

## Бифуркационная диаграмма режимов макроскопической динамики сверхпроводящих джозефсоновских контактов

А.А. Сотин,<sup>1,2\*</sup> Д.С. Голдобин<sup>1,2†</sup>

<sup>1</sup>Пермский государственный национальный исследовательский университет,  
физический факультет, кафедра теоретической физики  
Россия, 614068, г. Пермь, ул. Букирева, 15

<sup>2</sup>Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук  
Россия, 614013, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1  
(Поступила в редакцию 31.05.2023; подписана в печать 07.07.2023)

Аналитическое описание эффектов, возникающих в цепи джозефсоновских переходов, экспериментально исследованной в работе [1], в рамках резистивной модели для каждого из переходов требует проведения полного анализа динамики уединенного контакта под действием источника тока. В работе представлены результаты бифуркационного анализа указанной системы в области большого эффективного сопротивления перехода, включающие в себя описание обстоятельств разрушения гетероклинической петли. Получена диаграмма режимов макроскопической динамики уединенного перехода. Построены асимптотические разложения по временным и фазовым гармоникам. Обозначены результаты анализа особенностей и источников неравномерности разложения по временным гармоникам, включающие в себя уточнения вида особенностей.

PACS: 74.50.+g, 85.25.Cp, 74.78.-w, 75.47.-m.

УДК: 538.945, 537.611.44.

Ключевые слова: джозефсоновский контакт, резистивная модель, нелинейная механика, бифуркационный анализ, математический маятник.

### ВВЕДЕНИЕ

Для теоретического описания зависимостей, полученных в экспериментальной работе [1], в рамках которой исследовалось поведение цепи из джозефсоновских элементов SNS (сверхпроводник–металл–сверхпроводник) типа, конденсатора конечных размеров и источника э.д.с., соединенных последовательно, возникла необходимость построения математической модели описывающей коллективную динамику указанных переходов.

Цикл работ, посвященных решению данной задачи в условиях пренебрежения током смещения в соотношении (1), содержит в себе результаты математического описания поведения системы из одного джозефсоновского контакта и распределенного конденсатора [2]. В другой работе рассмотрено распространение теории Отто–Антонсена (и всех ее расширений) на случай ансамбля последовательно соединенных джозефсоновских элементов [3]. С целью аналитического описания наблюдаемых режимов, возникающих в цепи из последовательно соединенных джозефсоновских элементов, в данной работе был исследован уединенный джозефсоновский переход, находящийся под действием внешнего источника тока.

Поведение широкого спектра реальных джозефсоновских переходов [4] с удовлетворительной точностью можно представить в виде эквивалентной цепи с шунтированной емкостью  $C$  и омическим сопротивлением  $r$  (резистивная модель RSJ-model) [5]. Полный

ток, проходящий через джозефсоновский контакт, будет складываться из тока туннелирования куперовских пар  $I_p = I_0 \sin(\varphi)$ , для которого напряжение вызывает изменение скачка фазы волновой функции куперовских пар на контакте,  $\dot{\varphi} = 2eU/\hbar$ , а также из токов  $I_r = U/r$  и  $I_c = C\dot{U}$ . В таком случае полный ток через один джозефсоновский контакт составит:

$$I_e = I_0 \sin(\varphi) + \frac{\hbar}{2er} \dot{\varphi} + \frac{\hbar C}{2e} \ddot{\varphi}. \quad (1)$$

Уравнение (1) после обезразмеривания примет вид:

$$I = \sin(\varphi) + \varepsilon \dot{\varphi} + \ddot{\varphi}, \quad (2)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\hbar}{2eI_0 C}},$$

где  $\varepsilon$  — параметр диссипации, который считается малым по сравнению с единицей, а обезразмеренный входной ток  $I = \frac{I_e}{I_0}$  используется в качестве управляющего параметра.

Качественное решение задачи в постановке (2) уже было получено ранее при рассмотрении динамики электромотора переменного тока и приведено в пособиях [6, 7]. В последующих работах расширение полученных результатов происходило в нескольких направлениях (усложнение модели, проведение различных оценок, учет конечной протяженности элементов в пространстве и т.д.). Наиболее полный анализ производился при рассмотрении влияния внешнего периодического возмущения на систему [8, 9], приводившему к появлению области хаотизации ее поведения.

