

Диаграмма Минковского как средство наглядности при изучении кинематики СТО

А. В. Селиверстов*

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра общей физики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
(Поступила в редакцию 11.11.2022; подписана в печать 13.12.2022)

Обобщён опыт преподавания кинематики специальной теории относительности (СТО) с опорой на наглядное представление пространства Минковского — диаграмму Минковского, при котором основные эффекты СТО, такие как замедление времени и сокращение длины, выводятся с помощью геометрических построений на этой диаграмме и понятий «событие» и «измерение».

PACS: 01.40.Di, 01.40.gb, 01.55.+b, 03.30.+p

УДК: 37.09, 378, 53.03

Ключевые слова: общая физика, методика преподавания, теория относительности, СТО, релятивистские эффекты, наглядность.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение специальной теории относительности (СТО) в первом семестре курса общей физики, читаемого на физическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова, обычно вызывает ряд затруднений у первокурсников. Они ещё не полностью освоили привычный многим преподавателям абстрактно-теоретический метод рассуждения, опирающийся на символическую информацию: доказательство, опирающееся на формулы и логические выводы, часто требует ещё и наглядно-образного подкрепления. Лабораторные занятия и натурные демонстрационные эксперименты по данной теме — в отличие от всех остальных, изучаемых в курсе механики — невозможны, поэтому СТО выбивается как из общей методологии феноменологического в своей основе курса общей физики, так и из методики его преподавания, а понимание релятивистских эффектов и запоминание описывающих их формул подменяются их зазубриванием. Для преподавателя же, владеющего теоретическим методом в полной мере, сама проблема наглядного подкрепления доказательств может быть неочевидной. Можно говорить о росте значения дидактического принципа наглядности и формировании противоречия между изложением учебного материала преподавателем и восприятием его студентами.

Корень этой проблемы кроется в изменении студенческой аудитории с момента разработки методики преподавания (см., например, разработки [1] и [2]; схожий подход применяется и в классических научно-популярных изданиях, таких как [3]). СТО строится «наперекор здравому смыслу» и чувственному опыту, и студентам XX века для обоснования смены парадигмы было достаточно логически непротиворечивого объяснения. Однако сейчас мы живём в эпоху информационно-коммуникационных технологий, сформировавшую новую культуру обмена информацией:

студенты потребляют её в основном в аудиовизуальной форме. Основная проблема повествовательного изложения материала — в том, что сейчас слова «представьте, что...» необходимо подкреплять не только формулами, но и наглядными образами. Лучшие научно-популярные передачи, блоги, телеграмм-каналы сопровождают текст и рассказ видео, инфографикой, визуализациями, анимациями, донося знания тем образом, который уже более привычен современным учащимся. Диаграмма Минковского показывает пример визуализации формул, позволяет перебросить мостик от абстрактных понятий к их наглядному символическому представлению, помогает понять, как постулаты СТО формируют ткань самой теории. При графическом представлении событий диаграмма не заменяет уравнений, но делает их вывод более очевидным. Как вспомогательное средство она вскользь рассмотрена в ряде учебных пособий (например, [2, с. 284–286] или [4, с. 201–203]), однако в полной мере, насколько известно автору, её потенциал до сих пор не используется.

1. ДИАГРАММА МИНКОВСКОГО, СОБЫТИЯ И ИЗМЕРЕНИЕ ИХ КООРДИНАТ

Описание движения в СТО построено на понятии **события**, задающегося четырьмя координатами: одной временной t и тремя пространственными x , y , z . Их можно объединить в четырёхмерное пространство-время — **пространство Минковского**: в качестве первой координаты используется произведение времени на скорость света ct . Удобство этого подхода — в том, что все координаты имеют размерность длины. Любому событию соответствует точка в этом пространстве. Для унифицированного перечисления координат введём обозначения ${}^i x$ ($i = 0, 1, 2, 3$): ${}^0 x \equiv ct$, ${}^1 x \equiv x$, ${}^2 x \equiv y$, ${}^3 x \equiv z$.

На **диаграмме Минковского** отображаются только две из четырёх координат: x и ct (${}^1 x$ и ${}^0 x$ в унифицированных обозначениях). Поскольку их размерности совпадают, то масштабы отображения (единичные отрезки

* panopticum@physics.msu.ru

вдоль соответствующих осей) можно выбрать равными.

Отличие от традиционных в классической механике графиков зависимости координаты от времени заключается в том, что пространственная и временная оси координат поменяны местами друг с другом: время увеличивается не слева направо, а снизу вверх. Каждая точка диаграммы соответствует некоторому событию в двумерном пространстве-времени.

На рис. 1 изображена диаграмма Минковского для неподвижной лабораторной системы отсчёта и измерение координат событий в ней. Оси координат через равные интервалы Δ_0 пересекаются линиями координатной сетки, параллельными осям:

- линии, параллельные пространственной оси x , отмечают все одновременные события $ct = \text{const}$;
- линии, параллельные оси времени ct , соответствуют событиям, произошедшим в точке с одной координатой $x = \text{const}$.

Отметим, что такой подход сохранится и тогда, когда система координат перестанет быть прямоугольной: координата события по какой-либо оси измеряется не перпендикулярно «своей» оси, а параллельно «чужой».

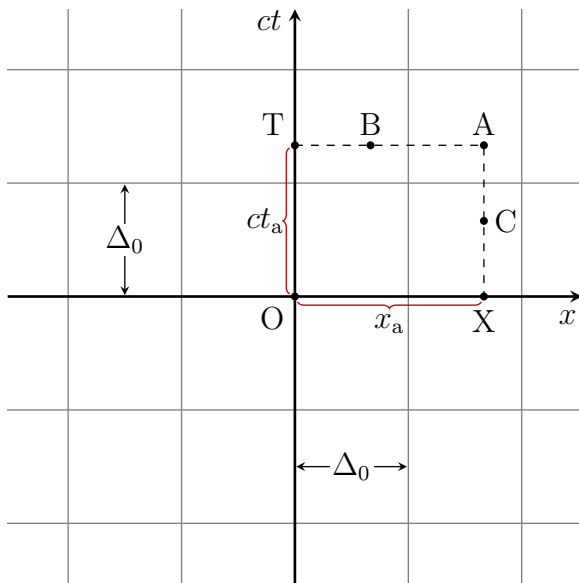


Рис. 1. Измерение координат события в лабораторной системе отсчёта

События А, В и Т происходят **одновременно** (то есть имеют равные временные координаты ct_a), но в разных точках пространства, как и все события на прямой, проходящей через точку А и параллельную оси x . Численное значение координаты в этой системе получается делением длины отрезка ОТ на длину единичного отрезка Δ_0 :

$$ct_a = {}^0x_a = \frac{|OT|}{\Delta_0}. \quad (1)$$

Аналогично, события А, С и Х происходят **в одной и той же точке** с координатой x_a , но в разные моменты времени, так же, как и все события на прямой, проходящей через точку А параллельно оси ct . Численное значение координаты в этой системе получается делением длины отрезка ОХ на длину единичного отрезка Δ_0 :

$$x_a = {}^1x_a = \frac{|OX|}{\Delta_0}. \quad (2)$$

Почему этому, на первый взгляд очевидному, вопросу уделено столько внимания? Как будет видно из дальнейшего рассмотрения, причин две. Во-первых, система координат при движении превратится из прямоугольной в косоугольную. Во-вторых, пространственный масштаб Δ_0 также изменится. Поэтому привычный алгоритм измерения координат даст сбой.

Множество точек-событий, соответствующих нахождению движущегося тела в различных точках пространства в разное время, образует на диаграмме Минковского **мировую линию**. Неподвижное относительно заданной системы отсчёта тело прочерчивает мировую линию, параллельную оси ct . Если объект движется со скоростью света, то его мировая линия в силу выбора масштаба — прямая, параллельная биссектрисе осей координат. На рис. 2 красным цветом нарисованы мировые линии импульсов света, излучённых в нулевой момент времени в начале координат (событие О) в разные стороны: по направлению оси x (а) и против неё (б). Эти импульсы будут играть существенную роль в дальнейших рассуждениях.

Мировая линия тела, движущегося равномерно со скоростью v — также прямая. Её наклон удобно отсчитывать от временной оси (см. рис. 2):

$$\text{tg } \alpha = vt/ct = v/c.$$

На рис. 2 изображены мировые линии тел с законами движения $x(t) = 0,25 ct$ (в) и $x(t) = 2\Delta_0 + 0,25 ct$ (г). Координата первого из них в нулевой момент времени совпадает с началом отсчёта О, второго — нет. Для любого движущегося тела $\text{tg } \alpha \leq 1$.

