Сферически-симметричные сингулярные гиперповерхности в конформной гравитации

И. Д. Иванова*
Институт ядерных исследований РАН
Россия, 117312, Москва,
пр-т 60-летия Октября, д. 7а
(Поступила в редакцию 21.05.2022; подписана в печать 22.06.2022)

Поверхностный тензор энергии–импульса получен для действия идеальной жидкости с переменным числом частиц в эйлеровых переменных. Продемонстрировано, что в отсутствии внешних полей «внешнее давление» и «внешний поток» связаны с рождением частиц двойным слоем. Для времениподобных и пространственноподобных сферически–симметричных сингулярных гиперповерхностей уравнения движения, наряду с условиями Лихнеровича, выражены с помощью инвариантов сферической геометрии. Показано, что для сферически–симметричных тонких оболочек непрерывны двумерная скалярная кривизна и двумерный лапласиан от радиуса. В качестве приложений исследованы сферически–симметричные времениподобные и пространственноподобные сингулярные гиперповерхности, разделяющие два решения сферически–симметричной конформной гравитации, в частности, использованы различные вакуумы и решения типа Вайдья.

PACS: 02.40.Ky, 02.40.-k, 04.20.Fy, 04.50.Kd УДК: 53.02, 531-9.
Ключевые слова: конформная гравитация, сингулярные гиперповерхности, тонкая оболочка, двойной слой.

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что любую теорию поля можно описать с помощью вариационного принципа. В общей теории относительности метрический тензор является динамической переменной. Действие, используемое в этой вариационной формулировке, представляет из себя Эйнштейна-Гильберта, которое имеет второй порядок по производным метрики. Теоретически, возможны более сложные действия с производными более высокого порядка. Эти теории, однако, часто отвергаются, поскольку они подчиняются теореме Остроградского о неустойчивости [1], которая классифицирует все невырожденные теории высших производных как неустойчивые по Ляпунову. Однако, несмотря на это, в последнее время наблюдается всплеск интереса к таким теориям по ряду причин.

В отличие от общей теории относительности теории высших производных являются перенормируемыми [2–4]. Таким образом, они могут играть важную роль в квантовании гравитации.

Несколько групп исследователей независимо друг от друга обнаружили [5–16], что квантовые поправки, возникающие в однопетлевом приближении при перенормировке в любой релятивистской квантовой теории поля, содержат слагаемые, отсутствующие в действии Эйнштейна-Гильберта. Так еще в работе [5] было показано, что для устранения логарифмической расходимости в средних значениях компонент тензора энергии–импульса набора квантованных полей материи, взаимодействующих с классическим гравитационным полем, необходимо добавление квадратичных по тензору Римана поправок к лагранжиану. Теория, которая включает соответствующие квадратичные кобинации в гравитационное действие, известна как квадратичная гравитация.

Сингулярные гиперповерхности, т.е. гиперповерхности, на которых тензор кривизны имеет особенности, а именно, испытывает скачок или содержит слагаемые пропорциональные δ–функции, служат для описания локальной концентрации материи или энергии на данной гиперповерхности. Более того, изучение сингулярных распределений материи позволяет построить дополнительный класс точных решений, описывающих различные физические модели, на основе метрик, которые являются известными решениями уравнений движения в объеме для соответствующей теории гравитации.

В общей теории относительности уравнения поля для сингулярной гиперповерхности впервые были получены В. Израэлем [17–19]. Аналог уравнений Израэля в квадратичной гравитации был открыт Дж.М.М. Сеновийей [20–25]. Их основное отличие от общей теории относительности состоит в возможности возникновения производной дельта–функции в уравнениях движения. Таким образом, в квадратичной гравитации помимо тонких оболочек, появляется дополнительный тип сингулярных гиперповерхностей, называемых двойным слоем. Существование двойного слоя напрямую связано с «внешним давлением» и «внешним потоком» — компонентами поверхностного тензора энергии–импульса, которые равны нулю в общей теории относительности. Для того, чтобы пояснить их физический смысл, в настоящей работе соответствующие компоненты поверхностного тензора энергии–импульса были получены вариацией по метрике действия материи, а именно, действия идеальной жидкости с переменным числом частиц [26].

