистский потенциал взаимодействия дикварка и антидикварка с учётом зависящих и не зависящих от спинов вкладов. Установлено, что в рассматриваемых несимметричных по составу системах возникает значительное смешивание состояний тетракварков с одинаковыми квантовыми числами, но разными полными спинами тетракварка. Проведено сравнение предсказываемых значений масс таких тетракварков с порогами развала на пару тяжёлых мезонов. Обсуждена возможность экспериментального наблюдения таких тетракварков.

PACS: 12.39.Ki, 14.40.Lb, 14.40.Nd, 14.40.Rt УДК: 539.126.4
Ключевые слова: кварк, дикварк, тетракварк, релятивистская кварковая модель.

ВВЕДЕНИЕ

Возможность существования адронов с содержанием валентных кварков и антикварков отличным от пары кварк-антикварк для мезонов и трёх кварков для барионов, рассматривалась с первых дней существования кварковой модели. Тем не менее, отсутствие убедительных экспериментальных доказательств существования таких многокварковых состояний снижало интерес к их исследованию. Однако в последние два десятилетия ситуация кардинально изменилась и первые явные экспериментальные доказательства существования таких экзотических адронов были, наконец, получены (см. недавние обзоры [1–6] и ссылки в них). В настоящее время обнаружено несколько десятков, как, пока что, лишь кандидатов, так и уже достоверно подтверждённых тетракварков $qq\bar{q}\bar{q}$ ($cq_1\bar{c}\bar{q}_2$ ($q_{1,2} = u, d, s$) — чармониеподобные $X, Y, Z^{\pm}$ состояния: $cs\bar{c}\bar{s}$ — LHCb 2017 [7] и др. (см. [5]); $cc\bar{u}\bar{d}$ — T^{+}_{cc}: LHCb 2021 [8]; $cc\bar{c}\bar{c}$ — X(6900): LHCb 2020 [9], CMS 2022 [10], ATLAS 2022 [11] и т.д.) и пентакварков $qqqq\bar{q}$ ($uudc\bar{c}$ — $P^{+}_{c}(4380)$, $P^{+}_{c}(4450)$: LHCb 2015 [12]). Наиболее свежий подробный обзор состояния дел в данной области можно найти в работе [13].

В литературе в настоящее время нет единого мнения о природе экспериментально наблюдаемых состояний с экзотическими свойствами. Так для четырёхкварковых состояний были предложены существенно различающиеся интерпретации: компактный тетракварк (экзотический адрон), состоящий из дикварка и антидикварка, связанных сильными взаимодействиями; молекула, состоящая из двух мезонов, слабосвязанных мезонным обменом; адрокварконий, состоящий из тяжёлого кваркония, встроенного в лёгкий мезон; кинематический касп и т.д. Выбор предпочтительного описания является очень сложной экспериментальной задачей.

Простейшей экзотической системой является тетракварк, состоящий из двух кварков и двух антикварков. Тяжёлые тетракварки представляют особый интерес, поскольку присутствие тяжёлого кварка увеличивает энергию связи связанной системы и, как следствие, вероятность того, что массы таких тетракварков будут ниже порогов распада на мезоны с открытыми или скрытыми тяжёлыми ароматами. В этом случае сильные распады, протекающие через перегруппировку кварков и антикварков, кинематически запрещены. Тогда соответствующие тетракварки могут распадаться только за счёт слабых или электромагнитных взаимодействий, и, следовательно, они должны иметь узкую ширину распада. Если предсказанные тетракварки имеют массы, незначительно (на несколько МэВ) превышающие эти пороговые значения, то их также можно наблюдать как резонансы. Возбуждённые состояния тетракварков, несмотря на большое фазовое пространство, также могут быть узкими резонансами, поскольку их распады будут подавлены либо центробежным барьером между кварками и антикварками орбитально возбуждённых состояний, либо узлами волновой функции радиально возбуждённых состояний, или даже и тем и другим одновременно.

Объектом наших исследований являются четырежды тяжёлые (содержащие только тяжёлые кварки) тетракварки. Такой выбор существенно сокращает число подходов, применимых для их описания. На данный момент уже имеется ряд теоретических расчётов в рамках самых разных моделей, однако в них нет единодушия и относительно того, какие из предсказываемых состояний являются достаточно долгоживущими для

* galkin@ccas.ru
† savchenko.em16@physics.msu.ru

их экспериментального обнаружения.

Экспериментально поиски четырежды тяжёлых тетракварков активно ведутся на Большом Адронном Коллайдере LHC. Определённые успехи уже достигнуты: Коллаборации LHCb [9] CMS [10] и ATLAS [11] достоверно обнаружили уже упомянутый четырежды очарованный тетракварк $cc\bar{c}\bar{c}$ (резонанс X(6900) и др.), масса которого согласуется с нашими недавними предсказаниями [14–17]. С другой стороны, продолжительные поиски четырежды прелестного тетракварка $bb\bar{b}\bar{b}$ Коллаборациями LHCb [18] и CMS [19, 20] пока не дали никаких результатов (что, в принципе, также согласуется с нашими предсказаниями). Тем не менее, поиски этих и других возможных составов продолжаются.

Настоящая работа организована следующим образом. В разд. 1 дано описание и физическое обоснование выбранной нами модели, в рамках которой производятся исследования данной четырёхкварковой структуры. В разд. 2 описана Релятивистская Кварковая Модель и её применение к задаче расчёта спектров масс тетракварков. В разд. 3 приведены результаты наших вычислений и их анализ, а именно сравнение вычисленных нами масс с порогами распадов на пары тяжёлых мезонов. В заключении подведены итоги.

