Кинетическое уравнение Больцмана и проблема обоснования статистической механики

П. Н. Николаев*
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
физический факультет, кафедра квантовой статистики и теории поля
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
(Поступила в редакцию 07.07.2022; подписана в печать 04.08.2022)

В работе исследуется роль кинетического уравнения Больцмана в процессе формирования проблемы обоснования статистической механики. Представлены основные аспекты данной проблемы, а также ее современное состояние. Рассмотрена деятельность Н. Н. Боголюбова по решению вопросов, относящихся к обоснованию статистической механики.

PACS: 01.65.+g, 01.70.+w УДК: 53.
Ключевые слова: история науки, философия науки.

ВВЕДЕНИЕ

В начале семидесятых годов XIX века актуальной стала проблема развития молекулярно-кинетической теории и обоснование на этой основе второго начала термодинамики. В первую очередь это касалось решения задачи перехода от обратимых законов механики к необратимому характеру тепловых процессов.

Важную роль в решении этой проблемы сыграло полученное Больцманом кинетическое уравнение, а также введенная им H–функция. Доказанная H–теорема привела к длительной дискуссии, которая помогла лучше сформулировать проблему перехода от механического описания систем, состоящих из большого числа частиц, к статистическому описанию. Предпринятые многочисленные попытки решить данную проблему имели исключительно важные последствия как с точки зрения обоснования термодинамики так и статистической механики [1–16].

В дальнейшем исследования Больцмана по статистическому обоснованию второго начала термодинамики были продолжены Гиббсом [6]. Они стали важным этапом в создании статистической механики [17, 18]. Статистические закономерности становятся важной частью физических исследований [19–22]. Гиббс считал, что статистическая механика имеет более широкие перспективы, выходя за пределы вопросов, связанных с обоснованием термодинамики [6].

В целом ряде работ отмечается, что в исследованиях Гиббса, как правило, нет ссылок на конкретные модели вещества [6, 23, 24]. В дальнейшем это позволило достаточно быстро построить квантовое обобщение уравнения Лиувилля.

Для состояния статистического равновесия Гиббсу удалось построить законченную теорию, а для неравновесных систем он высказал ряд важных идей, во многом определившим развитие данной науки.

Единая теория неравновесных систем фактически появилась лишь начиная с работ Боголюбова 40-х годов XX века [25]. Основополагающие результаты в этой области изложены в монографии [26]. До Боголюбова проблемы кинетики никогда не рассматривались с точки зрения динамической теории, а основными были методы, используемые еще Больцманом при получении своего кинетического уравнения. Метод Больцмана основан на полном исключении корреляции между динамическими состояниями молекул [26].

Время показало высокую эффективность заложенных в работах Боголюбова идей по созданию динамической теории в статистической физике. Они оказали значительное влияние и на решение ряда проблем, связанных с обоснованием статистической механики [27].

Рассмотрение начнем с интерпретации Больцманом соотношения механики и термодинамики.

1. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ БОЛЬЦМАНА

В начале семидесятых годов XIX века время Больцман переходит от попыток обоснования второго начала термодинамики, исходя в основном из особенностей механического движения, к чисто статистическому описанию.

В 1872 г. он получает кинетическое уравнение без учета наличия внешнего поля [1]. Больцман также вводит в рассмотрение функцию, получившую в дальнейшем название H–функции. Для нее было показано, что она приближается к некоторому минимуму, оставаясь отрицательной. При достижении этого минимума устанавливается максвелловское распределение вне зависимости от начального распределения для процесса, длившегося долго.

Больцман отмечает, что если взять H–функцию со знаком минус, то последняя ведет себя аналогично энтропии [1, 2]. В этом он видит возможность обоснование второго начала термодинамики. Так первоначально появилась H–теорема.

«H–теорема Больцмана вызвала огромную и весьма плодотворную дискуссию, благодаря которой создался ряд новых научных направлений, например, так называемая эргодическая теория» — говориться в докладе Н. Н. Боголюбова и Ю. В. Саночкина, про-

* nikolaev@phys.msu.ru

читанного 5 сентября 1956 г. на заседании отделения физико-математических наук АН СССР, посвященном 50-летию со дня смерти Л. Больцмана [17, 18].