Приближение резистивной модели для джозефсоновского контакта, исследуемого в экспериментальной ра-

\* 4629807@mail.ru

† denis.goldobin@gmail.com

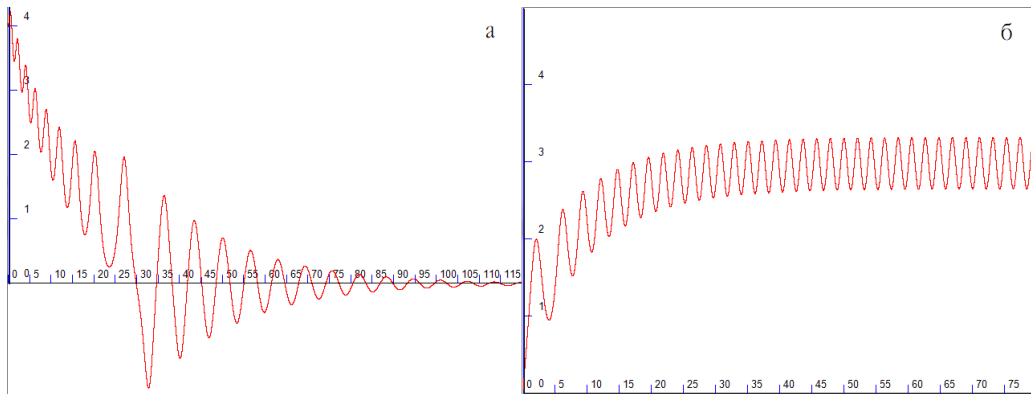


Рис. 1. Зависимость  $\varphi$  от времени при значениях (а):  $\varepsilon = 0.1$  и  $I = 0.1$ ; (б):  $\varepsilon = 0.1$  и  $I = 0.5$

боте [1], не вполне корректно в контексте зависимости частоты излучения от поступающего тока в области малых значений последнего. Однако, данная модель с точки зрения баланса между простотой анализа с помощью методов нелинейной механики и теории возмущений и качественным соответствием динамики цепи указанных элементов является более чем удовлетворительной. Для устранения указанного недостатка модели без существенных ее усложнений достаточным оказывается введение нелинейной зависимости сопротивления от входного по отношению к контакту тока. В данном случае вольт-амперная характеристика единственного перехода будет пересекать эквидиссипативные ( $\varepsilon = \text{const}$ ) ветви, аналитические выражения которых получены в данной работе, что позволяет получить зависимости эффективного омического сопротивления от входного тока. Анализ системы последовательно соединенных элементов с источником постоянного напряжения в рамках резистивной модели приводит к необходимости построения аналогичных полученных в работе приближениям с наследованием проблем и источников неравномерности.

### 1. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД ПРИ ОПИСАНИИ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ РЕЖИМОВ РАБОТЫ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО ДЖОЗЕФСОНОВСКОГО КОНТАКТА

Решения, реализуемые при различных значениях параметров диссипации и внешнего тока и через конечное время приходящее к стационарному процессу, представляют собой для  $\varphi$  либо затухающие к нулю колебания (рис. 1, а), либо процесс релаксирующий к осцилляциям около конечного среднего значения (рис. 1, б). Таким образом, аналогично тому, как это сделано в работе [3], выражение для  $\varphi$  во втором из указанных случаев будем искать в виде:

$$\varphi = \omega + \sum_{n=1} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t), \quad (3)$$

где  $\omega$  — собственная частота осцилляций,  $a_n$  и  $b_n$  — соответствующие амплитуды, полагаемые монотонно убывающими по мере роста значения индекса  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < O(\frac{\varepsilon}{I})$ . Относительно асимптотического разложения  $\sin(\varphi)$  в данной работе используются два различных варианта.

#### 2.1. Разложение по степеням малых амплитуд

В силу сделанных предположений, а также принимая, что  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < O(\frac{\varepsilon}{I})$ , в области малых  $\frac{\varepsilon}{I}$  представим выражение для  $\sin(\varphi)$  в первом порядке по  $\frac{\varepsilon}{I}$ :

$$\sin(\varphi) = \sin(\omega t) - \frac{b_1}{2\omega}. \quad (4)$$

После подстановки разложения (3) в приближении (4) в уравнение (2) приходим к следующему выражению для определения собственной частоты колебаний и амплитуд первых по ней гармоник:

$$\omega b_1 \cos(\omega t) - \omega a_1 \sin(\omega t) + \varepsilon \omega + \varepsilon a_1 \cos(\omega t) + \varepsilon b_1 \sin(\omega t) + \sin(\omega t) - \frac{b_1}{2\omega} = I,$$

откуда после серии преобразований, получим:

$$\begin{cases} 2\varepsilon\omega^2 + \frac{\varepsilon}{\omega^2 + \varepsilon^2} = 2\omega I, \\ a_1 = \frac{\omega}{\omega^2 + \varepsilon^2}, \\ b_1 = -\frac{\varepsilon}{\omega^2 + \varepsilon^2}. \end{cases} \quad (5)$$

График зависимости среднего по времени значения  $\varphi$  от величины приложенного тока, соответствующий решению (5) приведен на рис. 2 в сопоставлении с численным решением.