Задачи

- 1.1. Изобразите на диаграмме Минковского мировую линию точки, которая в нулевой момент времени начала движение со скоростью v_0 , в момент времени T увеличила скорость до $2v_0$, а в момент времени $2T$ изменила её на $-v_0$.
- 1.2. В системе отсчёта Земли космический корабль движется с постоянной скоростью $v = 0.5c$ по направлению к ней. Находясь на расстоянии L от Земли, корабль излучает в её сторону короткий импульс света (событие А). В тот момент времени, когда импульс достигает Земли, с неё

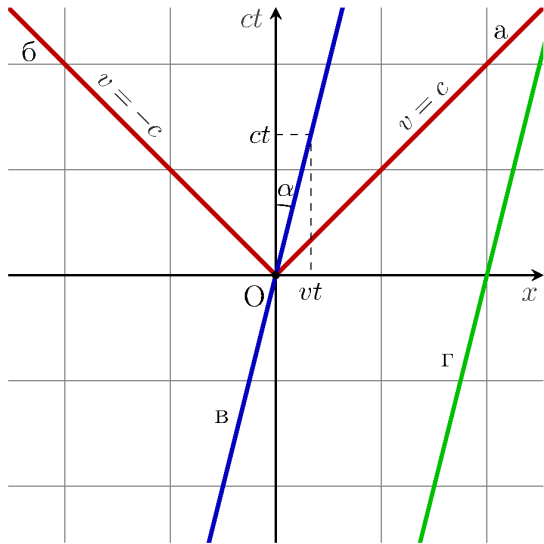


Рис. 2. Мировые линии импульсов света, излучённых при $t = 0$ из начала координат по направлению оси x (а) и против него (б), а также равномерно движущихся материальных точек с законами движения $x(t) = 0.25 ct$ (в) и $x(t) = 2\Delta_0 + 0.25 ct$ (г)

излучают такой же импульс в сторону корабля (событие В). Нарисуйте мировые линии Земли, корабля и световых импульсов на диаграмме Минковского: a — связав её с Землёй и расположив в начале координат событие В; $б$ — связав её с кораблём и расположив в начале координат событие А.

1.3. Два поезда, имеющие длину в системе отсчёта Земли L каждый, движутся со скоростями v_1 и v_2 навстречу друг другу (v_1 — по направлению оси x). В момент их встречи (событие О) машинисты включают фары. Нарисуйте мировые линии головы и хвоста каждого из поездов, а также фронтов световых волн на диаграмме Минковского, связав её с Землёй и расположив в начале координат событие О.

2. НЕПОДВИЖНАЯ И ДВИЖУЩАЯСЯ СИСТЕМЫ ОТСЧЁТА

Рассмотрим переход из лабораторной **К**-системы отсчёта в **К'**-систему, движущуюся относительно исходной поступательно с постоянной скоростью V в положительном направлении оси x так, что в начальный момент времени $t = t' = 0$ совпадают начала координат и направления соответствующих осей (см. рис. 3). **Обе системы отсчёта считаются инерциальными.**

Поскольку перенос начала координат O' **К'**-системы происходит с постоянной скоростью, то его координата относительно **К**-системы изменяется следующим обра-

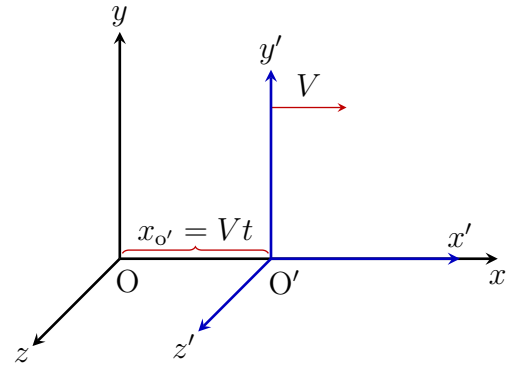


Рис. 3. Движение **К'**-системы относительно **К**-системы

зом:

$$x_{O'}(t) = Vt. \tag{3}$$

На диаграмме Минковского в **К**-системе мировая линия точки O' — прямая, наклонённая под углом $\alpha = \arctg(V/c)$ к временной оси. Выражение в скобках — это скорость переноса в безразмерном виде, в долях скорости света. Оно встретится в дальнейшем ещё не раз, поэтому целесообразно ввести для него отдельное обозначение

$$\beta = \frac{V}{c}, \tag{4}$$

тогда (3) запишется следующим образом:

$$x_{O'}(t) = \beta ct \text{ или } {}^1x_{O'} = \beta {}^0x_{O'}. \tag{5}$$

Прежде чем рассматривать релятивистские преобразования, потренируем воображение в рамках механики Ньютона.

Классическая механика

В классической механике преобразования координат при переходе в движущуюся систему отсчёта носят имя Галилея. Запишем прямое преобразование (из **К** в **К'**)

$$\begin{aligned} x' &= x - \beta ct, \\ y' &= y, \quad z' = z, \end{aligned}$$

и обратное к нему:

$$\begin{aligned} x &= x' + \beta ct', \\ y &= y', \quad z = z'. \end{aligned}$$

Время в классической механике одинаково во всех системах отсчёта: $t = t'$. В унифицированном виде преобразования Галилея запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} {}^1x' &= {}^1x - \beta {}^0x, \\ {}^1x &= {}^1x' + \beta {}^0x'. \end{aligned}$$

Изобразим обе системы отсчёта на диаграммах Минковского одновременно. На рис. 4,а это диаграмма, построенная для К-системы, а на рис. 4,б — для К'-системы. В первом случае начало координат О покоится, О' движется: $x_{O'} = Vt = \beta ct$; во втором — покоится О', а движется О: $x'_O = -Vt = -\beta ct$.

Мировые линии (МЛ) начал координат на обеих диаграммах выделены одинаково: чёрным цветом — для точки О, синим — для точки О'. Они наклонены в разные стороны, то есть в К'-системе точка О перемещается с отрицательной скоростью $-V$. Если событие попадает на эту линию, то в соответствующей системе отсчёта оно имеет нулевую координату. То есть мировая линия точки О «прочерчивает» ось координат ct , а точки О' — ct' .

Также на диаграммах изображены два события, А и D. Подберём их таким образом, чтобы в К-системе они происходили бы в разное время в разных местах, но в К'-системе их пространственные координаты совпали бы. Системы координат « $ct'-x'$ » на рис. 4,а и « $ct-x$ » на рис. 4,б стали косоугольными. Для того, чтобы получить x' -координату события А на диаграмме для К-системы необходимо:

1. Провести через него прямую AX' «вдоль другой оси» (параллельную оси ct').
2. Измерить длину отрезка OX' вдоль своей оси.
3. Разделить на масштаб Δ_0 : $x'_a = |OX'|/\Delta_0$ (сравните с (2)).

Таким образом, на диаграмме Минковского в любой системе отсчёта (К или К') линии равных координат, то есть линии координатной сетки, параллельны мировой линии начала координат этой системы.

Измерение ct' -координаты на той же диаграмме показывает, что её масштаб изменился. Длины отрезков OT и OT', измеренные линейкой на диаграмме, различаются; для совпадения времён в обеих системах отсчёта (а это обязательное требование классической механики!) масштаб следует принять равным $\Delta'_0 = \Delta_0/\cos\alpha$: $ct'_a = |OT'|/\Delta'_0$ (сравните с (1)).

Для измерения «нештрихованных» координат x и ct по «штрихованной» диаграмме необходимо проделать аналогичные действия: провести параллельные осям прямые, измерить отсекаемые ими отрезки, разделить на масштабы (опять у временной координаты масштаб будет другим).

Световая сфера

Важную роль в СТО играет мысленный эксперимент со световой сферой. Предположим, что в начальный момент времени $ct = ct' = 0$ в точке, совпадающей с началами координат К- и К'-систем $x = x' = 0$ произошла вспышка света. По постулату о постоянстве

скорости света фронт этой вспышки (это и есть **световая сфера**) распространяется в вакууме с постоянной скоростью c , одинаковой для всех систем отсчёта.

Анализ этой ситуации в К- и К'-системах показывает, что она противоречит здравому смыслу. Если рассмотреть произвольную точку на световой сфере, то при одинаковых временах распространения ($t = t'$) расстояния от неё до начала координат, то есть источника, различны: свет должен пройти разные расстояния (см. рис. 5): $r_a \neq r'_a$.