В общем виде, то есть при учете наличия внешнего поля, уравнение Больцмана получено в 1875 г. Но уже в следующем году Лошмидт высказывает свои возражения против H–теоремы, получившие название парадокса Лошмидта. Здесь впервые были противопоставлены механическая обратимость и термодинамическая необратимость [3, 4].

В 1877 г. Больцман отвечает на замечания Лошмидта. Он пишет, что H–теорема не утверждает, что величина H при любых начальных условиях системы будет обязательно убывать. Просто процессы с возрастанием энтропии более вероятны, чем процессы с ее убыванием [1].

Диспут, возникший вокруг данной проблемы, привел к тому, что Больцман переходит к чисто вероятностному доказательству H–теоремы. Он пишет, что доказательство возможно только на таких основаниях, которые предполагают применение исчисления вероятностей. Это утверждение имело исключительно важные последствия как с точки зрения обоснования термодинамики так и статистической механики [3, 5].

Больцман вводит представление о вероятности состояния системы. Статистические и динамические закономерности выступают у него в едином контексте. Он утверждает, что во всех случаях, где применим закон больших чисел, есть переход от менее вероятного состояния к более вероятному.

Работы Больцмана не вызвали на первых порах положительного отклика. Для этого был целый ряд причин. Две основные из них состояли в следующем.

Во-первых, до середины восьмидесятых годов XIX века более популярным было механическое обоснование второго начала термодинамики. Во-вторых, молекулярно-кинетическая теория большинством рассматривалась как гипотеза, не имеющая под собой серьезного экспериментального основания.

Ситуация стала меняться с начала XX века, чему способствовал целый ряд факторов [28]. Но и в дальнейшем, когда статистическое толкование второго закона термодинамики стало общепризнанным, дискуссии, связанные с интерпретацией H–теоремы продолжались. Дело в том, что данная тема касалась одной из наиболее важных, «великих проблем», современной физики, по мнению Гинзбурга, - вопроса о возрастании энтропии, необратимости и «стреле времени» [16].

2. СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА ГИББСА

Работы Больцмана по статистическому обоснованию второго начала термодинамики стали важным этапом в создании статистической механики. Название этой науке дал Гиббс [6]. Следует отметить, что Боголюбов в первых своих работах в данной области, как было принято большинством физиков [7–9], использовал название статистическая физика, но затем чаще стал применять, следуя Гиббсу, термин статистическая механика [10]. Сам термин статистическая механика также встречается достаточно часто [11–13].

Гиббс отмечает, что первые статистические исследования в области статистической механики провел Максвелл. Что касается исследований Больцмана, то он в своей статье 1871 года осуществляет явное рассмотрение большого числа систем и их распределения по фазам, а также постоянства или изменений этого распределения с течением времени.

«Но, несмотря на то, что возникновение статистической механики исторически обусловлено исследованиями в области термодинамики», — пишет Гиббс, — «она, очевидно, заслуживает независимого развития как в силу изящества и простоты своих принципов, так и потому, что она приводит к новым результатам и проливает новый свет на старые истины в областях, совершенно чуждых термодинамике. Более того, независимое изучение этого раздела механики, повидимому, дает наилучшую основу для изучения рациональной термодинамики и молекулярной механики» [6, с. 351]. Таким образом, использование двух разных названий — статистическая механика и статистическая физика — отражает разный взгляд авторов на основное содержание предмета данной науки.

Статистическую механику Гиббс построил, основываясь на аналитической механике, которая достигла высокой степени развития. За независимые переменные принимаются обобщенные координаты и обобщенные импульсы всех частиц. Для фазового объема справедлива теорема Лиувилля — он не изменяется при движении системы по фазовой траектории. Ключевым стало введение Гиббсом понятия фазового ансамбля — совокупности динамических систем (копий исходной системы), находящихся в различных микросостояниях.

Следует отметить, что совокупность аналогичных систем была введена в 1871 г. еще Больцманом для системы с заданной полной энергией под названием эргодов [18], то есть ансамблей с эргодическим распределением по состояниям. По терминологии Гиббса это микроканонический ансамбль. Понятие статистического ансамбля у Больцмана не получило дальнейшего развития, так как для задач кинетической теории газов, которыми он занимался, достаточно частного понятия статистического ансамбля, соответствующего распределению по координатам и импульсам отдельных молекул.