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Тетракварк — это связанная система двух кварков и двух антикварков: $q_1q_2\bar{q}_3\bar{q}_4$. Существует 6 ароматов (флейворов) кварков, и их можно разделить на две группы в зависимости от значения их токовых масс [21]:

- лёгкие — $m_q \ll \Lambda_{\text{КХД}}$ ($\Lambda_{\text{КХД}} \approx 200$ МэВ — энергия конфайнмента кварков):

$$m_u = 2.16^{+0.49}_{-0.26} \ \text{МэВ},$$
$$m_d = 4.67^{+0.48}_{-0.17} \ \text{МэВ},$$
$$m_s = 93.4^{+8.6}_{-3.4} \ \text{МэВ};$$

- тяжёлые — $m_Q \gg \Lambda_{\text{КХД}}$:

$$m_c = 1.27 \pm 0.02 \ \text{ГэВ},$$
$$m_b = 4.18^{+0.03}_{-0.02} \ \text{ГэВ},$$
$$m_t = 172.69 \pm 0.30 \ \text{ГэВ}.$$

Сосредоточимся на исследовании тетракварков, состоящих из четырёх тяжёлых кварков. Однако не будем рассматривать t-кварк как один из возможных конституентов. Дело в том, что он на порядок тяжелее всех прочих кварков, и, вследствие своей колоссальной массы, он слишком быстро распадается за счёт слабого взаимодействия, не успевая сформировать связанное состояние [22].

Из двух тяжёлых флейворов кварков и антикварков можно составить 9 комбинаций:

- 3 симметричные (со скрытым очарованием и/или прелестью):
  - четырежды очарованный $cc\bar{c}\bar{c}$,
  - дважды очарованный-прелестный $cb\bar{c}\bar{b}$,
  - четырежды прелестный $bb\bar{b}\bar{b}$;
- 6 несимметричных (с открытым очарованием и/или прелестью):
  - трижды очарованный единожды прелестный $cc\bar{c}\bar{b}$, $bc\bar{c}\bar{c}$,
  - дважды очарованный дважды прелестный $cc\bar{b}\bar{b}$, $bb\bar{c}\bar{c}$,
  - трижды прелестный единожды очарованный $bb\bar{b}\bar{c}$, $cb\bar{b}\bar{b}$.

Расчёты для основных состояний всех составов [14, 15] и возбуждённых состояний симметричных составов [16, 17] были проделаны в предыдущих работах. В данной работе проведём исследования возбуждённых состояний несимметричных составов.

Будем работать в дикварк-антидикварковой картине, в рамках которой тетракварк рассматривается как связанное состояние двух ненаблюдаемых цветных структур: дикварка $[Q_1Q_2]$ и антидикварка $[\bar{Q}_3\bar{Q}_4]$. Такая модель далеко не нова и широко применяется в спектроскопии адронов, давая хорошее согласие расчётов (например, масс барионов) с экспериментами. Также же достоинством такой интерпретации является и тот факт, что теоретически предсказываемый спектр возбуждений в барионах в отсутствие такой модели гораздо шире экспериментально наблюдаемого, а кварк-дикварковая модель барионов накладывает необходимые ограничения, приводящие теорию в согласие с экспериментом [23, 24].

Другой широко используемой моделью описания четырёхкварковых состояний является мезон-мезонная молекулярная картина. Объясним, почему считаем её применение именно к четырежды тяжёлым тетракваркам неоправданным. В контексте тяжёлых кварков у модели мезонной молекулы есть две проблемы: слабая связь и ограничения на состав. Действительно, связь между мезонами в молекуле осуществляется либо за счёт сил Ван-дер-Ваальса, либо посредством обмена ещё одним мезоном, содержащим те же кварки, что и в отдельных частях молекулы (например, в молекуле $(Q_1\bar{Q}_3)(Q_2\bar{Q}_4)$ возможен обмен мезонами вида $Q_1\bar{Q}_4$ и $Q_2\bar{Q}_3$). Силы Ван-дер-Ваальса в принципе слабы и не могу обеспечить достаточного связывания. В случае же мезонного обмена в четырежды тяжёлой молекуле обменными могут быть только тяжёлые мезоны: $c\bar{c}$, $c\bar{b}$, $b\bar{c}$, $b\bar{b}$. Такая связь описывается потенциалом Юкавы, сила которого убывает с ростом массы мезона-переносчика:

$$V(r) = -g\frac{e^{-mr}}{r}. \tag{1}$$

Поэтому в случае обмена лёгкими мезонами ($\mathrm{m}_{\pi^\pm} = 139.57$ МэВ [21]), которые осуществляют связь в лёгких и тяжёло-лёгких (не более двух тяжёлых кварков) молекулах, ещё возможна слабая связь, но в более тяжёлых молекулах мезон переносчик будет слишком массивным ($\mathrm{m}_{\min} = \mathrm{m}_{\eta_c} = 2983.9 \pm 0.4$ МэВ [21]), а связывание, как результат, недостаточным.

При вычислениях в кварк-дикварковой картине необходимо учитывать, что дикварк является системой фермионов, и поэтому подчиняется обобщённому принципу Паули — полная волновая функция дикварка должна быть антисимметрична:

$$\Psi_{\text{дикварк.}} = \psi_{\text{простр.}} \times \psi_{\text{цвет.}} \times \psi_{\text{флейв.}} \times \psi_{\text{спин.}} \equiv \Psi_{\text{антисим.}}. \quad (2)$$

Пространственная часть волновой функции определяется пространственной чётностью. Ограничимся рассмотрением основных состояний дикварков (возбуждения будут в дикварк-антидикварковой системе), в результате:

$$P_{\text{осн. сост.}} = (-1)^{L_{\text{осн. сост.}}} \equiv (-1)^0 = +1, \\ \Longrightarrow \psi_{\text{простр.}} \equiv \psi_{\text{сим.}}. \quad (3)$$

Цветовая часть волновой функции зависит от выбора цветового представления дикварка: два кварка — два цветовых триплета — в комбинации могут дать или цветовой симметричный секстет, или антисимметричный антитриплет. Проводить расчёты можно для обеих конфигураций, однако в секстетном представлении потенциал кварк-кваркового взаимодействия внутри дикварка является отталкивающим, поэтому разумно остановиться на цветовом антитриплете, что даёт:

$$\psi_{\text{цвет.}} \equiv \psi_{\text{антисим.}}. \quad (4)$$

Таким образом, оставшаяся комбинация флейворной и спиновой частей волновой функции должна быть симметрична. Это означает, что, если дикварк составлен из кварков одного аромата (симметричная флейворная часть), он может быть только аксиальновекторным (симметричная спиновая часть). Если же дикварк состоит из кварков разного аромата, он может быть как аксиальновекторным (A), так и скалярным (S).