#### 2.2 Разложение с учетом старших по амплитуде поправок

Пренебрегая всеми гармониками, кроме первой, под аргументами тригонометрических функций правой ча-

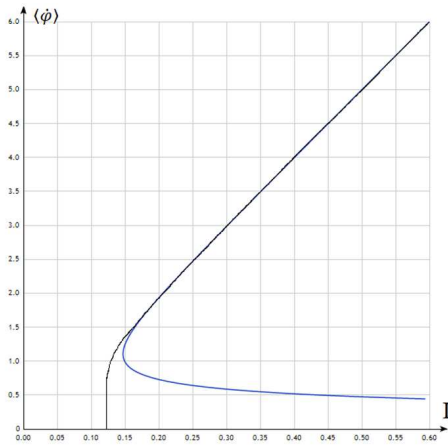


Рис. 2. Зависимость  $\langle \dot{\varphi} \rangle = f(I)$  при значении диссипативного параметра  $\varepsilon = 0.1$  в соответствии с выражением (5) и численным решением с использованием аппроксимативной зависимости (16)

сти (3) и смещая начало отсчета так, чтобы выполнялось

$$\varphi \approx \varphi_0 + \omega t - \frac{b_1}{\omega} \cos(\omega t), \tag{6}$$

получим (здесь введено обозначение:  $\alpha = -\frac{b_1}{\omega}$ ):

$$\begin{aligned} \sin(\varphi) &= \sin(\varphi_0 + \omega t) \cos(\alpha \cos(\omega t)) + \\ &+ \cos(\varphi_0 + \omega t) \sin(\alpha \cos(\omega t)), \end{aligned}$$

откуда с помощью формул Якоби–Ангера получим:

$$\begin{aligned} \sin(\varphi) &= \sin(\varphi_0) (J_0(\alpha) - J_2(\alpha)) \cos(\omega t) + \\ &+ \cos(\varphi_0) (J_0(\alpha) + J_2(\alpha)) \sin(\omega t) + \cos(\varphi_0) J_1(\alpha), \end{aligned} \tag{7}$$

где  $J_n(\alpha)$  — функция Бесселя первого рода порядка  $n$ . Подставляя (6) в (2) с учетом (7) введенных обозначений и сдвига начала отсчета, будем иметь:

$$\begin{aligned} -\alpha\omega^2 \cos(\omega t) + \varepsilon\omega - \varepsilon\alpha\omega \sin(\omega t) + \sin(\varphi_0) \times \\ \times (J_0(\alpha) - J_2(\alpha)) \cos(\omega t) + \cos(\varphi_0) \times \\ \times (J_0(\alpha) + J_2(\alpha)) \sin(\omega t) + \cos(\varphi_0) J_1(\alpha) = I, \end{aligned}$$

откуда получаем систему трансцендентных уравнений относительно собственной частоты, начального сдвига фаз и амплитуды первой гармоники:

$$\begin{cases} \varepsilon\omega + \cos(\varphi_0) J_1(\alpha) = I, \\ -\alpha\omega^2 + \sin(\varphi_0) (J_0(\alpha) - J_2(\alpha)) = 0, \\ -\varepsilon\alpha\omega + \cos(\varphi_0) (J_0(\alpha) + J_2(\alpha)) = 0. \end{cases}$$

Решая последнюю систему относительно собственной частоты, получим следующую параметрическую связь с управляющим параметром:

$$\begin{cases} I = \varepsilon\omega \left( 1 + \frac{aJ_1(\alpha)}{J_0(\alpha) + J_2(\alpha)} \right), \\ \omega = \sqrt{-\frac{\varepsilon^2}{2} + \sqrt{\frac{\varepsilon^4}{4} + \frac{(J_0(\alpha) - J_2(\alpha))^2}{a^2}}}. \end{cases} \tag{8}$$

График зависимости собственной частоты (фигурирующие функции Бесселя вычисляются с точностью до членов второго порядка малости относительно амплитуды первой гармоники) от управляющего параметра согласно (8) так же приведен в сопоставлении с численным решением (рис. 3).

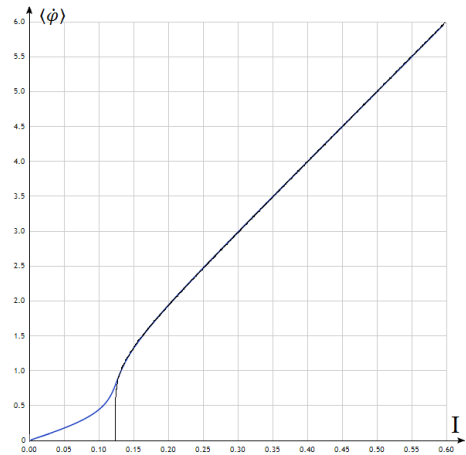


Рис. 3. Зависимость  $\langle \dot{\varphi} \rangle = f(I)$  при значении диссипативного параметра  $\varepsilon = 0.1$  в соответствии с выражением (8) и численным решением с использованием аппроксимативной зависимости (16)

### 2.3. Прямое разложение по фазовым гармоникам

Записывая уравнение (2) в виде:

$$I = \sin(\varphi) + \varepsilon\dot{\varphi} + \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}, \tag{9}$$

будем искать функцию  $\dot{\varphi}(\varphi)$  в соответствии с формой ее численного решения (рис. 4):

$$\dot{\varphi} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi), \tag{10}$$

где собственная частота принята равной единице в связи с неизменностью вида уравнения (9) относительно сдвига на  $2\pi$  и однозначностью получаемого стационарного решения.