Запишем эти расстояния и требование постулата о постоянстве скорости света:

$$\begin{aligned} x_a^2 + y_a^2 + z_a^2 &= (ct_a)^2, \\ (x'_a)^2 + (y'_a)^2 + (z'_a)^2 &= (ct'_a)^2. \end{aligned}$$

Это наталкивает нас на вывод, что в К- и К'-системах изменяется не только x -координата событий, но и время течёт по-разному: $ct_a \neq ct'_a$. Однако из соображений симметрии $y_a = y'_a$ и $z_a = z'_a$, тогда

$$x_a^2 - (ct_a)^2 = (x'_a)^2 - (ct'_a)^2 \quad (6)$$

или в унифицированном виде

$$({}^1x)^2 - ({}^0x)^2 = ({}^1x')^2 - ({}^0x')^2.$$

Изобразим этот мысленный эксперимент на диаграмме Минковского, обозначив на ней два события: О — излучение света в начальный момент времени, А — прохождение фронта световой волны через некоторую точку пространства. На рис. 6,а изображена картина, предсказываемая классической механикой. Измерение пространственно-временных координат события А показывает, что в К'-системе нарушается постулат Эйнштейна о постоянстве скорости света, поскольку отрезки x'_a и ct'_a неравны (даже с учётом изменения масштаба вдоль временной оси).

Чтобы скорость света в К'-системе всегда была равной c , должно выполняться условие $x'_a = ct'_a$. Проще всего добиться этого, предположив, что обе оси системы координат, связанной с К'-системой, на диаграмме Минковского поворачиваются симметрично относительно мировой линии светового импульса: на один и тот же угол α навстречу друг другу (рис. 6,б).

Чем выше значение скорости переноса $\beta = V/c$, тем больше этот угол (см. рис. 7); однако его величина всегда меньше $\pi/4$.

Процедура измерения координат события на диаграмме при этом не изменяется:

1. Проводим прямую, параллельную другой координатной оси (для x это ct , для $x' - ct'$).
2. Измеряем длину отрезка, отсекаемого на своей оси.
3. Делим на масштаб.

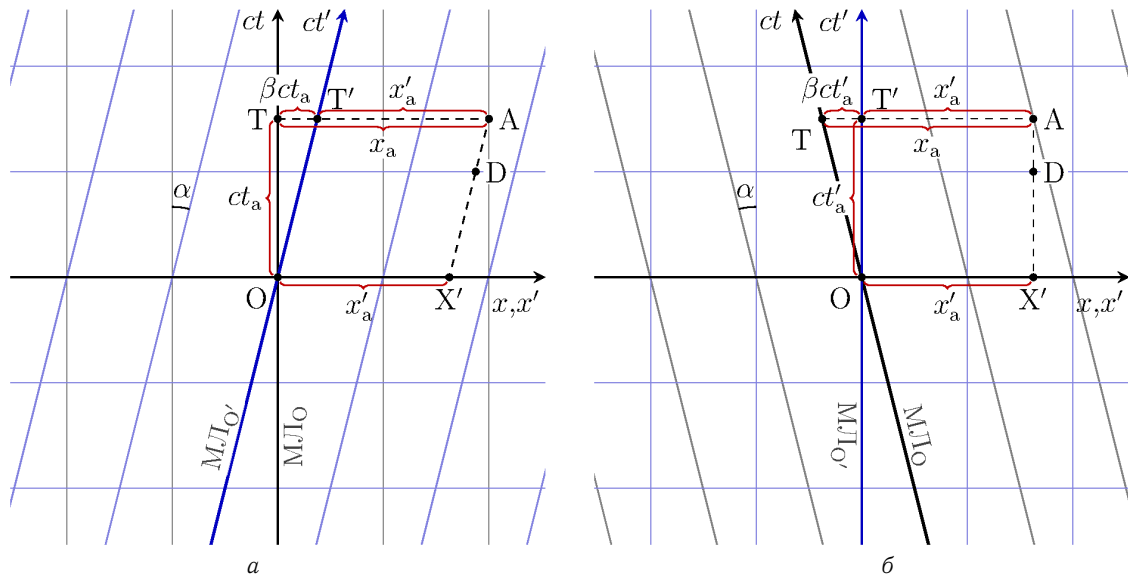


Рис. 4. Сопоставление диаграмм Минковского, построенных в пространстве классической механики для К- (а) и К'-систем (б): измерение координат события А, мировые линии (МЛ) начал координат ($\text{tg } \alpha = \beta$)

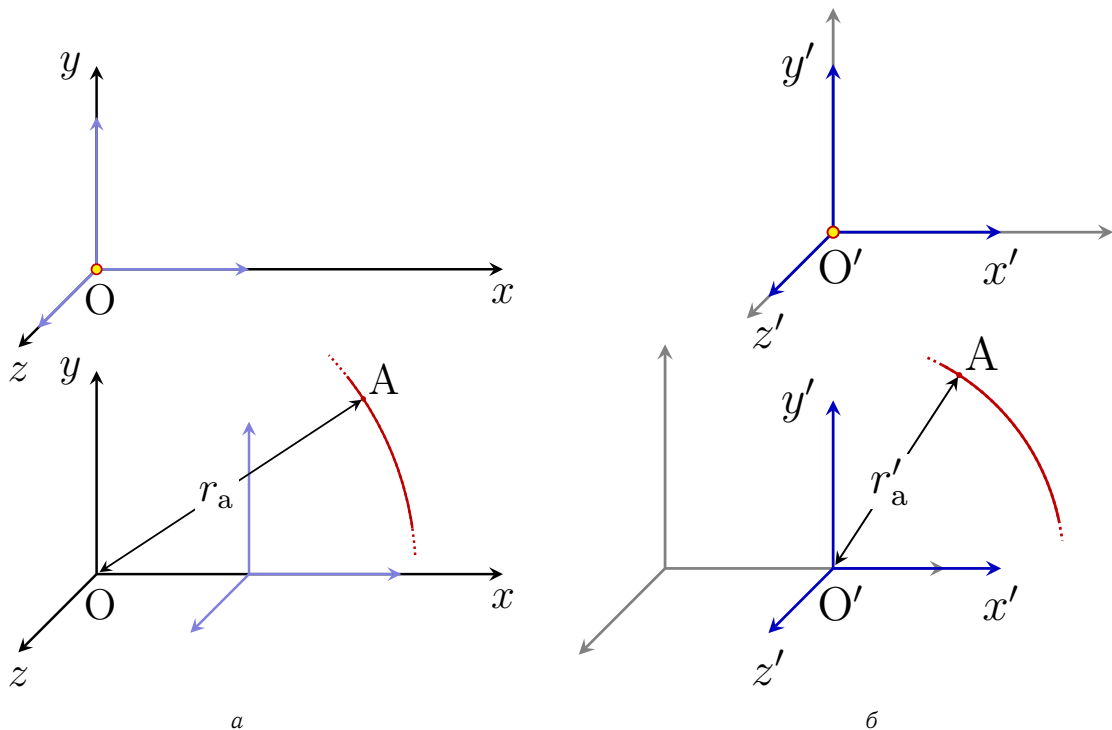


Рис. 5. Распространение фронта световой волны в вакууме с точки зрения наблюдателей в системах К (а) и К' (б)

Вопрос масштабов остаётся пока открытым (рассмотрим его позже), но при симметричных изменениях осей на диаграмме можно ожидать, что масштабы изменятся одинаково (если изменяются вообще).

Таким образом, решение задачи преобразования координат ещё не получено, однако сформулирован геометрический подход к нему: найдём преобразование, превращающее прямоугольную систему координат

нат в косоугольную (аффинную), симметричную относительно биссектрисы координатных осей. Несмотря на незавершённость, этот подход уже позволяет продемонстрировать, что **одновременность событий относительна**, то есть зависит от того, в какой системе отсчёта рассматриваются эти события.