В рассматриваемой системе скорости кварков могут доходить до половины скорости света, поэтому разумно пользоваться релятивистским подходом. Релятивистский подход означает использование релятивистской кинематики и динамики на основе Релятивистской Кварковой Модели, успешно показавшей себя при расчёте спектров масс классических трёхкварковых барионов [24] и кварк-антикварковых мезонов [25]. Предположения о виде потенциалов, параметры потенциалов и массы кварков и дикварков будем использовать фиксированные ранее. Данный подход учитывает внутреннюю структуру дикварка, то есть дикварки рассматриваются как неточечные, протяжённые пространственно объекты. Для учёта внутренней структуры дикварка его взаимодействие с глюонами будет модифицировано с помощью форм-факторов, которые рассчитываются как интегралы перекрытия волновых функций дикварков.

2. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАРКОВАЯ МОДЕЛЬ

Расчёт спектров масс несимметричных четырежды тяжёлых тетракварков проводится в рамках Релятивистской Кварковой Модели. Необходимо найти решение релятивистского квазипотенциального уравнения шрёдингеровского типа [26–28]. Это уравнение описывает связанное состояние двух частиц в заданном квазипотенциале. Для системы дикварк-антидикварк оно имеет следующий вид [29, 30]:

$$\left(\frac{b^2(M)}{2\mu_R(M)} - \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_R(M)}\right)\Psi_T(\mathbf{p}) = \\ = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p},\mathbf{q};M)\Psi_T(\mathbf{q}), \quad (5)$$

где $\mathbf{p}$ — вектор относительного импульса системы; M — масса связанного состояния (тетракварка); μ_R — релятивистская приведённая масса конституентов (дикварков):

$$\mu_R = \frac{E_a E_b}{E_a + E_b} = \frac{M^4 - (m_a^2 - m_b^2)^2}{4M^3}, \quad (6)$$

$E_{a,b}$ — энергии конституентов на энергетической поверхности:

$$E_{a,b} = \frac{M^2 - m_{b,a}^2 + m_{a,b}^2}{2M}, \quad (7)$$

$m_{a,b}$ — массы отдельных конституентов; $b^2(M)$ — квадрат относительного импульса в системе центра масс на массовой поверхности:

$$b^2(M) = \frac{[(M^2 - m_a^2 - m_b^2)^2 - 4m_a^2 m_b^2]}{4M^2} = \\ = \frac{[M^2 - (m_a + m_b)^2][M^2 - (m_a - m_b)^2]}{4M^2}; \quad (8)$$

$\Psi_T(\mathbf{p})$ — волновая функция связанного состояния; $V(\mathbf{p},\mathbf{q};M)$ — оператор квазипотенциала взаимодействия конституентов.

Уравнение (5) на первый взгляд кажется обычным уравнением Шрёдингера, но на самом деле оно релятивистское: в левой части содержится релятивистская кинематика. Возникает сложная зависимость приведённой массы конституентов μ_R (и собственного значения уравнения) от массы связанного состояния M (ур. (6)). Релятивистская динамика содержится в правой части ур. (5), в квазипотенциале $V(\mathbf{p},\mathbf{q};M)$, который строится с помощью спроектированной на состояния с положительной энергией амплитуды рассеяния вне массовой поверхности, и корректное построение которого является нашей основной задачей.

Релятивистский квазипотенциал для дикварк-антидикваркового взаимодействия состоит из взаимодействия с глюонами и запирания. Также нужно учитывать неточечность дикварков и их целочисленный спин. Таким образом, квазипотенциал принимает следующий вид [30, 31]:

$$V(\mathbf{p},\mathbf{q};M) = \underbrace{\frac{< d(\mathcal{P})|J_\mu|d(\mathcal{Q}) >}{2\sqrt{E_d}\sqrt{E_d}}\frac{4}{3}\alpha_s D^{\mu\nu}(\mathbf{k})\frac{< d'(\mathcal{P}')|J_\nu|d'(\mathcal{Q}') >}{2\sqrt{E_{d'}}\sqrt{E_{d'}}}}_{\substack{\text{дикварк-глюонное вз-вие,}\\ \text{доминирует на малых расст.}}} + \\ + \underbrace{\Psi^*_d(\mathcal{P})\Psi^*_{d'}(\mathcal{P}')[J_{d;\mu}J^\mu_{d'}V^{\text{вект.}}_{\text{конф.}}(\mathbf{k}) + V^{\text{ск.}}_{\text{конф.}}(\mathbf{k})]\Psi_d(\mathcal{Q})\Psi_{d'}(\mathcal{Q}')}_{\substack{\text{запирание,}\\ \text{доминирует на больших расст.}}}. \quad (9)$$

Опустим подробности выкладок и обсудим лишь наиболее важный аспект данного этапа решения задачи: вопрос математического учёта конечных размеров дикварка. Для этого необходимо рассчитать матричные элементы кварковых токов между дикварками $< d(\mathcal{P})|J_\mu|d(\mathcal{Q}) >$. Эти матричные элементы являются упругими (диагональными) и их можно параметризовать с помощью набора форм-факторов $h_{+,1,2,3}(k^2)$ [29].