Одно из сочетаний коэффициентов квадратичных членов в лагранжиане квадратичной гравитации крайне примечательно. Это случай конформной гра-

* pc_mouse@mail.ru

витации, когда квадратичная часть гравитационного лагранжиана сводится к квадрату тензора Вейля, который является бесследовой частью тензора кривизны. Тензор Вейля инвариантен относительно локального конформного преобразования, при котором весь метрический тензор умножается на некоторую функцию, называемую конформным фактором. Тензор Баха [27], появляюшийся в гравитационных уравнений движения, при локальном конформном преобразовании умножается на степень конформного фактора, зависящую от размерности. Приведенное выше соображение особенно важно в случае сферической симметрии, поскольку позволяет использовать радиус сферы в качестве конформного фактора. Определенные классы решений сферически–симметричной конформной гравитации были получены в статье [28]. Так в настоящей работе использованы вакуумные решения и решения типа Вайдья для исследования времениподобных и пространственноподобных тонких оболочек и двойных слоев в сферически–симметричной конформной гравитации.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим действие квадратичной гравитации с произвольными коэффициентами α_i:

$$S_q = -\frac{1}{16\pi}\int_\Omega \sqrt{-g}\left(\alpha_1 R_{abcd}R^{abcd} + \alpha_2 R_{ab}R^{ab} + \right. \\ \left. + \alpha_3 R^2 + \alpha_4 R + \alpha_5\Lambda\right) d^4x, \quad (1)$$

где g — детерминант метрики, $R^a_{\ bcd}$ — тензор кривизны Римана:

$$R^a_{\ bcd} = \partial_c \Gamma^a_{bd} - \partial_d \Gamma^a_{bc} + \Gamma^a_{ce}\Gamma^e_{bd} - \Gamma^a_{de}\Gamma^e_{bc},$$

соответственно, тензор Риччи и скалярная кривизна:

$$R_{ab} = R^c_{\ acb}, \ R = R^a_a.$$

Здесь и далее используются сигнатура $(+,-,-,-)$ и геометрические единицы, в которых $c = G = 1$.

Для определенных задач лагранжиан квадратичной гравитации также удобно представить в следующем виде:

$$L_q = \left(2\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2\right) C^2 - \left(\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2\right) GB + \\ + \left(\alpha_3 + \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2\right) R^2 + \alpha_4 R + \alpha_5 \Lambda. \quad (2)$$

Выше были использованы следующие обозначения:

$$C^2 = C_{abcd}C^{abcd} = R_{abcd}R^{abcd} - 2R_{ab}R^{ab} + \frac{1}{3}R^2, \quad (3)$$

$$GB = R_{abcd}R^{abcd} - 4R_{ab}R^{ab} + R^2, \quad (4)$$

где C_{abcd} - тензор Вейля, который определяется как:

$$C_{abcd} = \\ = R_{abcd} + \frac{1}{2}\left(R_{ad}\,g_{bc} + R_{bc}\,g_{ad} - R_{ac}\,g_{bd} - R_{bd}\,g_{ac}\right) + \\ + \frac{1}{6}R\left(g_{ac}\,g_{bd} - g_{ad}\,g_{bc}\right). \quad (5)$$

Рассмотрим четырехмерное пространство-время Ω, разделенное на две области - Ω^+ и Ω^- с различной геометрией сингулярной гиперповерхностью Σ_0. Сингулярная гиперповерхность - гиперповерхность, на которой тензор кривизны Римана имеет сингулярную составляющую.

Пусть Σ_0 задана в некоторых, непрерывных в ее окрестности, координатах $\{x^a\}$ уравнением: $n(x) = 0$, тогда без ограничения общности можно считать, что:

$$(N_a N^a)|_{\Sigma_0} = (\partial_a n \partial^a n)|_{\Sigma_0} = g^{nn}|_{\Sigma_0} = \varepsilon, \quad (6)$$

где N^a — нормаль к гиперповерхности, $\varepsilon = -1$ для времениподобной гиперповерхности, 1 для пространственноподобной и 0 для светоподобной.

Будем считать, что область Ω^- соответсвует отрицательным значениям функции $n(x)$, а Ω^+ - положительным. В этом случае внешняя нормаль к Σ_0:

$$N_a = \epsilon\,\partial_a n,$$

где $\epsilon = \varepsilon$ для времениподобных и пространственноподобных гиперповерхностей и $\epsilon = 1$ — для светоподобных. Подобное определение необходимо для применения теоремы Стокса и продиктовано условием: $N^a \partial_a n \geq 0$.

Дополнительно зададим некоторые внутренние координаты $\{y^i\}$ на гиперповерхности, тогда индуцированная метрика на Σ_0 соответственно:

$$\gamma_{ij} = e^a_i\, e^b_j\, g_{ab}\,, \quad e^a_i = \frac{\partial x^a}{\partial y^i}\,.$$

С учетом принятых обозначений метрику во всем пространстве-времени Ω можно формально представить в виде суммы:

$$g_{ab} = g^+_{ab}\,\theta(n(x)) + g^-_{ab}\,\theta(-n(x)) = g_{ab}(\pm), \quad (7)$$

При дифференцировании выражения (7) возникает слагаемое с дельта–функцией:

$$\partial_c g_{ab} = \partial_c g_{ab}(\pm) + \partial_c n(x)\,\delta(n(x))\,[g_{ab}]\,. \quad (8)$$

Здесь и далее скобки $[g_{ab}] = g^+_{ab} - g^-_{ab}$ обозначают скачок соответствующей величины на поверхности Σ_0.