Рассмотрим в качестве событий А и В достижение световой сферой точек, лежащих в К-системе на рав-

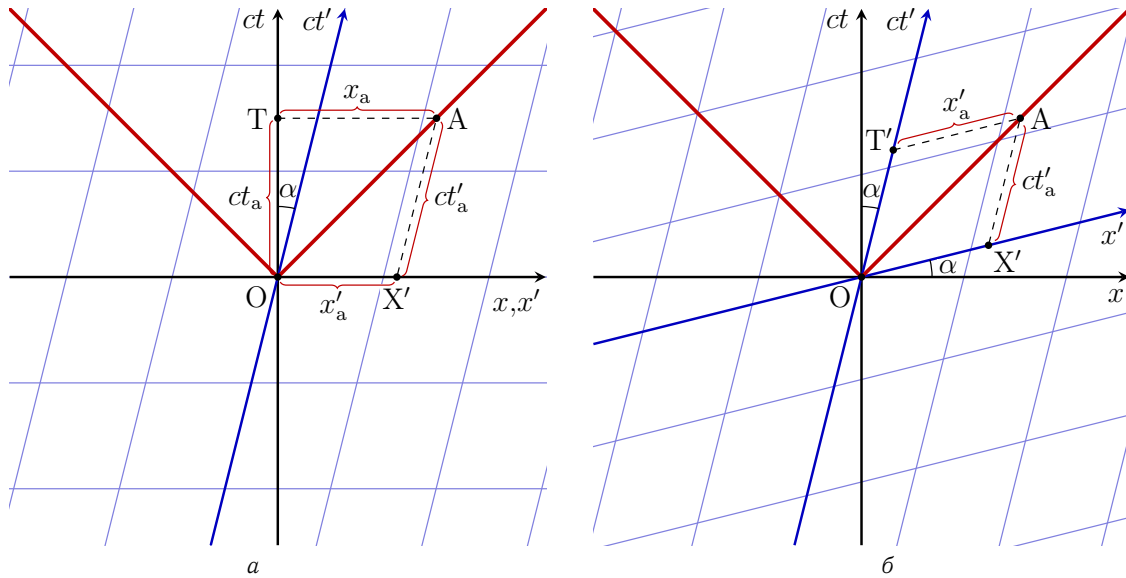


Рис. 6. Эксперимент со световой сферой на диаграмме Минковского: *a* — пространство классической механики, постулат о постоянстве скорости света не выполняется; *б* — пространство СТО, постулат выполняется

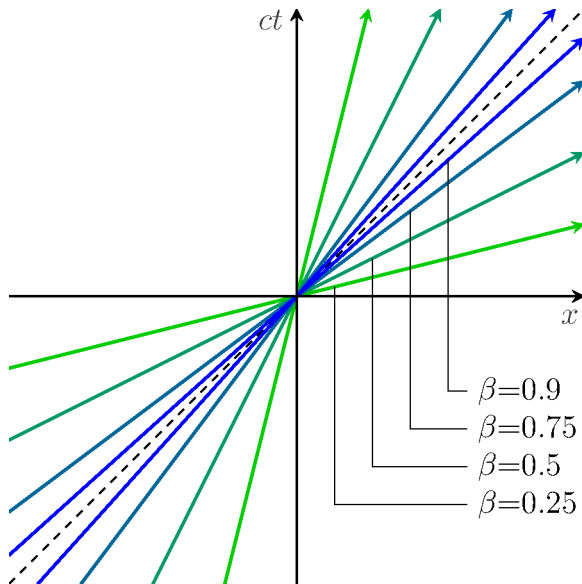


Рис. 7. Оси координат K' -системы на диаграмме Минковского для различных скоростей переноса. Соответствующие оси изображены одинаковыми цветами, скорость переноса подписана у линии сноски

ных расстояниях L по разные стороны от источника (см. рис. 8). Мировые линии этих точек показаны зелёным цветом. Достижение светом некоторой точки пространства — это пересечение их мировых линий. Положение этого события на диаграмме Минковского зафиксировано пересечением, а его координаты зависят от системы отсчёта. В K -системе (рис. 8, *a* — события A и B произошли одновременно (в одно и то же время), то есть лежат на прямой, параллельной

оси координат. Однако в K' -системе это разные времена (рис. 8, *б*). Пространственные координаты событий в K' -системе также различаются, то есть световые импульсы преодолели разные расстояния, двигаясь от источника в разные стороны.

Преобразования Лоренца

Преобразования координат в СТО можно вывести из мысленного эксперимента со световой сферой (подробно см., например, в [5, с. 44–47]). Вкратце идея этого вывода заключается в том, что преобразование координат предполагается линейным:

$$\hat{x}' = \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \hat{a} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \hat{b} = \hat{a} \cdot \hat{x} + \hat{b}, \quad (7)$$

где \hat{x}, \hat{x}' — векторы координат, \hat{b} — постоянный вектор, \hat{a} — матрица коэффициентов 4×4 . Это предположение согласуется с геометрическим подходом: аффинное преобразование линейно. Из ряда соображений, в том числе симметрии, вектор \hat{b} обнуляется, а матрица коэффициентов \hat{a} редуцируется:

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

При $\beta = 0$ системы отсчёта совпадают и матрица должна стать единичной; при $\beta \rightarrow 0$ результаты должны стремиться к преобразованиям Галилея (из принципа соответствия): $x' \rightarrow x - \beta ct$.

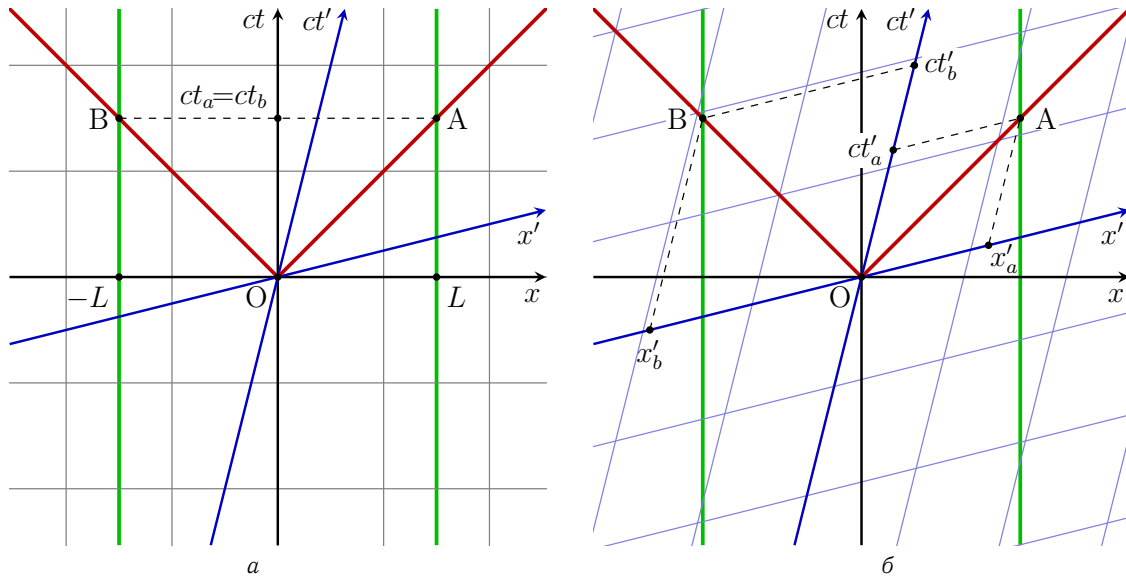


Рис. 8. Относительность одновременности: события, одновременные в К-системе (а), происходят в разное время в К'-системе (б)

Для нахождения коэффициентов запишем преобразования в виде линейных уравнений, подставив (8) в (7):

$$\begin{aligned} ct' &= a_{00}ct + a_{01}x; \\ x' &= a_{10}ct + a_{11}x. \end{aligned} \tag{9}$$

Вспользуемся геометрическим подходом. Нарисуем две диаграммы Минковского в К- и К'-системах соответственно (см. рис. 9, а и б. На первой диаграмме оси К'-системы повернуты внутрь на угол $\alpha = \arctg \beta$, на второй — оси К-системы повернуты наружу на тот же угол. Это эквивалентно движению, скорость которого направлена в отрицательную сторону оси x' .