Для скалярного дикварка:

$$< S(\mathcal{P})|J_\mu|S(\mathcal{Q}) >= h_+(k^2)(\mathcal{P}+\mathcal{Q})_\mu, \quad (10)$$

для аксиальновекторного дикварка:

$$< A(\mathcal{P})|J_\mu|A(\mathcal{Q}) >= -\left[\epsilon^*_d(\mathcal{P})\epsilon_d(\mathcal{Q})\right]h_1(k^2)(\mathcal{P}+\mathcal{Q})_\mu + \\ + h_2(k^2)\left\{\left[\epsilon^*_d(\mathcal{P})\mathcal{Q}\right]\epsilon_{d;\mu}(\mathcal{Q}) + \left[\epsilon_d(\mathcal{Q})\mathcal{P}\right]\epsilon^*_{d;\mu}(\mathcal{P})\right\} + \\ + h_3(k^2)\frac{1}{M_A^2}\left[\epsilon^*_d(\mathcal{P})\mathcal{Q}\right]\left[\epsilon_d(\mathcal{Q})\mathcal{P}\right](\mathcal{P}+\mathcal{Q})_\mu,$$

где $k = \mathcal{P} - \mathcal{Q}$; $\boldsymbol{\epsilon}_d(\mathbf{p})$ — вектор поляризации аксиальновекторного дикварка с импульсом $\mathbf{p}$:

$$\begin{cases} \epsilon_d(p) = \left(\dfrac{(\boldsymbol{\epsilon}_d\mathbf{p})}{M_d}, + \dfrac{(\epsilon_d\mathbf{p})\mathbf{p}}{M_d(M_d+E_d(p))}\right), \\ \epsilon^\mu_d(p)p_\mu = 0, \end{cases} \quad (11)$$

M_d и $E_d(p)$ — масса и энергия дикварка (M_A — масса аксиальновекторного дикварка):

$$E_d(p) = \sqrt{M_d^2 + \mathbf{p}^2}. \quad (12)$$

Расчёт [23] показывает, что:

$$\begin{cases} h_+(k^2) = h_1(k^2) = h_2(k^2) = F(\mathbf{k}^2), \\ h_3(k^2) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

где $F(\mathbf{k}^2)$ — форм-фактор в импульсном пространстве:

$$F(\mathbf{k}^2) = \frac{\sqrt{M_dE_d}}{M_d+E_d}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left\{\left[\bar\Psi_d\left(\mathbf{p}+\frac{2\varepsilon_{Q'}(p)}{M_d+E_d}\mathbf{k}\right)\sqrt{\frac{\varepsilon_Q(p)+m_Q}{\varepsilon_Q(p+k)+m_Q}}\times\left(\frac{\varepsilon_Q(p+k)+\varepsilon_Q(p)}{2\sqrt{\varepsilon_Q(p+k)\varepsilon_Q(p)}} + \right.\right.\right. \\ \left. + \frac{\mathbf{pk}}{2(\varepsilon_Q(p)+m_Q)\sqrt{\varepsilon_Q(p+k)\varepsilon_Q(p)}}\right)\Psi_d(\mathbf{p})\Bigg] + \left[\bar\Psi_d\left(\mathbf{p}+\frac{2\varepsilon_Q(p)}{M_d+E_d}\mathbf{k}\right)\sqrt{\frac{\varepsilon_{Q'}(p)+m_{Q'}}{\varepsilon_{Q'}(p+k)+m_{Q'}}}\times \right. \\ \left.\left. \times\left(\frac{\varepsilon_{Q'}(p+k)+\varepsilon_{Q'}(p)}{2\sqrt{\varepsilon_{Q'}(p+k)\varepsilon_{Q'}(p)}} + \frac{\mathbf{pk}}{2(\varepsilon_{Q'}(p)+m_{Q'})\sqrt{\varepsilon_{Q'}(p+k)\varepsilon_{Q'}(p)}}\right)\Psi_d(\mathbf{p})\right]\right\}. \quad (14)$$

Форм-фактор $F(r)$ определяется путём преобразования Фурье $\frac{F(\mathbf{k}^2)}{\mathbf{k}^2}$ и его домножения на r. Численные расчёты [29] показывают, что он с высокой точностью может быть параметризован как:

$$F(r) = 1 - e^{-\xi r - \zeta r^2}. \quad (15)$$

Окончательно получаем потенциал дикварк-антидикваркового взаимодействия [15, 31]:

$$\begin{gathered}
V(r)=\left[V_{\text{Кулон.}}(r)+V_{\text{конф.}}(r)+\frac{1}{E_1E_2}\left\{\mathbf{p}\left[V_{\text{Кулон.}}(r)+V^{\text{вект.}}_{\text{конф.}}(r)\right]\mathbf{p}-\frac{1}{4}\Delta V^{\text{вект.}}_{\text{конф.}}(r)+V'_{\text{Кулон.}}(r)\frac{\mathbf{L}^2}{2r}\right\}\right]_a+\\
+\left[\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{E_1(E_1+M_1)}+\frac{1}{E_2(E_2+M_2)}\right]\frac{V'_{\text{Кулон.}}(r)}{r}-\right.\right.\\
-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{M_1(E_1+M_1)}+\frac{1}{M_2(E_2+M_2)}\right]\frac{V'_{\text{конф.}}(r)}{r}+\frac{\mu_d}{4}\left[\frac{1}{M_1^2}+\frac{1}{M_2^2}\right]\frac{V'^{\text{вект.}}_{\text{конф.}}(r)}{r}+\\
\left.+\frac{1}{E_1E_2}\left[V'_{\text{Кулон.}}(r)+\frac{\mu_d}{4}\left(\frac{E_1}{M_1}+\frac{E_2}{M_2}\right)V'^{\text{вект.}}_{\text{конф.}}(r)\right]\frac{1}{r}\right\}_{b+}\mathbf{L}(\mathbf{S_1}+\mathbf{S_2})+\\
+\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{E_1(E_1+M_1)}-\frac{1}{E_2(E_2+M_2)}\right]\frac{V'_{\text{Кулон.}}(r)}{r}-\right.\\
-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{M_1(E_1+M_1)}-\frac{1}{M_2(E_2+M_2)}\right]\frac{V'_{\text{конф.}}(r)}{r}+\frac{\mu_d}{4}\left[\frac{1}{M_1^2}-\frac{1}{M_2^2}\right]\frac{V'^{\text{вект.}}_{\text{конф.}}(r)}{r}+\\
\left.\left.+\frac{1}{E_1E_2}\frac{\mu_d}{4}\left(\frac{E_1}{M_1}-\frac{E_2}{M_2}\right)\frac{V'^{\text{вект.}}_{\text{конф.}}(r)}{r}\right\}_{b-}\mathbf{L}(\mathbf{S_1}-\mathbf{S_2})\right]_b+\\
+\left[\frac{1}{3E_1E_2}\left\{\frac{1}{r}V'_{\text{Кулон.}}(r)-V''_{\text{Кулон.}}(r)+\frac{\mu_d^2}{4}\frac{E_1E_2}{M_1M_2}\left(\frac{1}{r}V'^{\text{вект.}}_{\text{конф.}}(r)-V''^{\text{вект.}}_{\text{конф.}}(r)\right)\right\}\times\right.\\
\left.\times\left[\frac{3}{r^2}\Big(\mathbf{S_1r}\Big)\Big(\mathbf{S_2r}\Big)-\mathbf{S_1S_2}\right]\right]_c+\left[\frac{2}{3E_1E_2}\left\{\Delta V_{\text{Кулон.}}(r)+\frac{\mu_d^2}{4}\frac{E_1E_2}{M_1M_2}\Delta V^{\text{вект.}}_{\text{конф.}}(r)\right\}\mathbf{S_1S_2}\right]_d, \qquad (16)
\end{gathered}$$