Скачки компонент метрики всегда можно устранить за счет выбора координат в $\Omega^\pm$ областях. Непрерывность метрики необходима для того, чтобы с помощью (7) выписать символы Кристоффеля, так как произведение тета-функции на дельта–функцию неопределено в стандартной теории обобщенных функций. Соответственно, положив $[g_{ab}] = 0$, получим следующее выражение для компонент связности:

$$\Gamma^a_{bc} = \Gamma^a_{bc}(\pm), \tag{9}$$

из которого следует, что:

$$R^a_{\ bcd} = R^a_{\ bcd}(\pm) + \{\partial_c n(x)\,[\Gamma^a_{bd}] - \partial_d n(x)\,[\Gamma^a_{bc}]\}\,\delta(n(x))\,. \tag{10}$$

В общей теории относительности выражение (10) для тензора Римана, содержащее дельта–функцию, приемлемо, потому что в этом случае сингулярную часть тензора Римана можно непосредственно связать с поверхностной частью тензора энергии–импульса [17]–[19]. В квадратичной гравитации для того, чтобы избежать появления неопределенных функций: $\delta^2(n(x))$ и $\delta(n(x))\theta(n(x))$ в лагранжиане, необходимо наложить дополнительные ограничения, а именно, условия Лихнеровича [29]:

$$[\Gamma^a_{bc}] = 0. \tag{11}$$

Пусть тензор энергии–импульса полей материи имеет следующую структуру:

$$T^{ab} = S^{ab}\delta(n(x)) + T^{+ab}\theta(n(x)) + T^{-ab}\theta(-n(x)) = \\ = S^{ab}\delta(n(x)) + T^{ab}(\pm), \tag{12}$$

где S^{ab} — поверхностный тензор энергии–импульса, $T^{\pm ab}$ — значения компонент тензора энергии–импульса, записанных в областях $\Omega^{\pm}$. При этом будем считать, что T^{ab} не содержит других сингулярных членов, в частности, производных δ–функции.

В отличие от общей теории относительности, скаляр $S^{ab}\,N_a N_b$ и трехмерный вектор $\epsilon N_a\,S^a_b\,e^b_j\,\gamma^{ij}$ для квадратичной гравитации в общем случае не равны нулю. Этот факт впервые был отмечен в работах Дж. М. М. Сеновийи [20]–[25], где они определяются как «внешнее давление» и «внешний поток» соответственно. В системе координат $\{n, y^i\}$, где уравнение гиперповерхности является одной из координат, а в качестве остальных выбраны внутренние координаты на Σ_0, вышеупомянутые величины сводятся к компонентам поверхностного тензора энергии–импульса S^{nn} и S^{ni}.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Для того, чтобы найти уравнения движения сингулярной светоподобной гиперповерхности в квадратичной гравитации необходимо выделить поверхностную часть в системе уравнений, полученных варьированием действия (1) по обратной метрике в случае, когда тензор Римана имеет структуру (10), с (12) в качестве источника.

В силу условий Лихнеровича, необходимых для квадратичной гравитации, тензор Римана и, как следствие, тензор Риччи, а также скалярная кривизна могут испытывать не более чем скачок на Σ_0. Подставляя тензор Римана (10) и его свертртки в действие (1), с учетом ограничений (11) получим:

$$S_q = -\frac{1}{16\pi}\int_{\Omega^+}\sqrt{|g|}L^+_q\,d^4x - \frac{1}{16\pi}\int_{\Omega^-}\sqrt{|g|}L^-_q\,d^4x, \tag{13}$$

где $L^+_q = \alpha_1 R^+_{abcd}R^{+abcd} + \alpha_2 R^+_{ab}R^{+ab} + \alpha_3 (R^+)^2 + \alpha_4 R^+ + \alpha_5\Lambda$, аналогично определяется L^-_q.