Рассмотрим событие Р, имеющее временную координату $ct_p = 0$. Такое событие на диаграмме лежит на оси координат x . В К'-системе оно имеет координаты $ct'_p = a_{01}x_p$, $x'_p = a_{11}x_p$. На диаграмме Минковского для К'-системы

$$\frac{ct'_p}{x'_p} = \frac{a_{01}}{a_{11}} = -\operatorname{tg} \alpha = -\beta. \tag{10}$$

Для события S, лежащего на оси времени, $x_s = 0$. Его координаты в К'-системе равны $ct'_s = a_{00}ct_s$, $x'_s = a_{10}ct_s$, и

$$\frac{x'_s}{ct'_s} = \frac{a_{10}}{a_{00}} = -\operatorname{tg} \alpha = -\beta. \tag{11}$$

Подставив (10) и (11) в (9), получим систему двух уравнений с двумя неизвестными коэффициентами:

$$\begin{aligned} ct' &= a_{00}ct - \beta a_{11}x; \\ x' &= a_{11}x - \beta a_{00}ct. \end{aligned}$$

Найдём коэффициенты уравнений, подставив эти величины в соотношение (6), полученное для световой сферы:

$$x^2 - (ct)^2 = (a_{11}x - \beta a_{00}ct)^2 - (a_{00}ct - \beta a_{11}x)^2.$$

Упростив его, получим выражение для Лоренц-фактора γ :

$$a_{00} = a_{11} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \geq 1. \tag{12}$$

Запишем преобразования Лоренца в симметричном компактном виде: прямое

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x), \\ x' &= \gamma(x - \beta ct), \\ y' &= y, \quad z' = z, \end{aligned} \tag{13}$$

и обратное

$$\begin{aligned} ct &= \gamma(ct' + \beta x'), \\ x &= \gamma(x' + \beta ct'), \\ y &= y', \quad z = z'. \end{aligned} \tag{14}$$

Проанализируем полученные преобразования с точки зрения перехода к классической механике ($\beta \rightarrow 0$). Поскольку $\gamma \rightarrow 1$, то $x' \rightarrow x - \beta ct$, как и ожидалось. Однако $ct' \rightarrow ct - \beta x$, что противоречит преобразованиям Галилея. Для разрешения этого парадокса выразим время явно: $t' \rightarrow t - \beta x/c$. Очевидно, что величина x/c — время, за которое свет проходит расстояние x — является пренебрежимо малой в лабораторных условиях.

Знаки в прямом и обратном преобразовании легко запомнить с помощью мнемонического правила [6,

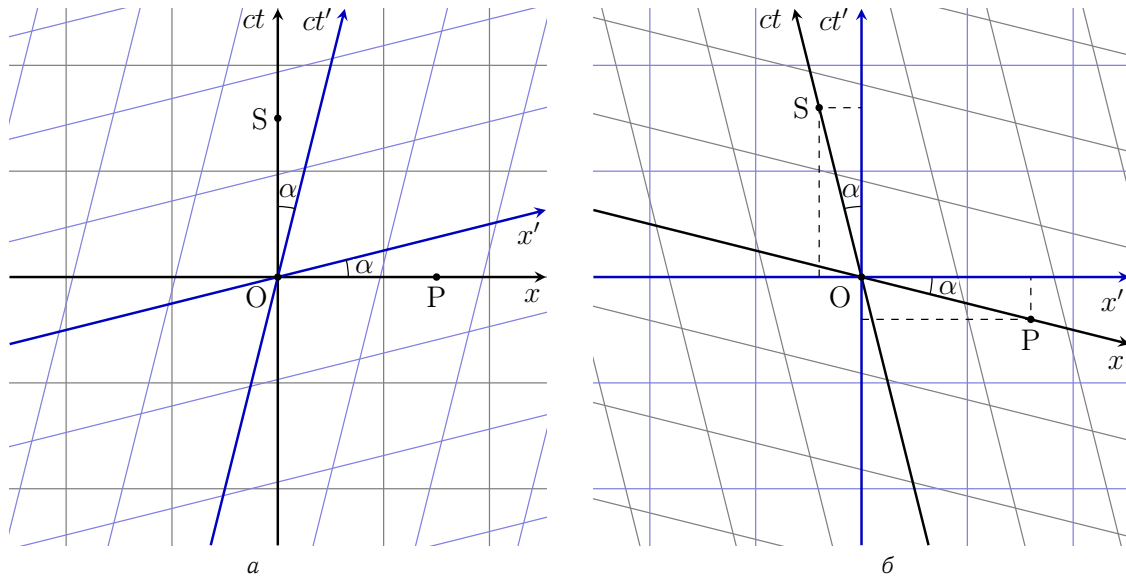


Рис. 9. К выводу преобразований Лоренца. События S и P, происходящие на координатных осях K–системы, на диаграмме Минковского: а — для K–системы; б — для K′–системы

с. 60], сформулированного В.И. Николаевым. В используемых обозначениях его можно сформулировать следующим образом: в правой части выражения — либо «штрих» (вертикальная черта), либо «минус» (горизонтальная) [6, с. 163].

С использованием унифицированных координат симметрия преобразований Лоренца прослеживается ещё более явно:

$$\begin{aligned} {}^0x' &= \gamma({}^0x - \beta {}^1x), \\ {}^1x' &= \gamma({}^1x - \beta {}^0x), \\ {}^2x' &= {}^2x, \quad {}^3x' = {}^3x, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} {}^0x &= \gamma({}^0x' + \beta {}^1x'), \\ {}^1x &= \gamma({}^1x' + \beta {}^0x'), \\ {}^2x &= {}^2x', \quad {}^3x = {}^3x'. \end{aligned}$$

Эти преобразования позволяют точно нарисовать координатную сетку, отметив точки с кратными координатами и соединив их прямыми. Из рис. 9, а видно, что пространственный масштаб изменяется. Это можно понять, рассмотрев мировую линию светового импульса, например, событие А на рис. 8: в K–системе эта точка имеет координаты $(L; L)$, а в K′

$$ct'_a = x'_a = \gamma(L - \beta L) = L \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} < L.$$

Преобразования Лоренца — основа решения задач на кинематику СТО. Для их корректного использования необходимо правильно выделять те события, которые описываются условиями задачи. Наглядность диаграммы Минковского позволяет упростить этот процесс.

Задачи

- 2.1. Две ракеты движутся на наблюдателя, находящегося в начале координат K–системы, по одной прямой с разных сторон. Скорость первой ракеты $v_1 = 3c/4$, скорость второй $v_2 = -c/4$. В нулевой момент времени по часам наблюдателя они находятся в точках с координатами $x_1 = -L, x_2 = L$. Изобразите их мировые линии Минковского и обозначьте на каждой из них отрезки, соответствующие пространственно-временным координатам встречи.
- 2.2. Поезд, имеющий в K–системе длину L , проезжает тоннель длиной L с постоянной скоростью v . Свяжите K′–систему с поездом и изобразите на диаграмме Минковского мировые линии объектов (голова и хвост поезда, начало и конец тоннеля). Проанализируйте, одновременно ли в K– и K′–системах голова и хвост поезда совпадают с началом и концом тоннеля.
- 2.3. Ракета движется со скоростью $v_0 = c/2$ относительно неподвижного наблюдателя. В некоторый момент времени с ракеты запускают вперёд и назад по направлению её движения два зонда со скоростями $v' = c/4$ относительно ракеты. Нарисуйте мировые линии этих зондов относительно наблюдателя. *Подсказка:* при построении ориентируйтесь на мировую линию светового импульса.

3. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ

При выводе преобразований Лоренца (13) для нахождения коэффициентов матрицы перехода (8) использовалось условие для точки на световой сфере (6). Это означает, что оно применимо для координат любого события

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2.$$

Эта величина для любого события **инвариантна**, то есть не зависит от выбора системы отсчёта. Для событий А и В по аналогии с пространственным интервалом Δr_{ab} , где

$$\begin{aligned} \Delta r_{ab}^2 &= \Delta x_{ab}^2 + \Delta y_{ab}^2 + \Delta z_{ab}^2 = \\ &= (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2, \end{aligned}$$

и временным интервалом

$$\Delta t_{ab} = t_b - t_a$$

можно ввести величину **пространственно-временного интервала** Δs_{ab} :

$$\begin{aligned} \Delta s_{ab}^2 &= \Delta r_{ab}^2 - c^2 \Delta t_{ab}^2 = \\ &= \Delta x_{ab}^2 + \Delta y_{ab}^2 + \Delta z_{ab}^2 - (c\Delta t_{ab})^2 = \\ &= (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2 - c^2(t_b - t_a)^2. \end{aligned} \tag{15}$$

Для запоминания этой формулы можно использовать мнемоническое правило, шутивно обыгрывающее сходство дефиса и знака «минус»: *«Интервал какой? Пространственно-минус-временной»*. Далее по тексту именно эта величина и называется **интервалом**. После введения этой величины для обучения использованию преобразований Лоренца желательно решить со студентами задачу 4.1 из этого раздела.