Подставляя (10) в уравнение (9) и учитывая формулу умножения тригонометрических рядов Фурье, получим:

$$\begin{aligned} \frac{a_0 b_1}{2} \cos(\varphi) - \frac{a_0 a_1}{2} \sin(\varphi) + \frac{\varepsilon a_0}{2} + \varepsilon a_1 \cos(\varphi) + \\ + \varepsilon b_1 \sin(\varphi) + \sin(\varphi) = I, \end{aligned}$$

откуда после ряда алгебраических преобразований:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{2I}{\varepsilon}, \\ b_1 = -\frac{\varepsilon^3}{I^2 + \varepsilon^4}, \\ b_1 = \frac{\varepsilon I}{I^2 + \varepsilon^4}. \end{cases} \tag{11}$$

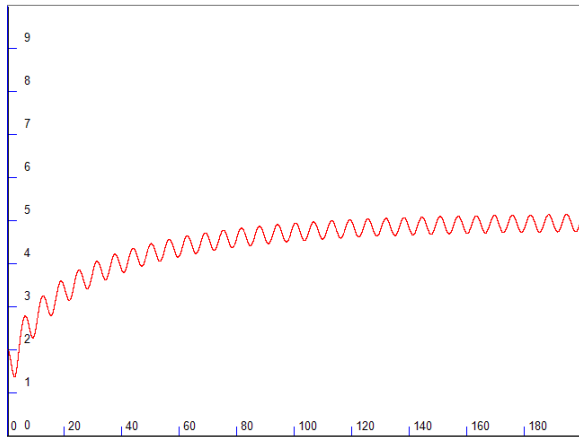


Рис. 4. Зависимость  $\langle \dot{\varphi} \rangle$  от  $\varphi$  при значениях  $\varepsilon = 0.1$  и  $I = 0.5$

Интегрируя уравнение (10) с учетом (11) и принимая во внимание лишь первые гармоники, получим для  $\varphi$ :

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{\theta + 1}{\theta - 1}} \operatorname{tg} \left( \sqrt{\frac{4I^2}{\varepsilon^2} - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + I^2}} \frac{t}{2} \right) \right), \quad (12)$$

где введено обозначение  $\theta = \frac{2I\sqrt{I^2 + \varepsilon^4}}{\varepsilon^2}$ .

Из (12) для среднего по времени значения  $\langle \dot{\varphi} \rangle$  получим:

$$\langle \dot{\varphi} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4I^2}{\varepsilon^2} - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + I^2}}. \quad (13)$$

График зависимости  $\langle \dot{\varphi} \rangle = f(I)$  представлен на рис. 5 в сравнении с численным решением. Относительно данного подхода можно сказать, что его применение дает качественно наиболее близкую к действительности картину. Уточнение решения приводит к невыражаемым в элементарных функциях интегралам и системам алгебраических уравнений высоких (выше 5-й) степеней.

#### 2.4. Сравнение с численным решением и анализ состоятельности аналитических приближений

Сравнивая приближения, полученные в рамках всех фигурирующих в данной работе подходов, можно заключить, что все разложения при принятой точности хорошо согласуются с численным решением в области малых  $\frac{\varepsilon}{I}$  (область линейной зависимости) и неверно отражают поведение системы при значениях  $\frac{\varepsilon}{I}$  порядка единицы. В случае результатов (5) и (8) такая несогласованность обусловлена сопоставимости вкладов первой и старших гармоник в значение собственной частоты.

Из рис. 6 видно, что по мере приближения к критическому значению параметра входного тока возникают усложняющиеся бифуркации, что свидетельствует о необходимости учитывать тем большее число членов в раз-

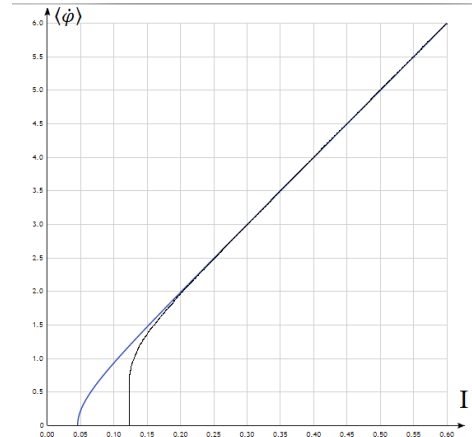


Рис. 5. Зависимость  $\langle \dot{\varphi} \rangle = f(I)$  при значении диссипативного параметра  $\varepsilon = 0.1$  в соответствии с выражением (13) (синяя кривая) и численным решением (черная кривая) с использованием аппроксимативной зависимости (16)