Для функции распределения в фазовом пространстве Гиббс выводит уравнение, которое в настоящее время принято называть уравнением Лиувилля. Сам по себе переход от уравнений Гамильтона к уравнению Лиувилля не приводит к статистической механике. Статистическое описание появляется на основе введения дополнительных допущений («размытость» начальных условий и т.п.).

Гиббс пишет: «Законы статистической механики применимы к консервативным системам с произвольным числом степеней свободы и являются точными». И далее: «Законы термодинамики легко получить из принципов статистической механики, неполным выражением которых они являются, но сами по себе эти принципы служат довольно-таки слепым проводником в наших поисках этих законов. В этом, вероятно, и заключается главная причина медленного развития рациональной термодинамики по сравнению с быстрым выводом следствий из ее законов, установленных эмпирически» [6, с. 351].

Для равновесных процессов Гиббс определил плотности вероятности для канонического, микроканонического и большого канонического ансамблей и отметил, что для того, чтобы распределения имели смысл, необходимо исключить из рассмотрения ряд случаев, «причем, очевидно, не такие, чтобы эти ограничения влияли на связь наших результатов с термодинамикой» [6, с. 376]. Далее он замечает, что «подобные ограничения существуют и в термодинамике. Для того, чтобы некоторая масса газа могла находиться в термодинамическом равновесии, необходимо, чтобы она была помещена в замкнутый объем. В бесконечном пространстве не существует термодинамического равновесия (конечной) массы газа. Наконец, представление о том, что две притягивающиеся частицы способны совершать бесконечную работу при переходе из одного положения (рассматриваемого как допустимое) в другое, совершенно чуждо нашим обычным представлениям о веществе, хотя вполне может подразумеваться в математической формуле» [6, с. 377].

Гиббс осуществил построение основных принципов и уравнений статистической механики. Исследование же вопросов, связанных с тем, для каких классов систем основные положения статистической механики выполняются, а для каких нет, он предлагал делать при рассмотрении конкретных случаев.

При построении статистической механики Гиббс исходил из общих уравнений, не опираясь на конкретные модели вещества. Это позволило в дальнейшем построить квантовое обобщение уравнения Лиувилля. Квантовый аналог обычно называют уравнением Неймана для матрицы плотности.

При описании систем в состоянии статистического равновесия Гиббсу удалось построить законченную теорию. Что касается неравновесных систем, то в основном он высказал ряд важных идей, которые в дальнейшем получили свое развитие.

Именно к Гиббсу восходит представление о перемешивании при движении систем в фазовом пространстве, которое он объясняет на примере перемешивания краски в несжимаемой жидкости.

Глубокий смысл имеет и замечание Гиббса о стремлении систем к равновесию за большие промежутки времени. Здесь фактически осуществляется два предельных перехода: один связан с элементом фазового пространства, по которому осуществляется усреднение, другой - со временем. Результат при этом зависит от порядка усреднения [6].

3. МЕТОД БОГОЛЮБОВА ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

До работ Боголюбова кинетические уравнения устанавливались на интуитивной основе. Боголюбов писал, что проблемы кинетики никогда не рассматривались с точки зрения динамической теории. Здесь основными были методы другого типа, используемые еще Больцманом при получении своего кинетического уравнения.

При таком подходе возникает внутреннее противоречие. С одной стороны, движение молекул трактуется как некоторый случайный процесс, а с другой — эффективные сечения рассеяния рассчитываются из уравнений механики. Данное рассмотрение характерно как для классической, так и для квантовой механики. В последнем случае учитываются также требования симметрии.

Боголюбовский метод, созданный в сороковых годах XX века, основан на предположении, что за время порядка длительности соударения многочастичные функции распределения становятся функционалами одночастичных функций, которые удовлетворяют в свою очередь кинетическому уравнению.

На следующем этапе, за время порядка гидродинамического времени, одночастичная функция становится функционалом макроскопических величин, которые удовлетворяют уравнениям гидродинамики.