Исходя из значения, интервалы делят на:

- пространственноподобные** ($\Delta r > c\Delta t$, $\Delta s^2 > 0$, Δs — действительный): пространственный вклад всегда больше временного. Это означает, что выбором скорости новой системы отсчёта относительно старой можно сделать события одновременными ($c\Delta t' = 0$), но обнулить расстояние между событиями невозможно;
- времениподобные** ($\Delta r < c\Delta t$, $\Delta s^2 < 0$, Δs — мнимый): события можно заставить происходить в одной точке ($\Delta r = 0$), но в разное время;
- светоподобные** ($\Delta r = c\Delta t$, $\Delta s^2 = 0$).

На рис. 10 сопоставлены события в каждой точке диаграммы Минковского и виды интервалов между ними и событием ($x=0; ct=0$). Синими и красными линиями отмечены геометрические места тех событий, которые могут отображаться друг в друга при переходе

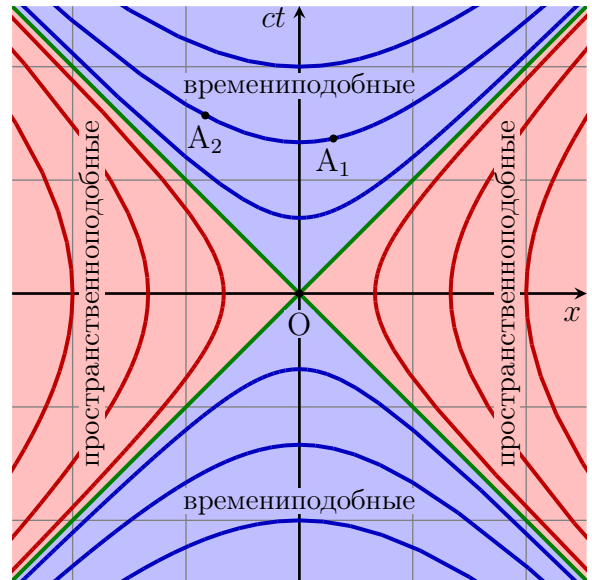


Рис. 10. Виды интервалов на диаграмме Минковского. Зелёными линиями отмечены события, разделённые с событием O светоподобными интервалами. При привязке диаграммы к другой системе отсчёта событие А1 будет отображаться как событие А2, лежащее вследствие преобразования координат на той же линии

в другие системы отсчёта, движущиеся относительно исходной.

Тип интервала играет важную роль в установлении причинно-следственной связи между событиями. Если события разделены **пространственноподобным** интервалом, то она невозможна в принципе: в некоторой системе отсчёта они происходят одновременно, и ни одно из них не может являться следствием другого. Можно подобрать и такую систему отсчёта, в которой эти события происходят в обратной последовательности. Также верно и то, что они не могут происходить с одним и тем же телом.

Времениподобный интервал разделяет события, которые в некоторой системе отсчёта будут происходить последовательно в одной и той же точке пространства, причём их последовательность невозможно изменить подбором системы отсчёта. В этом случае они *могут* (но не обязаны) быть причиной и следствием.

Особняком стоит **светоподобный** интервал: если связанные им события происходят в одной точке пространства, то они одновременны в любой инерциальной системе отсчёта и наоборот. Такие события не могут происходить одновременно в разных точках или же в одной точке в разное время. Они *могут* быть связаны причинно-следственной связью (для этого нужна скорость передачи сигнала, равная скорости света), и не могут происходить с одним и тем же массивным телом (оно не может разогнаться до скорости света).

Таким образом, на диаграмме можно выделить области возможных причин события («**прошлое**») и его возможных следствий («**будущее**»), они изображены

на рис. 11.

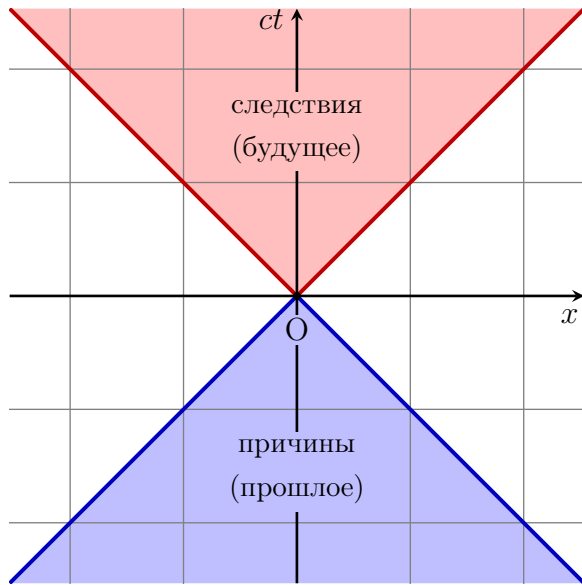


Рис. 11. Области событий, которые могут быть связаны причинно-следственной связью с событием O: возможные причины (прошлое) и возможные следствия (будущее)

Интервал можно рассматривать и как своеобразное «расстояние» (скалярное произведение) в четырёхмерном псевдоевклидовом пространстве Минковского. В общем случае оно задаётся билинейной формой через разность координат $\Delta(x^i)$ векторов, соединяющих события в этом пространстве, и метрический тензор g_{ij} :

$$\Delta s^2 = \sum_{i,j=0\dots3} g_{ij} \Delta(x^i) \Delta(x^j).$$

Для пространства Минковского

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Измерение времени

Для измерения интервала времени проведём следующий мысленный эксперимент. В качестве часов рассмотрим движущееся со скоростью V устройство, периодически изменяющее своё состояние. Первое изменение состояния (событие O) пусть произойдёт в начале координат системы отсчёта часов K' в нулевой момент времени, второе — в момент времени $t'_a = \tau_0$ также в начале координат. Таким образом, в **собственной** системе отсчёта (в ней часы неподвижны) измеряемый интервал равен $c\tau_0$; на рис. 12 он соответствует трём клеткам синей (косоугольной) сетки.

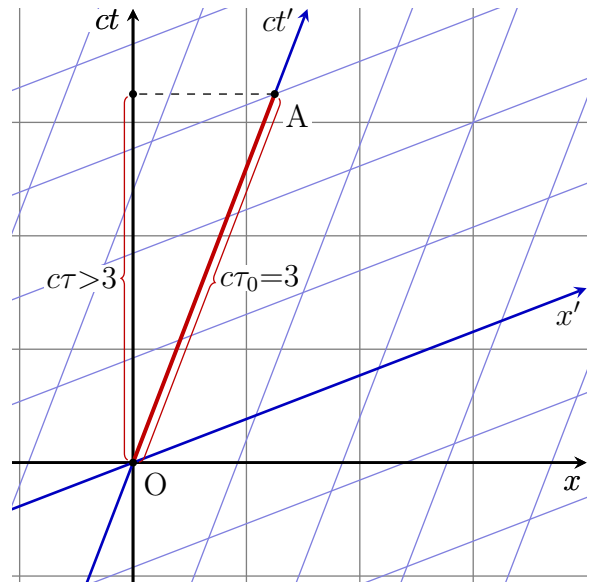


Рис. 12. Измерение интервала времени. Заданы $x'_a = 0$, $ct'_a = c\tau_0$

Время τ в K -системе, когда происходит событие A, можно рассчитать из преобразований Лоренца:

$$ct = ct_a = \gamma(ct'_a + \beta x'_a) = \gamma ct'_a = \gamma c\tau_0,$$

так как в K' -системе часы покоятся в начале координат. Поскольку $\gamma > 1$, то с точки зрения наблюдателя в K -системе движущиеся часы зафиксируют между событиями O и A меньший временной интервал τ_0 , чем неподвижные τ — то есть идут медленнее.

Измерение длины

Свяжем с движущимся отрезком K' -систему отсчёта и построим на диаграмме мировые линии движения его концов (см. рис. 13). **Измерение длины** этого отрезка сводится к *одновременному* нахождению координат его концов. Из рисунка видно, что в K -системе одновременными являются события O и B, а в K' — O и C. В собственной системе отсчёта отрезок имеет длину $l_0 = 3$ клетки; в лабораторной его длина l меньше.

Обратим внимание на то, что длины отрезка в разных системах отсчёта нельзя напрямую связать преобразованиями Лоренца или интервалом, поскольку измерение положения в них — разные события.