ложении (3), чем точнее планируется аппроксимировать реализуемую зависимость  $\langle \dot{\varphi} \rangle = f(I)$ . В силу логарифмической особенности в критической точке, такой процесс потребует экспоненциального увеличения числа требуемых членов, что в совокупности с растущей сложностью возникающих алгебраических систем указывает на нецелесообразность применения данного подхода для окологрнического интервала значений параметра тока. Разложение (10) дает на рассматриваемом участке качественно согласующийся с фактической зависимостью результат, однако, для своего уточнения так же требует быстрого увеличения числа членов, что так же ведет к усложнению промежуточных выкладок и неэлементарности интегралов, фигурирующих в решении. В отличие от предыдущих методов, приближения, получаемые разложением (10), в силу фиксированности собственной частоты и ограниченности фазовых кривых, равномерно стремятся к искомой кривой, что позволяет заранее фиксировать необходимое для обеспечения достаточной точности число членов.

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ БИФУРКАЦИЙ В СИСТЕМЕ

Стационарные положения, реализуемые в системе (2), определяются из выражения:

$$\sin(\varphi) = I, \quad (14)$$

откуда следует наличие двух стационарных точек на промежутке  $[-\pi, \pi]$ , являющихся фокусом и седловой точками [4]. Условие (14) накладывает ограничения на область существования релаксирующих к стационарным точкам решений и указывает механизм их исчезновения, заключающийся в аннигиляции при значении

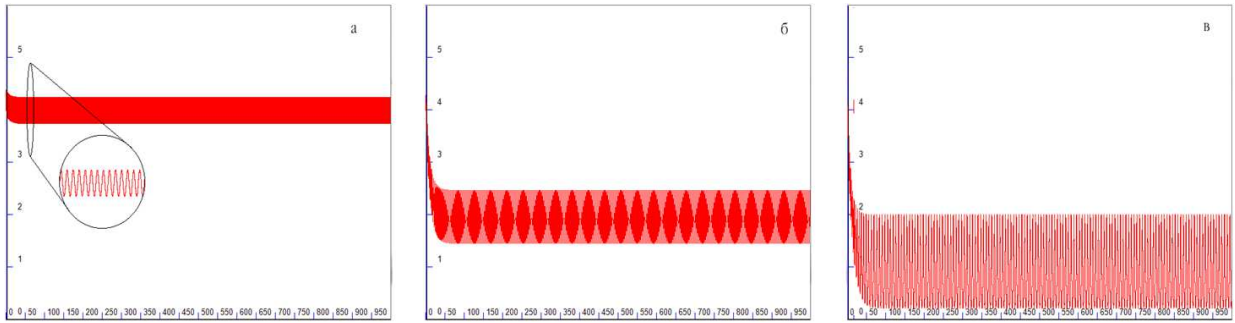


Рис. 6. Качественная иллюстрация увеличения вклада старших гармоник по мере приближения к точке бифуркации. На рисунке представлены зависимости  $\varphi$  от времени при значениях  $a - \varepsilon = 0.1$  и  $I = 0.4$ ;  $b - \varepsilon = 0.1$  и  $I = 0.2$ ;  $v - \varepsilon = 0.1$  и  $I = 0.13$ . Критическое значение управляющего параметра составляет  $I \approx 0.1228$

$I = \mp 1$ . Для уточнения обстоятельств возникновения притягивающего предельного цикла и характера бифуркаций в системе была проведена серия вычислительных экспериментов, в которых определены поля скоростей фазовых потоков в системе и построены карты областей притяжений устойчивых многообразий.

### 3.1. Анализ результатов численного моделирования

Из характера изменений поля скоростей фазовых потоков в системе при изменении управляющего параметра следует появление устойчивого предельного цикла через разрушение гетероклинической петли. В пользу последнего утверждения говорит и вид точечного отображения Пуанкаре (рис. 7). Так же подтверждается сценарий аннигиляции двух стационарных точек и ряд результатов (например, наличие узких областей гибели колебаний (рис. 8) в области значительных скоростей противоположного с  $I$  знака), описанных в работе [4].

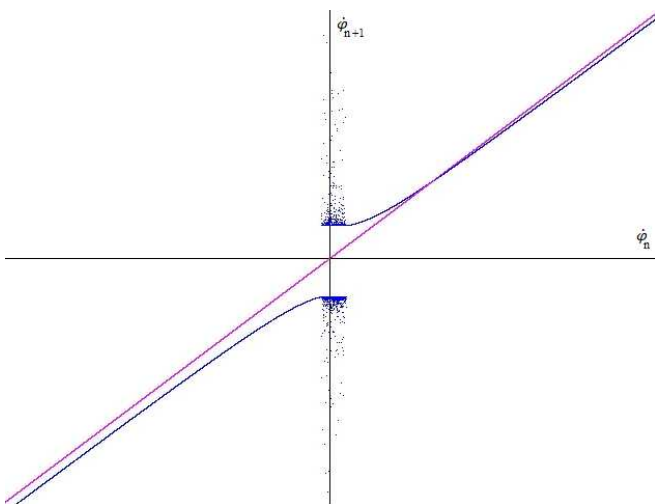


Рис. 7. Вид одномерного точечного отображения Пуанкаре для системы в области значений параметров  $\varepsilon = (0; 1)$  и  $I = (I_{\text{крит}}; 1)$

