УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА № 3, 2330101 (2023)

Задача о построении операторов проектирования для направленного распространении скалярного потенциала волн Похгаммера–Кри в метаматериале–ауксетике

Д. В. Ампилогов* М. А. Дмитриева†
Балтийский федеральный университет им. И. Канта,
ОНК «Институт высоких технологий», Высшая школа физических проблем и технологий
Россия, 236041, Калининград, ул. А.Невского, д. 14
(Поступила в редакцию 02.12.2022; подписана в печать 23.01.2023)

В настоящей работе рассматривается задача о распространении скалярного потенциала волн Похгаммера–Кри в цилиндрическом ауксетике. Средствами метода операторов проектирования получены приближенное уравнение эволюции и общие решения для правых и левых волн.

PACS: 62.30.+d , 02.30.Ik УДК: 534-16
Ключевые слова: метаматериалы, ауксетики, метод операторов проектирования.

ВВЕДЕНИЕ. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ АУКСЕТИКАХ

В последние десятилетия внимание научного сообщества привлекают метаматериалы. В широком смысле это материалы с физическими свойствами, не встречающимися в природе. Примерами таких материалов являются среды с отрицательным показателем преломления (в литературе их называют «леворукими» средами, средами Веселаго, DNG-среды и т.п.), ауксетики — материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона. Вопрос о первооткрывателе ауксетиков остается дискуссионным. В различных источниках утверждается, что первое упоминание ауксетиков было в работах немецкого физика Вольдемара Фойгта, либо в работе А. Лява в 1944 г. [1]. Последний рассматривал такие кристаллы пирита FeS_2, однако более поздние исследования этого не подтвердили.

Примером изотропного макроскопического ауксетика является пена из вогнутых элементов. В 1985 г. Р. Альмгрен [2] предложил конструкцию из шарнирно соединенных жестких стержней и упругих элементов (пружин), демонстрирующую $\nu < 0$. Независимо от него А. Г. Колпаков [3] разработал модель из упругих стержней, соединенных в недеформированных узлах. При вогнутой форме ячеек она демонстрировала отрицательный коэффициент Пуассона. В 1987 г. К. Войцеховски [4] предложил двумерную модель термодинамически стабильной изотропной системы с $\nu < 0$ из несферических частиц («молекул»). Потенциальный интерес таким материалам возник после публикации Р.Лэйксом в 1987 г. результатов испытаний пенополиэфира с $\nu = -0,7$ [5].

Термин «ауксетик» (по-английски auxetic) происходит от греческого слова $\alpha\upsilon\xi\eta\tau\iota\kappa o\varsigma$ (ауксетикос), что означает «стремящийся расшириться». Имеется в виду, что упругий материал при растяжении в одном направлении растет в поперечном размере, то есть имеет отрицательный коэффициент Пуассона. Термин создал К. Эванс в 1990 г. [6], внесший значительный вклад в изучение ауксетиков.

Аномальные свойства таких материалов интересны как с чисто научной точки зрения, так и ввиду того, что они могут лечь в основу новых технологий. В частности, если заклепкой скрепить две детали конструкции, а затем ее натянуть, то заклепка, сделанная из обычного материала, станет сжиматься в поперечном направлении. В результате этого образуется зазор между заклепкой и деталями конструкции, что может привести к разрушению последней. Если изготовить заклепку из ауксетика, то такого зазора не образуется, а конструкция простоит значительно большее время. Это очень полезное свойства весьма может пригодится при создании сейсмоустойчивых зданий. Помимо автономного использования, ауксетики могут использоваться качестве армирующих компонентов. Использование ауксетических волокон в качестве наполнителя повышает межфазную адгезию при растягивающей нагрузке в композиционных материалах [7].

Существует четыре технологии изготовления ауксетичных композитов, с использованием:

- матрицы с отрицательным коэффициентом Пуассона,
- ауксетичных волокон и обычной матрицы,
- обоих компонентов ауксетиков,
- а также путем наслоения слоев обычного композита в заданных направлениях.

Во всех этих случаях вязкость разрушения увеличивается в процессе производства, что делает эти материалы пригодными для многих приложений. Вязкость разрушения зависит от значения коэффициента Пуассона и возрастает по мере приближения к -1. Эта особенность была продемонстрирована на примере композитов, армированных углеродными волокнами [7]. Сопротивление вдавливанию, энергопоглощение и ударную вязкость можно повысить в сэндвич–панелях за счет ауксетического слоя, одновременно уменьшив их массу.