где $\mathbf{p}$ — относительный импульс системы; $M_{1,2}$ и $E_{1,2}$ — массы и энергии дикварка и антидикварка; μ_d — полный хромомагнитный момент дикварка (выбран нами равным нулю); $\mathbf{S_{1,2}}$ — спин аксиальновекторного дикварка; $\mathbf{L}$ — относительный орбитальный момент системы; $V_{\text{конф.}}$ — запирающий потенциал в нерелятивистском пределе:

$$V_{\text{конф.}}=V^{\text{вект.}}_{\text{конф.}}+V^{\text{скал.}}_{\text{конф.}}=(1-\varepsilon)(Ar+B)+\varepsilon(Ar+B), \qquad (17)$$

ε — коэффициент смешивания скалярного и векторного запирания; $V_{\text{Кулон.}}(r)$ — кулоновский потенциал одноглюонного обмена:

$$V_{\text{Кулон.}}(r)\equiv-\frac{4}{3}\alpha_s\frac{F_1(r)F_2(r)}{r}, \qquad (18)$$

$F_{1,2}(r)$ — форм-факторы, позволяющие произвести учёт размеров дикварков (ур. (15)).

В ур. (16) явно выделены спин-независимые (a) и зависящие от спина слагаемые: спин-орбитальное (b±), тензорное (c) и спин-спиновое (d) взаимодействия.

Важным отличием задачи для несимметричных составов является появление значительного смешивания состояний с одинаковым полным моментом и чётностью $\mathrm{J^P}$, но разными полными спинами S тетракварка в пределах одного возбуждения. Дело в том, что матричные элементы спин-орбитального (b+) и спин-спинового слагаемых всегда диагональны, а спин-орбитального (b−) и тензорного слагаемых — в общем случае недиагональны. В случае симметричного состава, численный множитель перед спин-орбитальным (b−) слагаемым обращается в ноль и оно эффективно в расчётах не участвует, а тензорное слагаемое вносит лишь незначительное (можно опустить) смешивание для орбитально возбуждённых состояний с $\mathrm{J^{PC}}=1^{--},2^{++}$. В случае же несимметричного состава спин-орбитальное (b−) слагаемое играет полноценную роль в расчётах.

Окончательно методика решения задачи такова: ур. (5) с квазипотенциалом (16) численно решается при фиксированных μ_R как уравнение Шрёдингера [32], после чего методом последовательных приближений [28] находятся массы тетракварков.

Все свободные параметры модели, такие как параметры запирающего потенциала A, B, коэффициент смешивания запирающего потенциала ε, константа, характеризующая аномальный хромомагнитный момент кварков κ, параметры форм-факторов ξ, ζ, массы кварков и дикварков взяты из предыдущих работ по исследованию свойств мезонов и барионов и приведены в табл. 1, 2.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Результаты расчёта спектров масс возбуждённых состояний несимметричных составов четырежды тяжёлых тетракварков приведены в табл. 3.

Таблица 1. Параметры модели [33–36]

$\mathbf{m_c}$	$\mathbf{m_b}$	**A**	**B**	ε	κ
1.55 ГэВ	4.88 ГэВ	0.18 ГэВ^2	–0.3 ГэВ	–1	–1

Таблица 2. Массы и параметры форм-факторов тяжёлых дикварков [29, 31]

$\mathbf{QQ'}$	d	$\mathbf{Q=c}$			$\mathbf{Q=b}$		
		$\mathbf{M_{cQ}}$, МэВ	$\boldsymbol{\xi}$, ГэВ	$\boldsymbol{\zeta}$, ГэВ^2	$\mathbf{M_{bQ}}$, МэВ	$\boldsymbol{\xi}$, ГэВ	$\boldsymbol{\zeta}$, ГэВ^2
$[Q,c]$	S				6519	1.50	0.59
$\{Q,c\}$	A	3226	1.30	0.42	6526	1.50	0.59
$\{Q,b\}$	A	6526	1.50	0.59	9778	1.30	1.60

Проведём анализ полученных значений масс тетракварков, сравнив их с порогами развала на пару мезонов. Очевидно, что, если масса тетракварка превышает сумму масс пары мезонов, составленных из тех же кварков и антикварков, и при этом нет запрета на распад по квантовым числам (спин-чётности J^P), то тетракварк будет распадаться на эту пару мезонов путём сильного взаимодействия. Если же масса тетракварка лежит ниже соответствующего порога, основными каналами будут либо распады за счёт аннигиляции тяжёлых кварков и антикварков в глюоны с последующей их адронизацией в более лёгкие адроны (сильно подавлены согласно правилу Окубо-Цвейга-Иидзуки), либо радиационные распады (если разрешены). В результате такое состояние будет узким состоянием, которое может наблюдаться экспериментально в других каналах распадов: либо на адроны, составленные из более лёгких кварков и антикварков, либо на два мезона и фотон.