Свяжем x -координаты событий B и C, используя наклон мировой линии $\tan \alpha = \beta$:

$$x_c = x_b + \beta ct_c. \tag{16}$$

Также можно связать координаты события C, воспользовавшись наклоном оси x' :

$$ct_c = \beta x_c. \tag{17}$$

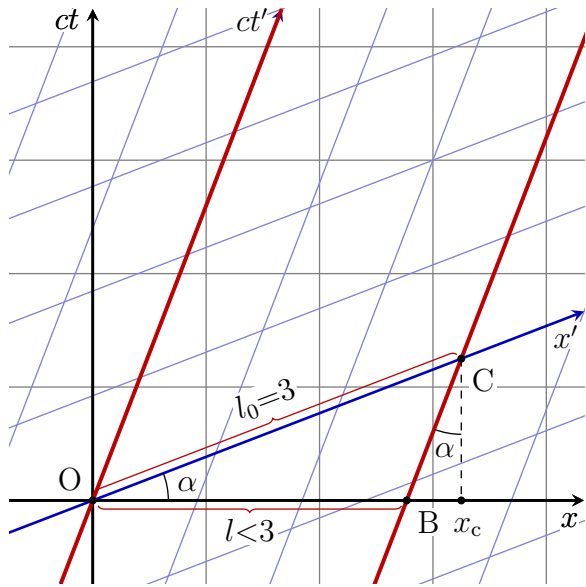


Рис. 13. Измерение длины отрезка. Заданы $x'_c = l_0, ct'_c = 0$

Объединяя (16) и (17), получим

$$x_c = \frac{x_b}{1 - \beta^2}, \quad ct_c = \frac{\beta x_b}{1 - \beta^2},$$

и из преобразований Лоренца

$$l_0 = x'_c = \gamma(x_c - \beta ct_c) = \gamma x_b = \gamma l;$$

в неподвижной ИСО длина тела l меньше, чем собственная длина l_0 .

Измерение частоты

Для измерения частоты излучения ν источника расположим его в начале координат некоторой системы отсчёта. Будем считать, что излучение представляет собой периодическую последовательность световых импульсов, разбегающихся от него. Тогда, если он связан с началом координат неподвижной системы (как на рис. 14, а), то диаграмма показывает связь между периодом источника $T_0 = 1/\nu_0$ и его длиной волны $\lambda_0: \lambda_0 = cT_0$.

Теперь свяжем источник с началом координат K' -системы отсчёта, движущейся со скоростью $V = \beta c$ (синяя линия на рис. 14, б. Все события на этой мировой линии до момента $t = 0$ (ниже события O , например P) соответствуют приближению источника к началу координат неподвижной K -системы отсчёта, и их характеристики отмечаются верхним индексом «+». События после $t = 0$ (выше события O , например S) описывают его удаление от начала координат, их характеристики маркируются индексом «-».

Таким образом, известны следующие координаты со-

бытий:

$$t'_p = -T_0, \quad x'_p = 0; \\ t'_s = T_0, \quad x'_s = 0.$$

Выразим их координаты в K -системе через преобразования Лоренца

$$t_p = -\gamma T_0, \quad t_s = \gamma T_0$$

и через наклон мировой линии

$$x_p = \beta ct_p, \quad x_s = \beta ct_s.$$

Наблюдатель, расположенный в начале координат K -системы, увидит изменение периода импульсов T^+ приближающегося и T^- удаляющегося источников по сравнению с периодом T в той системе, где источник покоится:

$$cT^+ = |ct_p - c\delta t| = |ct_p - x_p| = \\ = |ct_p(1 - \beta)| = \gamma cT_0(1 - \beta),$$

$$cT^- = ct_s + c\delta t = ct_s + x_s = \\ = ct_s(1 + \beta) = \gamma cT_0(1 + \beta).$$

Так можно получить выражения для частоты приближающегося

$$\nu^+ = \frac{1}{T^+} = \frac{\nu_0}{\gamma(1 - \beta)} = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta)^2}} = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

и удаляющегося источников

$$\nu^- = \frac{1}{T^-} = \frac{\nu_0}{1 + \beta} = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}.$$

Эти формулы описывают **продольный эффект Доплера**, когда движение источника и распространение излучения происходят вдоль одной линии.

Задачи

- Докажите, что интервал между событиями A и B инвариантен относительно выбора системы отсчёта. Подсказка: запишите формулу (15) в K' -системе, примените преобразования Лоренца (13).
- Собственное время жизни нестабильной частицы τ_0 . Какой путь l пролетит эта частица, двигаясь от рождения (событие A) до распада (событие B) с постоянной скоростью, в той лабораторной системе, в которой время её жизни составляет τ ? Подсказка 1: $x_a = x'_a = t_a = t'_a = 0, x_b = l, t_b = \tau, t'_b = \tau_0$. Подсказка 2 (альтернативный способ решения): воспользуйтесь инвариантностью интервала.

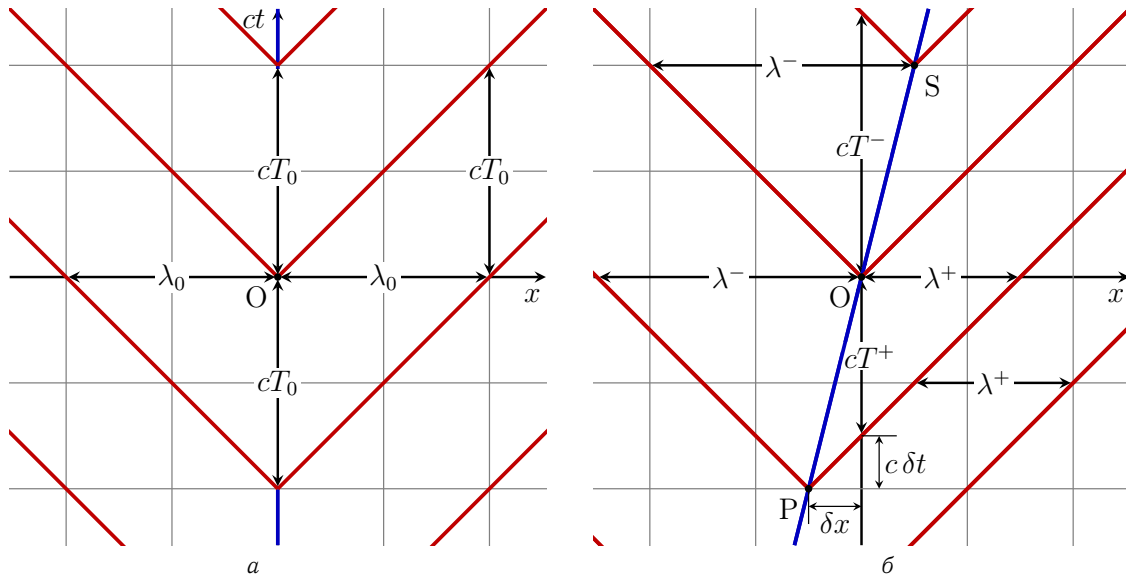


Рис. 14. Измерение длины волны λ и периода T источника: a — неподвижный источник находится в начале координат; b — источник движется, событие P — движение источника к началу координат K -системы, S — от её начала координат

3.3. (См. задачу 2.2) Поезд, имеющий в K -системе длину L , проезжает тоннель длиной L с постоянной скоростью v . В течение какого времени голова поезда проезжает тоннель по часам машиниста и часам неподвижной системы отсчёта? Где находится хвост поезда в тот момент времени (по часам машиниста), когда голова выезжает из тоннеля?

3.4. (См. задачу 1.3) Два поезда, имеющие длину в системе отсчёта Земли L каждый, движутся со скоростями v_1 и v_2 навстречу друг другу (v_1 — по направлению оси x). Момент их встречи (событие O) примем за начало отсчёта координаты и времени. В какой момент времени голова первого поезда поравняется с хвостом второго (по часам неподвижной системы отсчёта; первого поезда; второго поезда)?

3.5. (См. задачу 1.2) В системе отсчёта Земли космический корабль движется с постоянной скоростью $v = 0,5c$ по направлению к ней. Находясь на расстоянии L от Земли, корабль излучает в её сторону короткий импульс длительностью τ_0 . Пока импульс принимается на Земле, в сторону корабля излучается ответный импульс. Импульсы какой длительности зафиксируют на Земле и на корабле?

3.6. Пи-мезоны π^0 и π^+ родились в лабораторной системе отсчёта на оси X одновременно на расстоянии $L = 6$ нм друг от друга и двигаются в положительном направлении оси со скоростями $v_1 = 0,8c$ и $v_2 = 0,6c$ соответственно. Собственные времена их жизни составляют $\tau_1 = 8,7 \cdot 10^{-17}$ с и $\tau_2 = 2,6 \cdot 10^{-8}$ с. Успеет ли

первая частица догнать вторую до того, как распадётся хотя бы одна из них? [8, задача 8.98]

4. ТРЁХМЕРНАЯ ДИАГРАММА МИНКОВСКОГО

При изучении кинематики СТО не всегда можно ограничиться одной пространственной координатой: изучение движения точки относительно K - и K' -систем требует по крайней мере двух (x и y).