В последующих работах по статистической механике Боголюбовым вначале строится теория возмущений, которая основывается на малости взаимодействия подсистем, а для дальнейшего анализа используется формализм функций распределения (либо матриц плотности — для квантового случая).

При этом, в отличие от работ 40-х годов XX века, под слабым взаимодействием понимается взаимодействие подсистемы S, в качестве которой выступает малая подсистема (в частном случае — состоящая из одной частицы), и большой (макроскопической) системы Σ.

При рассмотрении общих вопросов статистической механики, в том числе ее обоснования, до настоящего времени предпринимаются попытки противопоставления метода Гиббса и метода Больцмана [14]. Сам Больцман метод Гиббса считал более общим [1].

Боголюбов подчеркивал, что статистическую механику он строит, основываясь на методе Гиббса [10]. При этом под основным постулатом статистической механики, обеспечивающим ее применимость к термодинамике, является следующее утверждение: если рассматриваемая динамическая система является макроскопической системой, изолированной от внешних влияний и заключенной в некотором конечном макроскопическом объеме V, то наблюдаемые значения макроскопических динамических величин $f(q(t), p(t)) = f(x_t)$ стремятся при $t \to +\infty$ к постоянным значениям, представляемым средними этих величин, взятыми по равновесному распределению Гиббса. Здесь $x_t = (q(t), p(t))$ — точка в фазовом пространстве в момент времени t, $p(t)$ и $q(t)$ совокупность импульсов и координат, характеризующих систему.

В более краткой форме в этом случае говорят, что система приближается к состоянию статистического равновесия. При этом данный постулат применяется как для классических, так и для квантовых систем.

Предпринимались многочисленные попытки обоснования данного постулата в рамках классической механики. Они привели к созданию эргодической теории [15]. В рамках данной теории предполагается, что фазовая плотность ρ обладает тремя основными свойствами: 1) ρ удовлетворяет уравнению Лиувилля; 2) поведение фазовой плотности в момент времени t полностью определяется ее значениями для $t' < t$ и не зависит от значений $t' > t$; 3) ρ является достаточно гладкой функцией.

Рассмотрим, следуя [10], динамическую систему N частиц с гамильтонианом $H(x)$. Здесь x представляет собой фазовую точку, то есть совокупность импульсов и координат всех частиц. При этом будем считать, что инвариантная гиперповерхность $H(x) = E,\ E = \mathrm{const}$ заключена в конечной области точек (x). Эту гиперповерхность в дальнейшем и будем называть фазовым пространством.

Инвариантная мера Лиувилля

$$\prod_j dq_j dp_j$$

порождает на данной гиперповерхности инвариантную меру μ. Последнюю можно нормировать на единицу

$$\int d\mu = 1.$$

Пусть мера μ обладает свойством транзитивности, то есть фазовое пространство нельзя разбить на два инвариантных множества, каждое из которых обладало бы строго положительной мерой μ. Если x_t представляет фазовую точку системы в момент t при начальном условии $x_t = x$ для $t = 0$, тогда в случае транзитивности временная средняя почти везде в рассматриваемом фазовом пространстве приближается при $T \to +\infty$ к пространственной средней:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x_t)dt = \int f(x)d\mu.$$

Более наглядной становится аналогия с установлением статистического равновесия в случае динамических систем, обладающих свойством перемешивания [10]. Для таких систем

$$\int f(x_t)g(x)d\mu \xrightarrow[t\to\infty]{} \int f(x)d\mu \int g(x)d\mu.$$

Здесь $g(x)$ и $f(x)$ - две произвольные функции из $L_2(\mu)$. Выберем теперь $g(x) = \rho_0(x)$ - начальное распределение вероятности в данном фазовом пространстве. Тогда

$$\int f(x_t)\rho_0(x)d\mu \xrightarrow[t\to\infty]{} \int f(x)d\mu.$$

Для реальных систем свойство транзитивности, а тем более свойство перемешивания, установить достаточно сложно. Кроме того, эргодичность не является универсальным свойством механических систем. Некоторые из простейших наиболее важных систем не эргодичны [10]. Кроме того, система может быть эргодичной, но не обладать свойством перемешивания. Такой является, например, система гармонических осцилляторов [15].