Количество работ, посвященных теоретическому описанию распространения механических и электромагнитных волн в подобного рода средах, а также их

* dm_ampil@list.ru
† dmitrieva_m@inbox.ru

взаимодействию очень мало. Теоретическое описание магнетоэластических поверхностных волн в ауксетичной структуре выполнил Б. Марушевский в 2010 г. [8], однако заметного развития не было выявлено. Сравнительный анализ волн Похгаммера–Кри в ауксетиках и не-ауксетиках был выполнен А. В. Ильяшенко и С. В. Кузнецовым в 2018 г. Ими же было получено точное решение в ауксетичных метаструктурах для аксиально–симметричного случая [9]. Также следует отметить работу Р. Отмана, в которой разобрано модифицированное одномерное уравнение волнового распространения с учетом высокого изменения плотности, которое возникает в ауксетиках [10].

Научный интерес представляет исследование распространения волн в заданном направлении. В настоящее время существует идея о сочетании электромагнитных свойств бинегативных сред и механических свойств метаматериалов–ауксетиков (концепция умных метаматериалов), представленная в теории трансформационной оптики, основу которой заложила работа [11]. Перспективными приложениями данной теории являются гибкие волноводы [12], управление светом [13, 14] и другие. В контексте строительства вопрос об однонаправленном воздействии волн может возникнуть в задачах о распространении сейсмических волн, когда необходимо исследовать только продольную волну, либо только поперечную волну.

Одним из методов, позволяющим расщепить исходное волновое возмущение, заданное соответствующим уравнением на две однонаправленные составляющие, является метод операторов проектирования.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МЕТОДЕ ОПЕРАТОРОВ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Сущность метода проектирующих операторов изложена в монографии С. Б. Лебле [15] и его англоязычном издании [16]. Она заключается в следующем. Уравнения, возникающие в ходе исследований распространения волн, решаются различными способами. При известных допущениях очень неплохо работает метод разделения переменных. Разделение переменных позволяет дать определение волновой моды как проекции вектора состояния возмущения среды на подпространство собственных функций задачи Штурма–Лиувилля для переменных, соответствующих поперечным (т.е. таким, вдоль которых не происходит распространения волн) координатам. При упрощении математического описания волнового возмущения прибегают к понятию ветви дисперсионного соотношения — подпространству решений, эволюция которых определяется конкретной зависимостью частоты от компонент волнового вектора. Для электромагнитных волн ими могут служить или сами компоненты напряженностей и/или состояния с определенной поляризацией. Чтобы определить тип волны, нужно идентифицировать связи между отдельными физическими переменными, входящими в полный набор волнового возмущения (поляризационные соотношения) с помощью систем динамических величин.

Каждой такой системе можно в духе квантовой механики поставить в соответствие оператор проектирования на подпространство данной ветви дисперсионного соотношения на основе линеаризованной системы уравнений. Система собственных векторов возникающей при этом матричной задачи обладает полнотой. Получающиеся связи между компонентами собственных векторов и являются искомыми поляризационными соотношениями, позволяющими определить тип волны. Операторы проектирования должны удовлетворять стандартным условиям полноты и ортогональности:

$$\sum \widehat{P}_i = \widehat{I}, \tag{1}$$

$$\widehat{P}_i \widehat{P}_j = \widehat{P}_i \delta_{ij}, \tag{2}$$

где $\widehat{I}$ — единичный оператор, δ_{ij} — символ Кронеккера.

Расщепление волн хорошо зарекомендовало себя в нелинейной теории, в частности в задачах распространения, в задачах физики атмосферы и ионосферы (последние результаты описаны, в частности, в работах [17, 18]), физики плазмы [19], теории распространения электромагнитных волн в метаматериалах [20, 21]. Обобщение опыта применения метода в задачах электродинамики сплошных сред изложено в пособии С. Б. Лебле [22]. В линейной теории операторы проектирования также практичны — они позволяют эффективно выделить соотношения между динамическими переменными в начальном условии, необходимые для генерации волны заданного типа. В настоящей работе будет поставлена матричная задача о распространении скалярного потенциала волн Похгаммера–Кри, решение задачи на собственные значения которой является первым этапом в построении проекционных операторов.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ПОСТРОЕНИИ ОПЕРАТОРОВ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ОДНОНАПРАВЛЕННОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ СКАЛЯРНОГО ПОТЕНЦИАЛА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ АУКСЕТИКЕ

Рассмотрим ауксетик цилиндрической формы. Уравнение движения для изотропного упругого тела в отсутствии массовых сил представляются в виде уравнения Похгаммера–Кри [9]:

$$c_1^2 \nabla \mathrm{div}\mathbf{u} - c_2^2 \mathrm{rotrot}\mathbf{u} = \partial_t^2 \mathbf{u}, \tag{3}$$