Вычисления становятся несколько нагляднее, если вместо координат ct, x, y использовать их унифицированные обозначения ${}^0x, {}^1x, {}^2x$. Проекция скорости точки в K' -системе на ось X' выражается через производную

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = c \frac{d({}^1x')}{d({}^0x')} = c \frac{d({}^1x')}{d({}^0x')} \cdot \frac{d({}^0x)}{d({}^0x')} = \frac{v_x - V}{1 - \beta v_x/c}.$$

Проведя аналогичные преобразования для v'_y , получим, что

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = c \frac{dx'_2}{dx'_0} = c \frac{dx'_2}{dx_0} \cdot \frac{dx_0}{dx'_0} = \frac{v_y}{\gamma(1 - \beta v_x/c)} :$$

видно, что на результат влияет не только проекция относительной скорости на ось Y , но также и её проекция на ось X .

Формально этот факт не может вызывать сомнений, но порождает у современных студентов вопрос: почему одна проекция скорости влияет на другую? Наглядный ответ на него можно дать с помощью трёхмерной диаграммы Минковского. Сравним на ней движения двух материальных точек (из O в A и из O в B), перемещения которых в K -системе за один и тот же интервал времени вдоль оси Y совпадают, тогда как вдоль

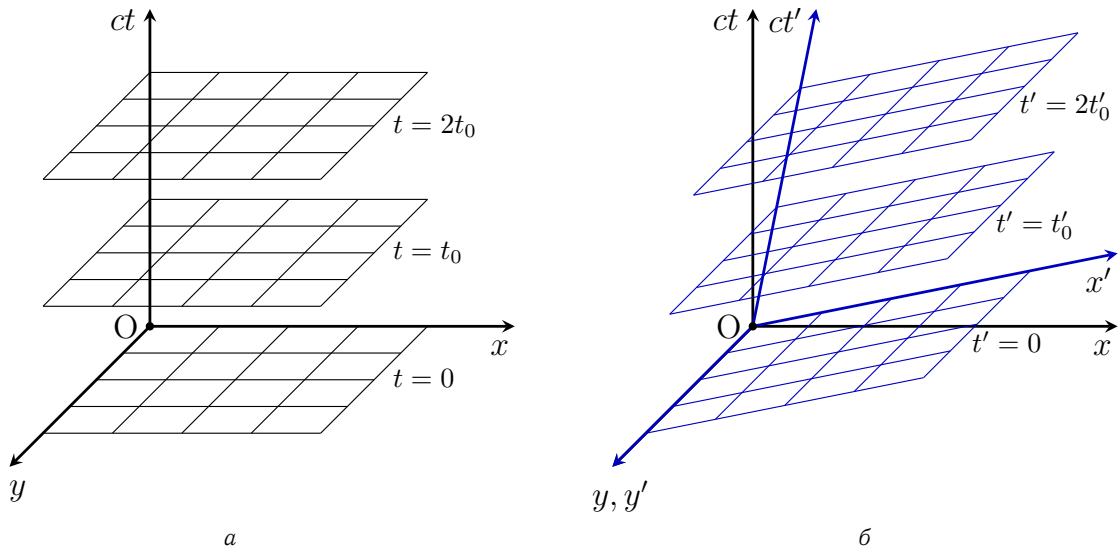


Рис. 15. Трёхмерное представление диаграммы Минковского для одной временной и двух пространственных координат: *a* — К-система; *б* — К'-система

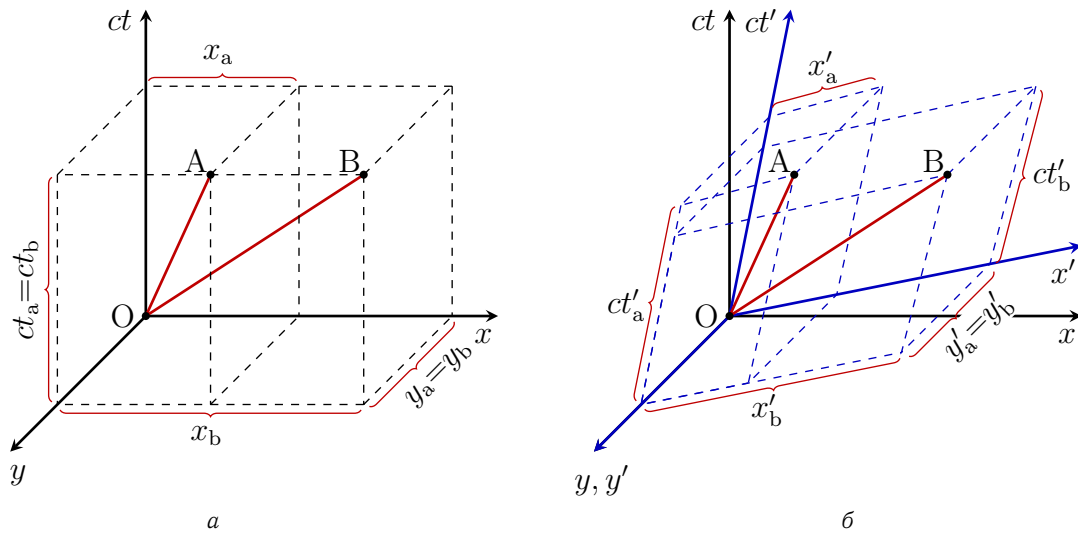


Рис. 16. Сравнение движений двух точек в разных системах отсчёта

оси X — различаются (рис. 16). Если в К-системе $y_a = y_b$ и $ct_a = ct_b$, то в К'-системе $y'_a = y'_b$, но $ct'_a \neq ct'_b$: времена движения различаются, поскольку в преобразованиях Лоренца для времени участвует также пространственная координата. Поэтому скорость v'_y также зависит от скорости v_x , хотя и по другому закону, нежели v'_x .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Специальная теория относительности — одна из основ современной физики и научного мировоззрения в целом, поэтому она изучается в первом же семестре курса общей физики. Понимание её формул нелегко даётся студентам, и часто им сложно воспроизвести

выводы релятивистских эффектов, таких как замедление времени и сокращение длины. Диаграмма Минковского наглядно показывает, как получить эти выводы. Это должно способствовать более прочному усвоению знаний в этой области физики.

Благодарности

Автор выражает благодарность студентам 110 учебной группы набора 2021 г. за ценные вопросы, активное обсуждение и использование изложенного методического подхода в процессе изучения кинематики СТО.

-
- [1] *Авакянц Л.П., Шихлинская Р.Э., Штыркова А.П.* Разработка семинаров по механике и теории относительности. М., 1984.
- [2] *Бушина Т.А., Комарова М.А., Никанорова Е.А. и др.* Механика. Разработка семинарских занятий. М., 2014.
- [3] *Гарднер М.* Теория относительности для миллионов. М., 1967.
- [4] *Иродов И.Е.* Механика. Основные законы. М., 2010.
- [5] *Акоста В., Кован К., Грэм Б.* Основы современной физики. М., 1981.
- [6] *Николаев В.И., Бушина Т.А.* Физика: учимся размышлять. М., 2015.
- [7] *Либшер Д.-Э.* Теория относительности с циркулем и линейкой. М., 1980.
- [8] *Заикин Д.А., Овчинкин В.А., Прут Э.В.* Сборник задач по общему курсу физики. Ч. 1. Механика. Термодинамика и молекулярная физика / Под ред. В.А. Овчинкина. М., 2013.
-

Spacetime diagram as visual instrument for relativistic kinematics understanding

A. V. Seliverstov

*Department of General Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia
E-mail: panopticum@physics.msu.ru*

The experience of teaching general relativity based on the spacetime diagram, or Minkowski diagram, is discussed. Main special relativity effects, such as time dilation and length contraction, deduce easily by geometrical constructions on the diagram and «event» and «measurement» concepts. PACS: 01.40.Di, 01.40.gb, 01.55.+b6 03.30.+p.

Keywords: general physics, didactics of physics, special relativity, spacetime diagram.

Received 11 November 2022.

Сведения об авторе

Селиверстов Алексей Валентинович — канд. пед. наук, ст. преподаватель; тел.: (495) 939-14-89,
e-mail: panopticum@physics.msu.ru.