Для рассмотрения неэргодических систем используют различные подходы. Например, переходят от полного фазового пространства к его частям, которые являются метрически неразложимыми. Либо выбирают из всех переменных те, которые являются эргодичными [15]. Таким образом, эргодичность, а особенно свойство перемешивания, налагают слишком сильные условия на рассматриваемые модели систем.

Боголюбов отмечает [10], что основные проблемы классической эргодической теории связаны с тем, что не учитывается макроскопический характер рассматриваемых систем, так как понятие макроскопичности трудно сформулировать математически так, чтобы ввести его в рамки общей теории динамических систем. Но для типичных случаев, рассматриваемых в физике, это сделать достаточно просто. В качестве примера он приводит систему N одинаковых частиц, находящихся в объеме V, гамильтониан которой имеет вид

$$H = \sum_{1\le i\le N} \left[\frac{p_i^2}{2m} + U_V(\vec{r}_i)\right] + \sum_{1\le i<j\le N} \Phi\left(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|\right).$$

Здесь $\Phi(r)$ - потенциальная энергия взаимодействия двух частиц, а потенциал $U_V(\vec{r}_i)$ вводится для учета конечности объема V.

Система будет макроскопической с математической точки зрения, если ее свойства рассматриваются в статистическом пределе, то есть $N \to \infty$, $V \to \infty$при условии, что $n = N/V$ остается постоянной. В качестве макроскопических динамических величин используются динамические величины аддитивного, бинарного и т.д. типов.

При таком подходе видно, что свойства транзитивности или перемешивания не должны обязательно выполняться при конечном объеме и числе частиц. Для этого необходимо соответствующее поведение предельных средних значений макроскопических средних величин при $t \to \infty$ после совершения предельного статистического перехода.

В случае квантовой механики отмеченный недостаток эргодической теории в стандартной формулировке становится еще более очевидным.

Для упрощения решения данной проблемы Боголюбов предлагает вначале получить из уравнения Лиувилля цепочку уравнений для частичных функций распределения и перейти в ней к статистическому пределу. На первом этапе данный переход проводится формально, так как доказательство представляет в общем случае сложную проблему. Из полученной цепочки в случае слабого взаимодействия уже можно получить уравнение Больцмана [10].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается вопрос о соотношении механической обратимости и термодинамической необратимости, который стал особенно актуальным после получения Больцманом своего кинетического уравнения. Введенная затем H−функция и доказанная H−теорема привели к длительной дискуссии. Эта дискуссия стимулировалась и тем фактом, что Больцман связал H−функцию с энтропией системы, то есть дал ей статистическую интерпретацию. Само же понятие энтропии стало использоваться в целом ряде областей физики, а также в других науках.

Гинзбург при перечислении наиболее важных, «великих проблем», современной физики (он их выделил три) поставил вопрос о возрастании энтропии, необратимости и «стреле времени» на первое место [16].

Статистическая механика была создана Гиббсом. При этом он считал, что эта наука имеет более широкие перспективы, выходящие за пределы вопросов, связанных с обоснованием термодинамики. Время полностью подтвердило справедливость этого утверждения. В современной физике статистическая механика Гиббса применяется для самых разных систем - и макроскопических, и обладающих конечным числом степеней свободы.

Но законченную теорию Гиббсу удалось построить лишь для состояния статистического равновесия. Для неравновесных систем он высказал ряд важных идей, которые хотя во многом и определили развитие данной науки, но требовали своего развития.

Фактически единая теория неравновесных систем появилась лишь начиная с работ Боголюбова. Он стал рассматривать проблемы кинетики с точки зрения динамической теории. Но такой подход хотя и имеет несомненные преимущества перед методами, используемыми еще Больцманом при получении своего кинетического уравнения, в свою очередь содержит еще целый ряд проблем, требующих своего решения [8].

Для решения этих проблем Боголюбов использует как общие результаты эргодической теории, так те следствия, которые получаются при переходе к статистическому пределу.