В табл. 4 приведены сравнения масс трижды очарованных единожды прелестных тетракварков, вычисленных нами (табл. 3), с порогами распадов на пары мезонов. Аналогичный анализ можно также провести и для дважды очарованных дважды прелестных и трижды прелестных единожды очарованных тетракварков. Наибольший интерес для нас представляют получившиеся значения фазового объёма Δ:

$$\Delta = M_{QQ'\bar{Q}\bar{Q}'} - M_{thr.}, \tag{19}$$

где $M_{QQ'\bar{Q}\bar{Q}'}$ — масса тетракварка, а $M_{thr.}$ — масса порога распада на пару мезонов. Нас интересуют наиболее вероятные моды распада для каждого тетракварка. Они, в свою очередь, соответствуют наибольшим из возможных значений Δ: Δ_{max}. Поэтому в табл. 4 приведены сравнения масс тетракварков не со всеми возможными для них порогами, а с наинизшими ($[M_{thr.}]_{min} \to \Delta_{max}$).

Из табл. 4 также можно сделать ряд выводов. Во-первых, за исключением следующих состояний (выделены в табл. 4 красным цветом):

$$A\bar{A} \quad 1P \quad J^P = 3^- \quad M = 9\,881 \quad \text{МэВ}, \tag{20}$$
$$A\bar{A} \quad 1D \quad J^P = 3^+ \quad M = 10\,111 \quad \text{МэВ}, \tag{21}$$
$$A\bar{A} \quad 1D \quad J^P = 3^+ \quad M = 10\,116 \quad \text{МэВ}, \tag{22}$$
$$A\bar{A} \quad 1D \quad J^P = 4^+ \quad M = 10\,114 \quad \text{МэВ}, \tag{23}$$
$$S\bar{A}, A\bar{S} \quad 1D \quad J^P = 3^+ \quad M = 10\,105 \quad \text{МэВ}, \tag{24}$$

для всех остальных состояний тетракварков существует хотя бы одна пара мезонов, чья суммарная масса оказывается меньше массы тетракварка ($\Delta_{\text{из табл.}} \equiv \Delta_{max} > 0$), то есть почти для всех тетракварков существует возможность такого распада.

Во-вторых, имеются также состояния, для которых $\Delta_{max} \leq 100$ МэВ. Такие состояния уже близки к порогу распада на пару мезонов, и в табл. 4 они выделены фиолетовым цветом.

В-третьих, для большинства тетракварков такие Δ_{max} значительно превышают отметку в 300 МэВ. То есть тетракварки в основном лежат сильно выше порогов распадов, которые в таком случае называют «развалами». Это означает, что экспериментально такое состояние будет проявляться не как узкий, а как широкий резонанс. Однако справедливо это утверждение лишь для основных состояний тетракварков, а для возбуждённых состояний появляются дополнительные ограничения. В частности, их распады будут подавлены либо центробежным барьером между кварком и антикварком (орбитальные возбуждения), либо нулями волновой функции (радиальные возбуждения), либо же и тем, и другим, и поэтому они могут быть узкими резонансами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках Релятивистской Кварковой Модели проведён расчёт спектров масс основных и радиально

Таблица 3. Массы (МэВ) основных состояний, радиально и орбитально возбуждённых несимметричных ($cc\bar{c}\bar{b}$, $bc\bar{c}\bar{c}$, $cc\bar{b}\bar{b}$, $bb\bar{c}\bar{c}$, $bb\bar{b}\bar{c}$, $cb\bar{b}\bar{b}$) четырежды тяжёлых тетракварков

$d\bar{d}'$	nL	n_r	L	S	J	J^P	$M_{cc\bar{c}\bar{b},cb\bar{c}\bar{c}}$	$M_{cc\bar{b}\bar{b},bb\bar{c}\bar{c}}$	$M_{bb\bar{b}\bar{c},bc\bar{b}\bar{b}}$
$A\bar{A}$	1S	0	0	0	0	0^+	9 606	12 848	16 102
				1	1	1^+	9 611	12 852	16 104
				2	2	2^+	9 620	12 859	16 108
	1P	0	1	1	0	0^-	9 875	13 106	16 326
				0	1	1^-	9 871	13 103	16 325
				1			9 877	13 108	16 326
				2			9 881	13 111	16 329
				1	2	2^-	9 875	13 106	16 327
				2			9 882	13 112	16 329
				2	3	3^-	9 881	13 110	16 330
	2S	1	0	0	0	0^+	10 063	13 282	16 481
				1	1	1^+	10 064	13 282	16 481
				2	2	2^+	10 064	13 283	16 481
	1D	0	2	2	0	0^+	10 113	13 330	16 513
				1	1	1^+	10 111	13 328	16 513
				2			10 114	13 331	16 514
				0	2	2^+	10 108	13 324	16 513
				1			10 113	13 330	16 514
				2			10 117	13 334	16 515
				1	3	3^+	10 111	13 327	16 515
				2			10 116	13 332	16 516
				2	4	4^+	10 114	13 329	16 516
	2P	1	1	1	0	0^-	10 265	13 468	16 631
				0	1	1^-	10 258	13 461	16 629
				1			10 264	13 468	16 630
				2			10 270	13 472	16 633
				1	2	2^-	10 260	13 463	16 630
				2			10 268	13 470	16 632
				2	3	3^-	10 263	13 466	16 631
	3S	2	0	0	0	0^+	10 442	13 629	16 765
				1	1	1^+	10 442	13 629	16 765
				2	2	2^+	10 440	13 628	16 764
$S\bar{A}$, $A\bar{S}$	1S	0	0	1	1	1^+	9 608		16 099
	1P	0	1		0	0^-	9 873		16 320
					1	1^-	9 872		16 321
					2	2^-	9 871		16 322
	2S	1	0		1	1^+	10 057		16 474
	1D	0	2		1	1^+	10 108		16 507
					2	2^+	10 107		16 508
					3	3^+	10 105		16 509
	2P	1	1		0	0^-	10 262		16 624
					1	1^-	10 260		16 624
					2	2^-	10 254		16 624
	3S	2	0		1	1^+	10 434		16 758