где $\mathbf{u}$ — поле перемещений, c_1, c_2 — скорости продольной и поперечной составляющей объемных волн в среде, зависящие от коэффициентов Ламе, а

$$\partial_t^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{4}$$

Для описания будем использовать цилиндрическую систему координат. Как и в работе [9] ось z подразумевается направленной вдоль центральной оси образца. Производные по r, φ, z и t далее будем обозначать следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial r} \equiv \partial_r f; \frac{\partial f}{\partial \varphi} \equiv \partial_\varphi f; \frac{\partial f}{\partial z} \equiv \partial_z f; \frac{\partial f}{\partial t} \equiv \partial_t f. \quad (5)$$

Пусть

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi + \mathrm{rot}\mathbf{\Psi}, \quad (6)$$

где Φ — скалярный потенциал поля перемещений, $\mathbf{\Psi}$ — векторный потенциал. Подставив в уравнение (3) получим следующую систему:

$$\begin{cases} \nabla(c_1^2\Delta\Phi) = \nabla\partial_t^2\Phi, \\ c_2^2\Delta(\mathrm{rot}\mathbf{\Psi}) = \partial_t^2\mathrm{rot}\mathbf{\Psi}. \end{cases} \quad (7)$$

Рассмотрим распространение скалярного потенциала (7). Подставив выражение для скалярного оператора Лапласа в цилиндрической системе координат, получим:

$$\frac{1}{r}(r\partial_r\Phi) + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi\Phi + \partial_z\Phi = \frac{1}{c^2}\partial_t\Phi \quad (8)$$

Функцию $\Phi(r,\varphi,z,t)$ разложим по базису гармонической функции по переменной φ и функции Бесселя по переменной r:

$$\Phi(r,\varphi,z,t) = \sum_{\theta,\nu} A_{\theta,\nu}(z,t)\exp(i\nu\varphi)J_\nu(a_{\theta,\nu}r) + c.c. \quad (9)$$

Опуская индексы и разделив его на $\exp(i\nu\varphi)J_\nu(a_{\theta,\nu})$, получим:

$$\partial_z^2 A(z,t) - a^2A(z,t) = \frac{1}{c_1^2}\partial_t^2A(z,t) \quad (10)$$

То же уравнение можно получить в аксиально–симметричном случае, когда скалярный потенциал не зависит от φ и при $\nu = 0$. Поставим начальные условия:

$$A(z,0) = \mathcal{A}(z)\partial_tA(z,t)|_{t=0} = \mathcal{B}(z). \quad (11)$$

Если параметр достаточно мал по сравнению с производной по z, уравнение (10)) перейдет в

$$c_1^2\partial_z^2A(z,t) = \partial_t^2A(z,t). \quad (12)$$

Начальные условия (11) переформулируются в виде:

$$u(z,0) = \mathcal{A}(z)\exp(-az)\partial_tu(z,t)|_{t=0} = \mathcal{B}(z)\exp(-az). \quad (13)$$

Наложим требование равенства смешанных производных:

$$\partial_{zt}A(z,t) = \partial_{tz}A(z,t) \quad (14)$$

Пусть:

$$u(z,t) = \partial_tA(z,t)w(z,t) = \partial_zA(z,t) \quad (15)$$

Тогда система уравнений (12, 14) в матричном виде выглядит следующим образом:

$$\partial_tB = \widehat{L}B, \quad (16)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} u(z,t) & w(z,t) \end{pmatrix}^T, \widehat{L} = \begin{pmatrix} 0 & c_1^2\partial_z \\ \partial_z & 0 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

+ начальные условия на $f(z,t)$ и $g(z,t)$:

$$u(z,0) = u(z), w(z,0) = w(z) \quad (18)$$

Используя процедуру построения операторов проектирования, изложенную в монографии [15], получим операторы проектирования в k-представлении:

$$\widehat{P}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & c_1 \\ c_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \widehat{P}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -c_1 \\ -c_1^{-1} & 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

В силу того, что элементы матриц (19) являются константами, то после выполнения обратного преобразования Фурье их вид операторов не изменится.

3. ПРИБЛИЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОНАПРАВЛЕННОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ СКАЛЯРНОГО ПОТЕНЦИАЛА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ АУКСЕТИКЕ

Подействуем оператором $\widehat{P}_1$ (19) на матричное уравнение (16). Получим:

$$\partial_t\begin{pmatrix} c_1w + u \\ c_1^{-1}u + w \end{pmatrix} = c_1\partial_z\begin{pmatrix} c_1w + u \\ w + c^{-1}u \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Верхняя строка матрицы (20) есть нижняя, умноженная на c_1 . Введем функцию

$$\Pi(z,t) = c_1w(z,t) + u(z,t). \quad (21)$$

Тогда окончательно уравнение для П-волны будет:

$$\partial_t\Pi(z,t) = c_1\partial_z\Pi(z,t), \quad (22)$$

+ начальное условие

$$\partial_t\Pi(z,0) = \Pi(z). \quad (23)$$

Действуя так же с оператором $\widehat{P}_2$, получим две копии уравнения распространения однонаправленных волн:

$$\partial_t\begin{pmatrix} u - c_1w \\ w - c_1^{-1}u \end{pmatrix} = -c_1\partial_z\begin{pmatrix} u - c_1w \\ w - c^{-1}u \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Введем функцию

$$\Lambda(z,t) = u(z,t) - c_1w(z,t). \quad (25)$$

Окончательный вид уравнения для Λ-волны есть:

$$\partial_t \Lambda(z,t) = c_1 \partial_z \Lambda(z,t), \tag{26}$$

+ начальное условие:

$$\partial_t \Lambda(z,0) = \Lambda(z). \tag{27}$$

Уравнения (22) и (26), приближенно описывают однонаправленное распространение скалярного потенциала волн Похгаммера–Кри в цилиндрическом ауксетике. Общие решения этих уравнений есть

$$\Pi(z,t) = \Pi(z + c_1 t), \Lambda(z,t) = \Lambda(z - c_1 t). \tag{28}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

В рамках данной работы была поставлена матричная задача Коши о построении операторов проектирования и представлены операторы проектирования на подпространства собственных значений. С их помощью получены приближенные уравнения эволюции правых и левых волн однонаправленного распространения скалярного потенциала в цилиндрическом аксиально–симметричном ауксетике, а также получены общие решения для этого случая. Сложив полученные правые и левые волны с таковыми для векторного потенциала можно получить приближенное выражение для однонаправленного распространения волн Похгаммера–Кри в цилиндрическом ауксетике.

[1] *Love E.H.* A treatise on the mathematical theory of elasticity. 4th ed. Dover, New York, 1944.
[2] *Almgren R.F.* // J. of Elasticity. **15**. 427. (1985).
[3] *Колпаков А.Г.* // УФН. **167**, №. 2. 73. (1991).
[4] *Wojciechowski K.W.* // Molecular Physics. **61**, N 5b. 6173. (1987).
[5] *Lakes R.* // Science. **235**. 1038. (1987).
[6] *Evans K. E.* // Endeavour. **15**, N 4. 170. (1991).
[7] *Mazaev A.V.* at al. // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. **747**. 012008. (2020).
[8] *Maruszewski B., Drzewiecki A., Starosta R.* // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. **10**, 012160. (2010).
[9] *Ilyashenko A.V., Kuznetsov S.V.* // Journal of Mechanics. **35**. 327. (2019).
[10] *Othman R.* // Int. J. of Solids and Structures. **236-237**. 111321. (2022).
[11] *Pendry J.B., Schurig D., Smith D.R.* // Science. **312**. 1780. 2(2006).
[12] *Shin, D.* et. al. // Scientific Reports. **4**, 4084. (2014).
[13] *Landy N.I., Padilla W.J.* // Opt. Exp. **17**. 14872. (2009).
[14] *Gabrielli L.H.* et. al. // Nat. Commun. **3**, 1217. (2012).
[15] *Лебле С.Б.* Волноводное распространение нелинейных волн в стратифицированных средах. / С.Б.Лебле. Ленинград: Издательство Ленинградского университета, 1988.
[16] *Leble S.* Nonlinear Waves in Waveguides with stratification. Berlin, 1991.
[17] *Leble S., Vereshchagin S.* et. al. // Atmosphere. **12**(9). 1123. (2021).
[18] *Leble S., Smirnova E.* // Atmosphere. **10**. 629. (2019).
[19] *Perelomova A.* // Contributions to Plasma Physics. e202100067. (2021).
[20] *Ampilogov D., Leble S.* // Phys. Lett. A. **380**. 2271. (2016).
[21] *Ampilogov D., Leble S.* // Journal of Nonlinear Optical Physics & Materials. **31**, N. 1. 2150013. (2022).
[22] *Leble S.* Practical Electrodynamics with Advanced Applications, 2020.

Directed propagation of the scalar potential of Pocchammer-Chree waves in auxetics: projection operators method

D. V. Ampilogov[a], **M. A. Dmitrieva**[b]

Educational and scientific cluster «Institute of Hi Technologies», High School of Physical Problems and Technologies, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, 236041, Russia
E-mail: [a]*dm_ampil@list.ru,* [b]*dmitrieva_m@inbox.ru*

We investigate the problem of propagation of scalar potential of Pocchammer-Chree waves in cylindrical auxetic. The approximated equation of evolution of are built by means of projection operators method. The general solution for left and right waves is obtained.

PACS: 62.30.+d , 02.30.Ik.
Keywords: metamaterials, auxetics, projection operators method.
Received 02 December 2022.

Сведения об авторах

1. Ампилогов Дмитрий Владимирович — ассистент, тел.: (4012) 231-00-67, e-mail: dm_ampil@list.ru.
2. Дмитриева Мария Александровна — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (4012) 231-00-67, e-mail: dmitrieva_m@inbox.ru.