Варьируя действие (13) по обратной метрике получим [30]:

$$\delta S_q = -\frac{1}{16\pi}\int_{\Omega^+}\sqrt{|g|}\left(H^+_{ab}\delta g^{ab} + \nabla_c V^{+c}\right)d^4x- \\ -\frac{1}{16\pi}\int_{\Omega^-}\sqrt{|g|}\left(H^-_{ab}\delta g^{ab} + \nabla_c V^{-c}\right)d^4x. \tag{14}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$H^+_{ab} = 2\alpha_1 R^+_{amlp}R_b^{+mlp} - 2(2\alpha_1+\alpha_2)R^{+c}_d R^{+d}_{\ bac} - 4\alpha_1 R^{+c}_a R^+_{bc} + 2\alpha_3 R^+ R^+_{ab} + \alpha_4 R^+_{ab} - \\ -\frac{1}{2}g_{ab}L^+_q + (\alpha_2 + 4\alpha_1)\Box R^+_{ab} + \frac{1}{2}(4\alpha_3+\alpha_2)g_{ab}\Box R^+ - (2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)\nabla_a\nabla_b R^+, \tag{15}$$

$$V^{+c} = \left\{(4\alpha_1+\alpha_2)\nabla^c R^{+bd} + \frac{1}{2}(\alpha_2+4\alpha_3)g^{bd}\nabla^c R^+\right\}\delta g_{bd} - \\ -2\nabla^b\left\{(2\alpha_1+\alpha_2)R^{+cd} + \alpha_3\,g^{cd}R^+\right\}\delta g_{bd} + (\alpha_4 + 2\alpha_3 R^+)(g^{ab}g^{cd} - g^{ac}g^{bd})\,\nabla_a\delta g_{bd} + \\ +\left\{\alpha_2(2g^{cd}R^{+ab} - g^{ac}R^{+bd} - g^{bd}R^{+ac}) - 4\alpha_1 R^{+abcd}\right\}\nabla_a\delta g_{bd}\,. \tag{16}$$

Аналогичным образом определяются вектор V^{-c} и тензор H^-_{ab}.

Вариация действия материи с тензором энергии–импульса (12) также разделяется на объемную и поверхностную части:

$$\delta S_m = \frac{1}{2}\int_{\Omega^+}\sqrt{|g|}\left(T^+_{ab}\delta g^{ab}\right)\, d^4x + \frac{1}{2}\int_{\Omega^-}\sqrt{|g|}\left(T^-_{ab}\delta g^{ab}\right)\, d^4x - \frac{1}{2}\int_{\Sigma_0}\sqrt{|h|}\left(S^{ab}\delta g_{ab}\right)\, d^3y. \tag{17}$$

Использовав теорему Стокса и принцип наименьшего действия, получим систему уравнений движения:

$$H^{\pm}_{ab} = 8\pi T^{\pm}_{ab}, \tag{18}$$

$$\epsilon[V^c]N_c = 8\pi S^{ab}\delta g_{ab}. \tag{19}$$

Затем, проделав с (19) ряд преобразований, подробно описаных в работе [31], находим уравнения движения сингулярной гиперповерхности произвольного типа в квадратичной гравитации в координатах $\{n, y^i\}$:

$$\beta_2\left(\frac{\varepsilon}{2}[\partial^n R] - [\nabla^n R^{nn}]\right) + \frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)\,\Gamma^n_{ij}\left(g^{in}g^{jn}[R] - 2\varepsilon[R^{ij}]\right) = 8\pi\, S^{nn}, \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)[\nabla^n R^{in}] + \beta_1 g^{an}\Gamma^n_{ac}[R^{ci}] + \frac{1}{2}\beta_2\left\{g^{in}[\partial^n R] + g^{an}g^{ci}\,\Gamma^n_{ac}[R]\right\} - \\
&\quad - \frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)\left\{-\frac{1}{2}g^{an}g^{cn}\,\Gamma^i_{ac}[R] - \frac{1}{2}g^{kn}\,g^{in}\Gamma^a_{ak}[R] + [\nabla^i R^{nn}] + \varepsilon\,\Gamma^i_{ac}[R^{ac}] - \frac{1}{2}[\partial_k\left(g^{kn}g^{in}R\right)]\right\} - \\
&\quad - \frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)\left\{\varepsilon[\partial_k R^{ki}] + \varepsilon\,\Gamma^a_{ak}[R^{ki}] + g^{ni}\,\Gamma^n_{ac}[R^{ac}] + g^{nc}\,\Gamma^n_{ac}[R^{ai}]\right\} = 8\pi\, S^{in},
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
&\beta_1\left\{[\nabla^n R^{ij}] + [\partial_k\left(g^{kn}R^{ij}\right)] + g^{kn}\Gamma^a_{ak}[R^{ij}] + g^{an}\Gamma^i_{ac}[R^{cj}] + g^{an}\Gamma^j_{ac}[R^{ci}]\right\} + \\
&\quad + \frac{1}{2}\beta_2\left\{g^{ij}[\partial^n R] + [\partial_k\left(g^{kn}g^{ij}R\right)] + g^{kn}\,g^{ij}\Gamma^a_{ak}[R] + g^{an}g^{cj}\,\Gamma^i_{ac}[R] + g^{an}g^{ci}\,\Gamma^j_{ac}[R]\right\} - \\
&\quad - \frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)\left\{[\nabla^i R^{nj}] + [\partial_k\left(g^{ni}R^{kj}\right)] + g^{ni}\,\Gamma^a_{ak}[R^{kj}] + g^{nj}\,\Gamma^i_{ac}[R^{ac}] + g^{nc}\,\Gamma^i_{ac}[R^{aj}]\right\} - \\
&\quad - \frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)\left\{[\nabla^j R^{ni}] + [\partial_k\left(g^{nj}R^{ki}\right)] + g^{nj}\,\Gamma^a_{ak}[R^{ki}] + g^{ni}\,\Gamma^j_{ac}[R^{ac}] + g^{nc}\,\Gamma^j_{ac}[R^{ai}]\right\} + \\
&\quad + \left\{\frac{1}{2}[R]\left(g^{kn}g^{ln}(\beta_1+\beta_2) - \varepsilon\, g^{kl}\,\beta_2\right) - \varepsilon\,\beta_1\,[R^{kl}]\right\} B^{ij}_{kl}(y) = 8\pi\, S^{ij},\ i,j,k,l \neq n, \\
&\qquad \beta_1 = \alpha_2 + 4\alpha_1,\ \beta_2 = \alpha_2 + 4\alpha_3\,.
\end{aligned} \tag{22}$$