Таблица 4. Сравнение масс M (МэВ) трижды очарованных единожды прелестных тетракварков $cc\bar{c}\bar{b}$, $bc\bar{c}\bar{c}$, вычисленных в данной работе (табл. 3), с наименьшими для них порогами распадов $M_{thr.}$ на пару мезонов [21]. Δ — разность между полученной нами массой и порогом

$QQ'\overline{QQ}'$	$d\bar{d}'$	nL	S	J^P	M	$M_{thr.}$	Δ	пара мезонов
$cc\bar{c}\bar{b}$ $bc\overline{cc}$	$A\bar{A}$	1S	0	0^+	9 606	9 258	348	$\eta_c(1S)B_c^{\pm}$
			1	1^+	9 611	9 316	295	$\eta_c(1S)B_c^{*\pm}$
			2	2^+	9 620	9 429	191	$J/\psi(1S)B_c^{*\pm}$
		1P	1	0^-	9 875	9 689	186	$\chi_{c0}(1P)B_c^{\pm}$
			0	1^-	9 871	9 747	124	$\chi_{c0}(1P)B_c^{*\pm}$
			1		9 877		130	
			2		9 881		134	
			1	$\mathbf{2^-}$	9 875	9 831	44	$\chi_{c2}(1P)B_c^{\pm}$
			2		9 882		51	
			2	$\mathbf{3^-}$	9 881	9 888	-7	$\chi_{c2}(1P)B_c^{*\pm}$
		2S	0	0^+	10 063	9 258	805	$\eta_c(1S)B_c^{\pm}$
			1	1^+	10 064	9 316	748	$\eta_c(1S)B_c^{*\pm}$
			2	2^+	10 064	9 429	635	$J/\psi(1S)B_c^{*\pm}$
		1D	2	0^+	10 113	9 258	855	$\eta_c(1S)B_c^{\pm}$
			1	1^+	10 111	9 316	795	$\eta_c(1S)B_c^{*\pm}$
			2		10 114		798	
			0	2^+	10 108	9 429	679	$J/\psi(1S)B_c^{*\pm}$
			1		10 113		684	
			2		10 117		688	
			1	$\mathbf{3^+}$	10 111	10 117	-6	$\psi_3(3842)B_c^{\pm}$
			2		10 116		-1	
			2	$\mathbf{4^+}$	10 114	10 175	-61	$\psi_3(3842)B_c^{*\pm}$
		2P	1	0^-	10 265	9 689	576	$\chi_{c0}(1P)B_c^{\pm}$
			0	1^-	10 258	9 747	511	$\chi_{c0}(1P)B_c^{*\pm}$
			1		10 264		517	
			2		10 270		523	
			1	2^-	10 260	9 831	429	$\chi_{c2}(1P)B_c^{\pm}$
			2		10 268		437	
			2	3^-	10 263	9 888	375	$\chi_{c2}(1P)B_c^{*\pm}$
		3S	0	0^+	10 442	9 258	1 184	$\eta_c(1S)B_c^{\pm}$
			1	1^+	10 442	9 316	1 126	$\eta_c(1S)B_c^{*\pm}$
			2	2^+	10 440	9 429	1 011	$J/\psi(1S)B_c^{*\pm}$
	$S\bar{A}$, $A\bar{S}$	1S	1	1^+	9 608	9 316	292	$\eta_c(1S)B_c^{*\pm}$
		1P		0^-	9 873	9 689	184	$\chi_{c0}(1P)B_c^{\pm}$
				1^-	9 872	9 747	125	$\chi_{c0}(1P)B_c^{*\pm}$
				$\mathbf{2^-}$	9 871	9 831	40	$\chi_{c2}(1P)B_c^{\pm}$
		2S		1^+	10 057	9 316	741	$\eta_c(1S)B_c^{*\pm}$
		1D		1^+	10 108	9 316	792	$\eta_c(1S)B_c^{*\pm}$
				2^+	10 107	9 429	678	$J/\psi(1S)B_c^{*\pm}$
				$\mathbf{3^+}$	10 105	10 117	-12	$\psi_3(3842)B_c^{\pm}$
		2P		0^-	10 262	9 689	573	$\chi_{c0}(1P)B_c^{\pm}$
				1^-	10 260	9 747	513	$\chi_{c0}(1P)B_c^{*\pm}$
				2^-	10 254	9 831	423	$\chi_{c2}(1P)B_c^{\pm}$
		3S		1^+	10 434	9 316	1 118	$\eta_c(1S)B_c^{*\pm}$

(вплоть до 3S) и орбитально (вплоть до 1D) возбуждённых состояний несимметричных четырежды тяжёлых тетракварков в дикварк-антидикварковой картине.

Важной особенностью проведённых вычислений является последовательный учёт релятивистских эффектов и конечного размера дикварка, который приводит к ослаблению потенциала одноглюонного обмена за счёт форм-факторов дикварк-глюонного взаимодействия.

Дополнительной особенностью исследований орбитально возбуждённых состояний несимметричных составов является возникновение значительного смешивания состояний с одинаковой спин-чётностью, но разными полными спинами тетракварка. В симметричных составах смешивание, в принципе, тоже возникает, но лишь для нескольких состояний и его величина незначительна (этим смешиванием вполне можно пренебречь).

Проведён анализ рассчитанных спектров возбуждённых состояний тетракварков путём сравненя их с порогами сильных распадов на пары тяжёлых мезонов. Установлены кандидаты, которые могут иметь наименьшие ширины и в результате наблюдаться как узкие состояния. Приводится аргументация, почему возбуждённые состояния могут оказаться узкими, несмотря на большой фазовый объём.

В заключение отметим, что в настоящее время продолжаются экспериментальные поиски четырежды тяжёлых тетракварков. Поэтому можно ожидать, что в ближайшее время появятся новые экспериментальные кандидаты.

Благодарности

Авторы выражают благодарность А.В. Бережному и Д. Эберту за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (проект 22-2-10-3-1).