### 3.2. Получение точечного отображения и качественная картина разрушения гетероклинической петли

Обозначая  $y = \dot{\varphi}$  и  $x = \varphi$  и представляя уравнение (2) в виде системы уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{y} = -\varepsilon y - \sin(x) + I, \\ \dot{x} = y. \end{cases}$$

Учитывая соотношение (14), в окрестности седловой точки для малых возмущений ( $y = \tilde{y}$ ,  $x = \varphi + \tilde{x}$ ) в линейном приближении получим:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}} = -\varepsilon \tilde{y} - \cos(\varphi) \tilde{x}, \\ \dot{\tilde{x}} = \tilde{y}. \end{cases}$$

откуда придем к следующему выражению для собственных значений системы:

$$\lambda^2 + \varepsilon \lambda + \cos(\varphi) = 0,$$

или после решения относительно  $\lambda$ :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\varepsilon}{2} \mp \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} - \cos(\varphi)},$$

Из (14) для  $\cos(\varphi)$  имеем следующее выражение:

$$\cos(\varphi) = -\sqrt{1 - I^2},$$

Из приведенных соотношений следует, что седловой индекс  $\nu$  составит:

$$\nu = \frac{\sqrt{4\sqrt{1 - I^2} + \varepsilon^2} + \varepsilon}{\sqrt{4\sqrt{1 - I^2} + \varepsilon^2} - \varepsilon}. \quad (15)$$

В области малых  $\varepsilon$  седловой индекс превосходит единицу (рис. 9), откуда согласно [10] имеет место образование устойчивого предельного цикла после разрушения гетероклинической петли. Качественно процесс ее образования можно описать следующим образом: в докритической области (рис. 10, a) траектории, проходящие в бесконечно малой окрестности седловой

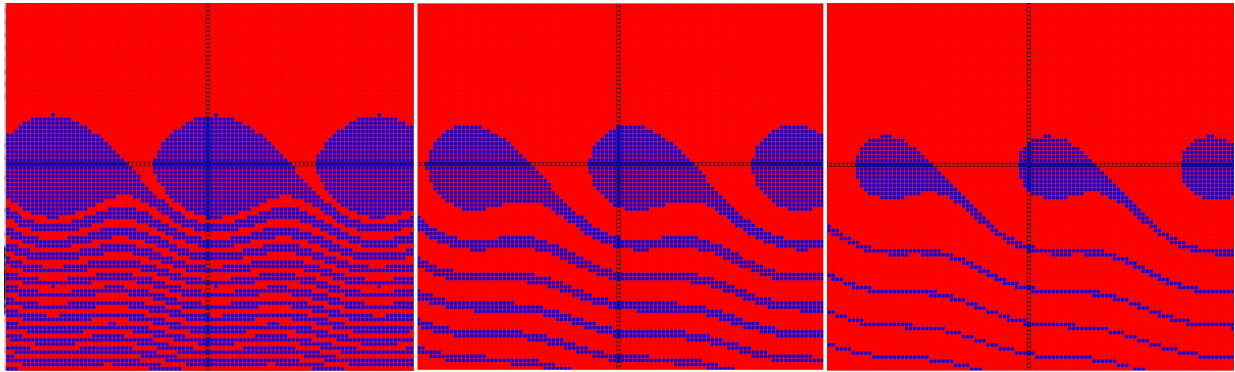


Рис. 8. Качественная эволюция областей притяжения аттракторов системы по мере увеличения значения параметра входного тока  $\varepsilon = 0.1$  слева направо  $I = 0.2, I = 0.4, I = 0.6$

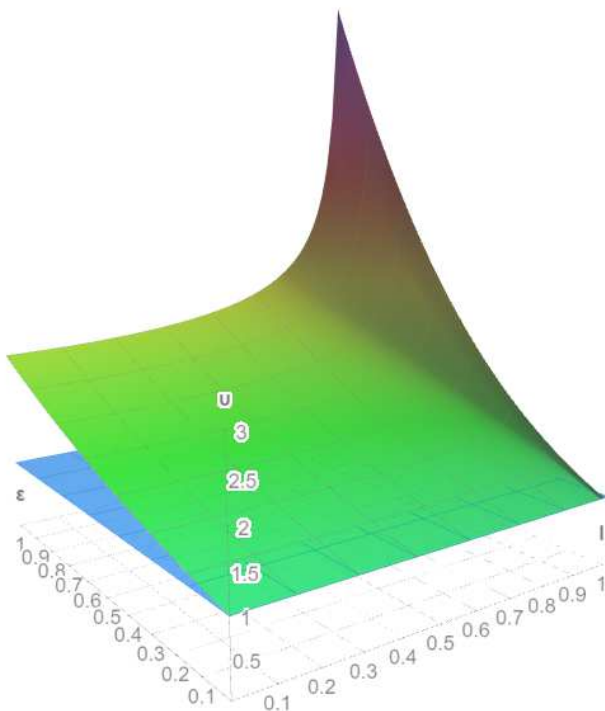


Рис. 9. Зависимость величины седлового индекса  $\nu$  от параметров диссипации и входного тока согласно (15) (зелено-желтая поверхность) в сравнении с критическим его значением (синяя плоскость)