Если гиперповерхность представляет из себя двойной слой - наиболее общий случай сингулярной гиперповерхности в квадратичной гравитации, с ненулевыми S^{nn} и S^{ni}, то именно уравнения с этими компонентами поверхностного тензора энергии–импульса в правой части вместе с условиями Лихнеровича задают гиперповерхность Σ_0, тогда как уравнения с S^{ij} в правой части необходимы для определения «произвольных» функций $B^{ij}_{kl}(y)$. Причины появления «произвольных» функций в уравнениях движения подробно изложены в [32].

Сингулярная гиперповерхность в квадратичной гравитации представляет из себя тонкую оболочку, если в уравнениях движения отсутсвуют «произвольные» функции. Для времениподобного и пространственноподобного случаев этот критерий сводится к непрерывности тензора Риччи: $[R^{bd}] = 0$, для светоподобной гиперповерхности достаточно непрерывности скалярной кривизны: $[R] = 0$. Несложно продемонстрировать, что из равенства нулю соответствующих скачков для любого типа гиперповерхностей также следует, что $S^{nn} = S^{ni} = 0$.

Далее сосредоточимся на исследовании времениподобных и пространственноподобных сингулярных гиперповерхностей, светоподобный случай разобран в [31].

Уравнения движения времениподобной и пространственноподобной тонких оболочек являются частным случаем системы (20-22), для которого выполняется дополнительное условие $[R^{bd}] = 0$:

$$\begin{aligned}
&S^{nn} = S^{ni} = 0, \\
&\qquad \beta_1[\nabla^n R^{ij}] + \frac{1}{2}\beta_2\, g^{ij}[\partial^n R] - \\
&\quad - \frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)\left\{[\nabla^i R^{nj}] + [\nabla^j R^{ni}]\right\} = \\
&\qquad = 8\pi\, S^{ij}, \quad i,j \neq n.
\end{aligned} \tag{23}$$

3. СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫЕ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

Исследуем частный случай сингулярных гиперповерхностей - сферически–симметричные сингулярные гиперповерхности, разделяющие два сферически–симметричных пространства-времени.

Рассмотрим сферически–симметричную метрику самого общего вида:

$$ds^2 = \gamma_{\alpha\beta}(x)\, dx^\alpha dx^\beta - r^2(x)\,\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right) = \\ = r^2(x)\left(\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta}(x)\, dx^\alpha dx^\beta - d\Omega^2\right),\ \alpha,\beta = 0,1. \quad (24)$$

Для геометрии такого типа выполняются следующие соотношения:

$$R_{\theta\theta} = 1 + r\sigma + \Delta, \quad R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta}\, sin^2\theta, \quad (25)$$