В качестве одного из способов решения проблем он предлагает перейти к системе зацепляющихся уравнений для частичный функций распределения (либо частичных матриц плотности в квантовом случае). В результате, как показывает практика, проще создать динамическую теорию систем, так как в этом случае становится яснее характер происходящих здесь процессов. В результате стало возможным получать кинетические уравнения, описывающие не только разреженный газ, но и справедливые для плотных систем, включая жидкость [25]. При этом можно использовать достаточно широкий класс потенциалов взаимодействия, не ограничиваясь больцмановским случаем твердых сфер [29, 30].

[1] *Boltzmann L.* Wissenschaftliche Abhandlungen. Leipzig. Bd. 1-3, 1909.
[2] *Brandsen S., Geng I.J., Gour G.* // Phys. Rev. E. 2022. **105**. 024117.
[3] *Базаров И.П., Геворкян Э.В., Николаев П.Н.* Неравновесная термодинамика и физическая кинетика. М.: изд-во Моск. ун-та, 1989.
[4] *Mohammed S., Reis T.* // Phys. Rev. E. 2021. **104**. 045309.
[5] *Talkner P.* // Rev. Mod. Phys. **92**. 2020. 041002.
[6] *Гиббс Дж.В.* Термодинамика. Статистическая механика. М.: Наука, 1982.
[7] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. М.: Наука, 1976.
[8] *Климонтович Ю.Л.* Статистическая физика. М.: Наука, 1982.
[9] *Ахиезер А.И., Пелетминский С.В.* Методы статистической физики. М.: Наука, 1977.
[10] *Боголюбов Н.Н.* Избранные университетские лекции. М.: изд-во Моск. ун-та, 2009.
[11] *Uhlenbeck J.E., Ford J.W.* Lectures in statistical mechanics. Providence, Rhode Island, 1963.
[12] *Croxton C.A.* Liquid state physics — a statistical mechanical introduction. Cambridge, 2009.
[13] *Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В.* Статистическая механика квантовых жидкостей и кристаллов. М.: Физматлит, 2006.
[14] *Roussel S., Cocco S., Monasson R.* // Phys. Rev. E. 2021. **104**. 034109.
[15] *Penrose O.* // Rep. Prog. Phys. 1979. **72**. P. 1937.
[16] *Гинзбург В.Л.* // УФН 2004. **174**. С. 1240.
[17] *Боголюбов Н.Н., Саночкин Ю.В.* // УФН 1957. **61**. С. 7.
[18] *Николаев П.Н.* // Ученые записки физического факультета. 2018. № 5. 1850101.
[19] *Пригожин И.* От существующего к возникающему. М., 1985.
[20] *Сачков М.В.* // Вопросы философии. 2006. № 1. С. 80.
[21] *Винер Н.* Кибернетика и общество. М., 1958.
[22] *Уленбек Г.* // УФН. 1971. **103**. С. 275.
[23] *Спасский Б.И.* История физики. Ч. II. М.: Высшая школа, 1977.
[24] *Гельфер Я.М.* История и методология термодинамики

и статистической физики. М.: Высшая школа, 1981.
[25] *Николаев П.Н.* // Ученые записки физического факультета. 2021. № 5. 1850101.
[26] *Боголюбов Н.Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике. М.-Л.: Гостехиздат, 1946.
[27] *Боголюбов Н.Н.* // ЭЧАЯ 1973. **9**. С. 501.
[28] *Планк М.* Избранные труды. М.: Наука, 1975.
[29] *Grmela M.* // J. Stat. Phys. 1971. **3**. P. 347.
[30] *Takata S., Matsumoto T., Hattory M.* // Phys. Rev. E. 2021. **92**. 062110.

The kinetic Boltzmann equation and the problem of the foundation of statistical mechanics

P. N. Nikolaev

Department of Quantum Statistics and Field Theory, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia
E-mail: nikolaev@phys.msu.ru

In the paper it is investigated the role of the Boltzmann kinetic equation in the process of formation of the problem of the foundation of statistical mechanics. The main aspects of this problem, as well as its current state, are presented. There is considered the activity of N. N. Bogolyubov on solving questions related to the foundation of statistical mechanics.

PACS: 01.65.+g , 01.70.+w
Keywords: history of science, philosophy of science.
Received 07 July 2022.

Сведения об авторе

Николаев Павел Николаевич — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-12-90, e-mail: nikolaev@phys.msu.ru.