точки, неограниченно приближаются к фокусу вследствие превалирования диссипативных сил над возбуждающими. По мере приближения значения управляющего параметра к критическому, расстояние между исходящей сепаратрисной траекторией и следующей седловой точкой уменьшается, пока не достигнет нуля, чему будет отвечать значение  $I = I_{\text{крит}}$ . В этом случае (рис. 10, б) сепаратриса будет притягивающим многообразием, образующим гетероклиническую петлю. При этом время, проводимое системой в области

седловых точек, будет неограниченно велико (расстояние до седловой точки в ее окрестности при движении по притягивающей ветке будет уменьшаться по закону  $1 - e^{-|\lambda_2|t}$ ). Из этого следует, что получаемый после разрушения гетероклинической петли предельный цикл будет иметь для собственной частоты логарифмическую особенность относительно разности  $I - I_{\text{крит}}$ , причем в точке  $I = I_{\text{крит}}$  кривую следует определить точкой  $(I_{\text{крит}}; 0)$  в силу приведенных рассуждений. Таким образом, в окрестности критического значения управляющего параметра имеем следующую аппроксимацию для  $\langle \dot{\varphi} \rangle$ :

$$\langle \dot{\varphi} \rangle \approx \frac{2\pi}{A + B \ln \frac{1}{I - I_{\text{крит}}}}, \quad (16)$$

где  $A, B, I_{\text{крит}}$  — некоторые коэффициенты, зависящие только от  $\varepsilon$ . Для интересующей нас величины  $\varepsilon = 0.1$ , данные коэффициенты имеют следующие значения  $A \approx 0.7575, B \approx 1.1274, I_{\text{крит}} \approx 0.1228$ , которые были вычислены методом наименьших квадратов, с применением метода наискорейшего спуска.

После разрушения гетероклинической петли траектории из окрестности седловой точки (рис. 10, в), образующей ранее окрестность сепаратрисы, вследствие достаточного сообщения энергии для получения конечной скорости при значении  $\varphi$ , соответствующем следующей седловой точке, притягиваются к устойчивому предельному циклу, обеспечивающему отвод энергии получаемой системой за период.

### 3.3. Анализ глобальных бифуркаций в системе

Таким образом, в рассматриваемой системе имеет место бифуркация разрушения гетероклинической петли с образованием устойчивого предельного цикла, а также аннигиляция стационарных точек, представляющих собой фокус и седло. Бифуркационная диаграмма в области малых  $\varepsilon$  имеет вид, изображенный на рис. 11.

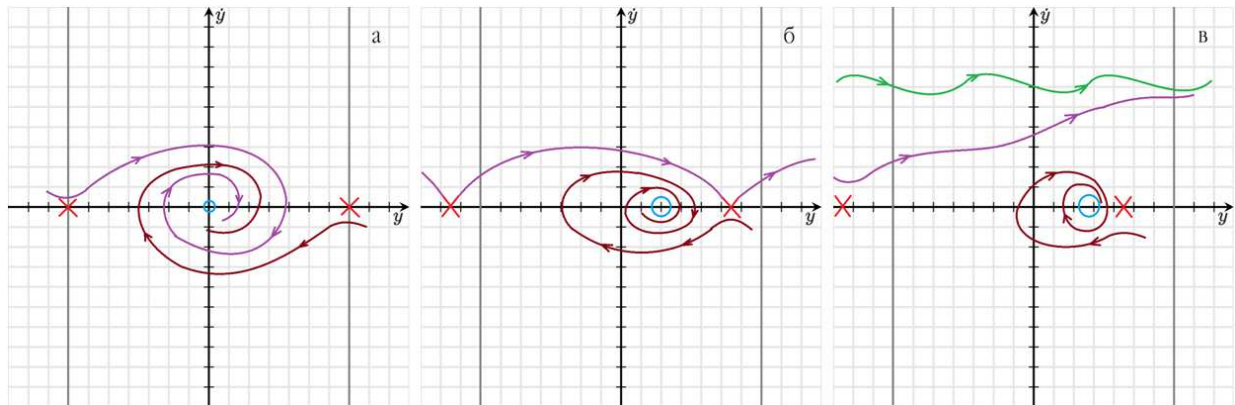


Рис. 10. Последовательность качественных перестроек режима осцилляций уединенного джозефсоновского элемента: *а* — до бифуркации, *б* — в момент образования гетероклинической петли и *в* — после ее разрушения