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\gamma_{\alpha\beta}}{r^2}\left(\frac{1}{2}\widetilde{R} + \Delta - r\,\sigma\right) - \frac{2}{r}\nabla_\alpha\nabla_\beta\, r, \quad (26)$$

$$R = \frac{1}{r^2}\left(\widetilde{R} - 2 - 6\,r\,\sigma\right). \quad (27)$$

В формулах выше Δ, σ, $\widetilde{R}$ - инварианты сферической геометрии, определенные следующим образом:

$$\Delta = g^{ab}\,\partial_a r\,\partial_b r = \gamma^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha r\,\partial_\beta r, \\ \sigma = \Box\, r - \frac{2}{r}\Delta = \gamma^{\alpha\beta}\,\nabla_\alpha\nabla_\beta\, r = \frac{1}{r^2}\widetilde{\Box}\, r, \quad (28)$$

$$\widetilde{R} = \frac{1}{\widetilde{\gamma}}\left(-\partial^2_{11}\widetilde{\gamma}_{00} + 2\partial^2_{01}\widetilde{\gamma}_{01} - \partial^2_{00}\widetilde{\gamma}_{11}\right) + \frac{1}{2\widetilde{\gamma}^2}\left(\widetilde{\gamma}_{11}\,(\partial_1\widetilde{\gamma}_{00})^2 + \widetilde{\gamma}_{00}\,(\partial_0\widetilde{\gamma}_{11})^2\right) + \\ + \frac{1}{2\widetilde{\gamma}^2}\left(\partial_1\widetilde{\gamma}_{00}\,(-\partial_0\widetilde{\gamma}_{11}\,\widetilde{\gamma}_{10} + \partial_1\widetilde{\gamma}_{11}\,\widetilde{\gamma}_{00} - 2\partial_1\widetilde{\gamma}_{01}\,\widetilde{\gamma}_{10}) + \partial_0\widetilde{\gamma}_{11}\,(\partial_0\widetilde{\gamma}_{00}\,\widetilde{\gamma}_{11} - 2\,\partial_0\widetilde{\gamma}_{10}\,\widetilde{\gamma}_{10})\right) + \\ + \frac{1}{2\widetilde{\gamma}^2}\left(\partial_0\widetilde{\gamma}_{00}\,(\partial_1\widetilde{\gamma}_{11}\,\widetilde{\gamma}_{01} - 2\,\partial_1\widetilde{\gamma}_{10}\,\widetilde{\gamma}_{11}) - 2\,\partial_0\widetilde{\gamma}_{10}\,(\partial_1\widetilde{\gamma}_{11}\,\widetilde{\gamma}_{00} - 2\,\partial_1\widetilde{\gamma}_{10}\,\widetilde{\gamma}_{10})\right). \quad (29)$$

Здесь использованы обозначения $\widetilde{R}$, $\widetilde{\gamma}$, $\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{\Box}$ для скалярной кривизны, детерминанта, ковариантной производной и лапласиана двумерной «метрики» $\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta}$ соответственно.

Как уже было отмечено ранее, в настоящей работе преимущественно рассматриваются пространственноподобные и времениподобные сингулярные гиперповерхности. Для этой цели удобно использовать гауссовы нормальные координаты, которые являются частным случаем $\{n, y^i\}$. В такой системе координат метрика в окрестности гиперповерхности имеет вид: $ds^2 = \varepsilon\, dn^2 + \gamma_{ij}\, dy^i\, dy^j$. Для случая сферической симметрии (24) получим:

$$ds^2 = \varepsilon\, dn^2 + \gamma_{00}(n,\tau)\, d\tau^2 - r^2(n,\tau)\, d\Omega^2 = \\ = r^2\left(\frac{\varepsilon}{r^2}\, dn^2 + \widetilde{\gamma}_{00}\, d\tau^2 - d\Omega^2\right). \quad (30)$$

Здесь предполагается, что координата τ может быть как временной, так и пространственной. За счет соответствующего выбора τ всегда можно добиться, чтобы $\gamma_{00}(0,\tau) = -\varepsilon$.

Для работы с сингулярными гиперповерхностями необходимо также воспользоваться такой геометрической характеристекой как тензор внешней кривизны гиперповерхности:

$$K_{ij} = -e^a_i\, e^b_j\, \nabla_a N_b = -\frac{1}{2}\,\partial_n\gamma_{ij}, \\ K = \gamma^{ij}\, K_{ij} = -\nabla_a N^a, \quad e^a_i = \frac{\partial x^a}{\partial y^i},$$

где $\{x^a\}$ — произвольные непрерывные в окрестности Σ_0 координаты, $\{y^i\}$ — произвольные внутренние координаты на гиперповерхности, N^a — внешняя нормаль к Σ_0, γ^{ij} - обратная к индуцированной метрике γ_{ij}, K — след тензора внешней кривизны.