[1] *Lebed R.F., Mitchell R.E., Swanson E.S.* // Prog. Part. Nucl. Phys. **93**. 143. (2017).
[2] *Olsen S.L., Skwarnicki T., Zieminska D.* // Rev. Mod. Phys. **90**, №1. 015003. (2018).
[3] *Guo F.K.* et al. // Rev. Mod. Phys. **90**, №1. 015004. (2018).
[4] *Liu Y.R.* et al. // Prog. Part. Nucl. Phys. **107**. 237. (2019).
[5] *Brambilla N.* et al. // Phys. Rep. **873**. 1. (2020).
[6] *Barabanov M.Y.* et al. // Prog. Part. Nucl. Phys. **116**. 103835. (2021).
[7] *Aaij R.* et al. // Phys. Rev. Lett. **118**, №2. 022003. (2017).
[8] *Aaij R.* et al. // Nat. Phys. **18**, №7. 751. (2022).
[9] *Aaij R.* et al. // Sci. Bull. **65**, №23. 1983. (2020).
[10] *CMS Collaboration* et al. // CERN Tech. Rep. №CMS-PAS-BPH-21-003. (2022).
[11] *ATLAS Collaboration* et al. // CERN Tech. Rep. №ATLAS-CONF-2022-040. (2022).
[12] *Aaij R.* et al. // Phys. Rev. Lett. **115**, №7. 072001. (2015).
[13] *Chen H.X.* et al. // Rep. Prog. Phys. **86**, №2. 026201. (2022).
[14] *Faustov R.N., Galkin V.O., Savchenko E.M.* // Phys. Rev. D. **102**, №11. 114030. (2020).
[15] *Faustov R.N., Galkin V.O., Savchenko E.M.* // Universe. **7**, №4. 94. (2021).
[16] *Галкин В.О., Савченко Е.М., Фаустов Р.Н.* // Учен. зап. физ. фак-та Моск. ун-та. №4. 2241512. (2022).
[17] *Faustov R.N., Galkin V.O., Savchenko E.M.* // Symmetry. **14**, №12. 2504. (2022).
[18] *Aaij R.* et al. // J. High Energy Phys. **2018**, №10. 1. (2018).
[19] *Khachatryan V.* et al. // J. High Energy Phys. **2017**, №5. 1. (2017).
[20] *Sirunyan A.M.* et al. // Phys. Lett. B. **808**. 135578. (2020).
[21] *Particle Data Group* et al. // Prog. Theor. Exp. Phys. **2022**, №8. 083C01. (2022).
[22] *Bigi I., Dokshitzer Y., Khoze V.* et al. // Phys. Lett. B. **181**, №1-2. 157. (1986).
[23] *Ebert D., Faustov R.N., Galkin V.O.* // Phys. Rev. D. **72**, №3. 034026. (2005).
[24] *Ebert D., Faustov R.N., Galkin V.O.* // Phys. Rev. D. **84**, №1. 014025. (2011).
[25] *Ebert D., Faustov R.N., Galkin V.O.* // Eur. Phys. J. C. **71**, №12. 1. (2011).
[26] *Logunov A.A., Tavkhelidze A.N.* // Nuovo Cim. **29**, №2. 380. (1963).
[27] *Мартыненко А.П., Фаустов Р.Н.* // ТМФ. **64**, №2. 179. (Theor. Math. Phys. (1985). **64**, №2. 765). (1985).
[28] *Галкин В.О., Фаустов Р.Н.* // ТМФ. **85**, №1. 155. (1990). (Theor. Math. Phys. **85**, №1. 1119. 1990.).
[29] *Ebert D., Faustov R.N., Galkin V.O., Martynenko A.* // Phys. Rev. D. **66**, №1. 014008. (2002).
[30] *Ebert D., Faustov R.N., Galkin V.O.* // Phys. Lett. B. **634**, №2-3. 214. (2006).
[31] *Ebert D., Faustov R.N., Galkin V.O., Lucha W.* // Phys. Rev. D. **76**, №11. 114015. (2007).
[32] *Lucha W., Schöberl F.F.* // Int. J. Mod. Phys. C. **10**, №04. 607. (1999).
[33] *Galkin V.O., Faustov R.N.* // Sov. J. Nucl. Phys. **44**, №6. 1575. (1986).
[34] *Galkin V.O., Mishurov A.Yu., Faustov R.N.* // Sov. J. Nucl. Phys. **51**, №4. 705. (1990).
[35] *Galkin V.O., Mishurov A.Yu., Faustov R.N.* // Sov. J. Nucl. Phys. **55**, №8. 1207. (1992).
[36] *Faustov R.N., Galkin V.O.* // Z. Phys. C: Part. Fields. **66**, №1-2. 119. (1995).

Relativistic description of the mass spectra of fully heavy tetraquarks

V. O. Galkin[1,a], **E. M. Savchenko**[1,2,b]

[1]*Federal Research Center «Computer Science and Control», Russian Academy of Sciences. Moscow, 119333, Russia*
[2]*Department of Quantum theory and High Energy Physics, Faculty of Physics. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia*
E-mail: [a]*galkin@ccas.ru,* [b]*savchenko.em16@physics.msu.ru*

Masses of the ground and excited states of fully heavy tetraquarks with open charm and/or bottom are calculated on the basis of the relativistic diquark-antidiquark picture of tetraquarks. In the framework of the quasipotential approach the relativistic potential of the diquark-antidiquark interaction is constructed with the account of both spin-dependent and spin-independent contributions. It is shown, that in the considered asymmetric in composition systems, there is a significant mixing of states of tetraquarks with the same quantum numbers, but different full spins of the tetraquark. The predicted values of the masses of such tetraquarks are compared with the decay thresholds for a pair of heavy mesons. The possibility of experimental observation of such tetraquarks is discussed.

PACS: 12.39.Ki, 14.40.Lb, 14.40.Nd, 14.40.Rt.
Keywords: quark, diquark, tetraquark, relativistic quark model.
Received 2023.

Сведения об авторах

1. Галкин Владимир Олегович — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (499)135-01-48, e-mail: galkin@ccas.ru.
2. Савченко Елена Михайловна — мл. науч. сотрудник, аспирантка; тел.: (495)939-16-47, e-mail: savchenko.em16@physics.msu.ru.