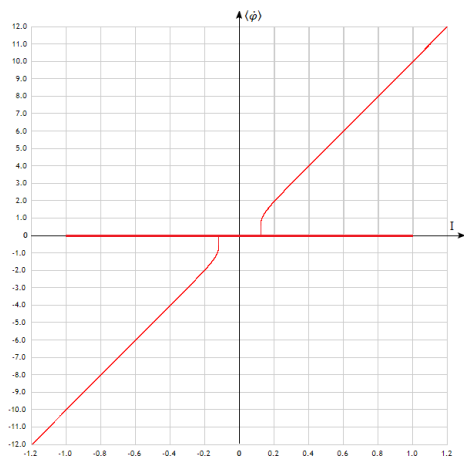


Рис. 11. Вид бифуркационной диаграммы системы (2) для значения параметра диссипации  $\varepsilon = 0.1$  с учетом особенности (16)

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках настоящей работы была исследована динамика уединенного джозефсоновского элемента под

действием постоянного внешнего тока в приближении резистивной модели. Проведен анализ бифуркаций в области малых значений диссипативного параметра ( $\varepsilon < 1$ ). Показано, что образование устойчивого предельного цикла происходит через разрушение гетероклинической петли. Получена аппроксимация околочритической области бифуркационной диаграммы ( $I$ ;  $\langle \varphi \rangle$ ).

Получен ряд аналитических приближений для решений, относящихся к предельному циклу. Проведена оценка их состоятельности путем сравнения с численным решением задачи. Сделан вывод о неравномерности разложений по временным гармоникам, связанной с наличием логарифмической особенности периода собственных колебаний по разности параметров входного тока и его критических значений в околочритической области.

Полученные результаты могут быть использованы при анализе поведения ансамблей последовательно соединенных джозефсоновских элементов, а так же аналогично описываемых (с математической точки зрения) систем.

- [1] Barbara P., Cawthorne A.B., Shitov S.V., Lobb C.J., // Phys. Rev. Lett. **82**, 1963 (1999).
- [2] Belykh V.N., Pedersen N.F., Soerensen O.H. // Physical Review B **16**, 4853 (1977).
- [3] Goldobin D.S., Klimenko L.S.// Physical Review E **97**, 022203 (2018).
- [4] Бароне А., Патерно Дж. Эффект Джозефсона. Физика и применения / Пер. с англ. М., 1984. 639 с. 150–151.
- [5] Лухарев К.К., Введение в динамику Джозефсоновских переходов. М.: Наука, 1985, с. 38–40.
- [6] Stoker J. Nonlinear Vibrations in Mechanical and

- Electrical systems. New York, Interscience, 1950. p. 68–86.
- [7] Minorsky N. Introduction to Non-linear Mechanics. Ann. Arbor, Mich. 1947. p. 116–130.
- [8] Huberman B.A., Crutchfield J.P., Packard N.H. // Appl. Phys. Lett. **37**, 750 (1980).
- [9] Пиковский А.С., Долматова А.В., Голдобин Д.С.// Изв. вузов. Радиофизика. **LXI**, № 8–9. 754. (2018).
- [10] Kuznetsov Y. A. Elements of Applied Bifurcation Theory. Second Edition. App. Math. Sci. **112**, 2 ed., 1997. p. 200–207

## Bifurcation diagram of macroscopic behavior in superconducting Josephson junctions

A.A. Sotin<sup>1,2,a</sup>, D.S. Goldobin<sup>1,2,b</sup>

<sup>1</sup>*Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, Perm State University. Perm, 614068, Russia*

<sup>2</sup>*Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Science. Perm, 614013, Russia*  
*E-mail: <sup>a</sup>4629807@mail.ru, <sup>b</sup>denis.goldobin@gmail.com*

Analytical description of the effects occurring in the chain of Josephson junctions experimentally investigated in [1] within the resistive model for each of the junctions requires a complete analysis of the dynamics of the solitary contact under the action of the current source. We present the results of the bifurcation analysis of the above system in the region of large effective transition resistance, including the description of the circumstances of the heteroclinic loop failure. A diagram of the macroscopic dynamics modes of the solitary transition is obtained. Asymptotic decompositions in time and phase harmonics are constructed. The results of the analysis of peculiarities and sources of irregularity of the expansion by temporal harmonics are outlined, including specification of the type of peculiarities.

PACS: 74.50.+g, 85.25.Cp, 74.78.-w, 75.47.-m.

*Keywords:* josephson junctions, RSJ-model, nonlinear mechanics, bifurcation analysis, mathematical pendulum.

*Received 31 May 2023.*

### Сведения об авторах

1. Сотин Андрей Александрович — инженер-исследователь; e-mail: 4629807@mail.ru.
2. Голдобин Денис Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (342) 2-396-227, e-mail: denis.goldobin@gmail.com.