Если в качестве $\{x^a\}$ выбрать гауссовы нормальные координаты, и в них же все координаты кроме n выбрать в качестве внутренних координат на Σ_0, то $N_a = \varepsilon\delta^n_a$ и $K_{ij} = -\frac{1}{2}\partial_n\gamma_{ij}$. В частности, для метрики (30) получим:

$$K = -\frac{1}{2}\gamma^{ij}\partial_n\gamma_{ij} = -\frac{1}{2}\frac{\partial_n\gamma_{00}}{\gamma_{00}} - 2\,\frac{\partial_n r}{r}, \\ K(0,\tau) = \frac{\varepsilon}{2}\,\partial_n\gamma_{00} - 2\,\frac{\partial_n r}{r}.$$

Для сферически–симметричного случая определим также двумерный аналог следа тензора внешней кривизны:

$$\widetilde{K} = -\frac{1}{2}\widetilde{\gamma}^{00}\partial_n\widetilde{\gamma}_{00} = K + \frac{\partial_n r}{r},$$

из этого выражения следует, что $\widetilde{K}$ наряду с K является инвариантом, так как в силу свойств гауссовых нормальных координат величина $\partial_n r = N^a\,\partial_a r$ также инвариант.

Выпишем уравнения движения двойного слоя (20-22) для частного случая метрики (30), выразив присутствующие в них величины через комбинации представленных выше инвариантов сферической геометрии:

$$-\frac{1}{2}\,(\beta_1+\beta_2)\,K\,[\widetilde{R}]-\beta_1\,\frac{\partial_n r}{r}\,[\widetilde{R}]+(\beta_1+3\beta_2)\,K\,r[\sigma]=8\pi r^2\,S^{nn}\,, \tag{31}$$

$$(\beta_1+\beta_2)\,\frac{1}{2r^2}\,[\partial_0\widetilde{R}]-(\beta_1+3\beta_2)\left[\partial_0\left(\frac{\sigma}{r}\right)\right]-\beta_2\,\frac{\partial_0 r}{r^3}[\widetilde{R}]=8\pi S^{n0},\quad S^{n2}=S^{n3}=0. \tag{32}$$

$$-\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)\,\frac{1}{r^2}[\partial_n\widetilde{R}]+\beta_2\,\frac{\partial_n r}{r^3}[\widetilde{R}]+(\beta_1+3\beta_2)\left[\partial_n\left(\frac{\sigma}{r}\right)\right]+ \\ +\left(\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)\,\frac{1}{r^2}[\widetilde{R}]-(\beta_1+3\beta_2)\frac{1}{r}[\sigma]\right)\left(K+\frac{2\partial_n r}{r}+B^{00}_{00}(\tau)\right)=8\pi S^{00}, \tag{33}$$

$$\frac{1}{2}\beta_2\,\frac{1}{r^2}[\partial_n\widetilde{R}]-(\beta_1+3\beta_2)\,\frac{1}{r}[\partial_n\sigma]-\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)\,\frac{\partial_n r}{r^3}[\widetilde{R}]- \\ -\left(\frac{1}{2}\beta_2\,\frac{1}{r^2}[\widetilde{R}]-(\beta_1+3\beta_2)\,\frac{1}{r}[\sigma]\right)B^{22}_{22}(\tau)=-8\pi\varepsilon r^2\,S^{22}, \\ S^{33}=\frac{1}{sin^2\theta}S^{22},\quad S^{23}=S^{02}=S^{03}=0\,. \tag{34}$$

Выше был использован тот факт, что в силу сферической симметрии без ограничения общности можно положить равными нулю все компоненты тензора B^{ij}_{kl}, кроме B^{00}_{00}, B^{22}_{22}, $B^{33}_{33}=B^{22}_{22}$.

В нормальной гауссовой системе координат условия Лихнеровича сводятся к непрерывности $\partial_n r$ и $\partial_n\gamma_{00}$ на Σ_0, соответственно, их инвариантная форма:

$$[K]=0,\quad [\Delta]=0. \tag{35}$$

Альтернативно условия Лихнеровича можно записать как:

$$[\widetilde{K}]=0,\quad [\Delta]=0. \tag{36}$$

Аналогичным образом из (23) можно получить уравнения движения для сферически–симметричнной тонкой оболочки в гауссовой нормальной системе координат с метрикой (30):

$$S^{nn}=S^{ni}=0,\quad i\neq n, \tag{37}$$

$$\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)\,[\partial_n\widetilde{R}]-(\beta_1+3\beta_2)\,r\,[\partial_n\sigma]=8\pi\varepsilon\,r^2 S^0_0, \tag{38}$$

$$\frac{1}{2}\beta_2\,[\partial_n\widetilde{R}]-(\beta_1+3\beta_2)\,r[\partial_n\sigma]=8\pi\varepsilon\,r^2 S^2_2,\quad S^3_3=S^2_2. \tag{39}$$

Условием того, что сингулярная гиперповерхность представляет из себя тонкую оболочку является отсутствие скачков в тензоре Риччи, поэтому в данном случае, помимо условий Лихнеровича (35), выполняются соотношения:

$$[\widetilde{R}]=0,\quad [\sigma]=0. \tag{40}$$

4. ЛАГРАНЖИАН МАТЕРИИ

Для того, чтобы пояснить физический смысл S^{nn} и S^{ni}, которые в общей теории относительности равны нулю, разберем вывод этих компонент напрямую из лагранжиана материи.

В качестве базового примера рассмотрим лагранжиан идеальной жидкости в эйлеровых переменных [33], дополненный слагаемым ответственным за рождение частиц. Подобный лагранжиан впервые был представлен в статье [26]:

$$S_m=\int L_m\sqrt{|g|}\,d^4x+S_\psi= \\ =\int\{-E+\mu_0\,(u_a\,u^a-1)+\mu_1\,(\nabla_a\,(\eta\,u^a)-\Phi)+ \\ +\mu_2\,\partial_a X\,u^a\,\}\,\sqrt{|g|}\,d^4x+S_\psi. \tag{41}$$

Здесь $E(\eta,\psi)$ — полная плотность энергии частиц, где учтено в том числе их взаимодействие, $\mu_0(x),\mu_1(x),\mu_2(x)$ — лагранжевы множители, $\eta(x)$ — плотность числа частиц, $u^a(x)$ — четыре-скорость, $X(x)$ — вспомогательная динамическая переменная, необходимая для маркировки траекторий, ψ — внешние поля. $\Phi(\eta, \psi, g_{ab})$ — функция зависящая от инвариантов, характеризующих поля, ответственные за рождение частиц, S_ψ — действие внешних полей.

Выпишем уравнения движения для действия (41) за исключением вариации по метрике, которая будет получена далее. Для удобства отметим переменные, вариацией которых получены соответствующие уравнения:

$$\delta\eta : -\frac{\partial E}{\partial \eta} - \mu_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - \partial_a \mu_1 \, u^a = 0\,, \tag{42}$$

$$\delta u^a : \, \mu_2 \, \partial_a X + 2\mu_0 \, u_a - \partial_a \mu_1 \, \eta = 0\,, \tag{43}$$

$$\delta X : \, -\nabla_a \left(\mu_2 \, u^a\right) = 0\,, \tag{44}$$

$$\delta\psi : \, \frac{\delta S_\psi}{\delta \psi} - \mu_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} - \frac{\partial E}{\partial \psi} = 0\,, \tag{45}$$

$$\delta\mu_0 : \, u_a \, u^a = 1\,, \tag{46}$$

$$\delta\mu_1 : \, \nabla_a \left(\eta \, u^a\right) = \Phi\,, \tag{47}$$

$$\delta\mu_2 : \, \partial_a X \, u^a = 0\,. \tag{48}$$

Как и ранее будем считать, что рассматриваемое пространтство–время Ω разделено на две области $\Omega^\pm$ с различной геометрией сингулярной гиперповерхностью $\Sigma_0 : \, n(x) = 0$.

Рассмотрим процесс рождения частиц, которые являются квантами некоторого скалярного поля, в отсутствии внешних полей ψ. Как отмечено в работах [34–36], в рамках данной феноменологической модели рождение частиц обусловлено взаимодействием квантового скалярного поля с «внешним» гравитационным полем. А именно, гравитационное поле вызывает поляризацию вакуума квантового скалярного поля, которая приводит к возникновению новых частиц. При феноменологическом подходе эти скалярные кванты описываются классической плотностью энергии, плотностью числа частиц и четыре-скоростями, поэтому нет необходимости явно вводить какое-либо классическое скалярное поле. Таким образом, функция Φ должна зависеть только от геометрических инвариантов.

Как было отмечено выше, расчеты проделанные несколькими независимыми группами исследователей [5–16] в ходе изучения процессов квантового рождения частиц скалярным полем на фоне космологической модели показывают, что в однопетлевом приближении квантовые поправки к лагранжиану содержат квадратичные по кривизне слагаемые. Более того, в статье [15] продемонстрировано, что вакуумное среднее величины $\nabla_a \left(\eta \, u^a\right)$ и, как следствие, функция Φ пропорциональна квадрату тензора Вейля: $\Phi = \beta \, C^2$, причем коэффициент β зависит от типа рассматриваемых частиц.

Этот результат был получен для фиксированной фоновой метрики, тем не менее, в статье [37] отмечено, что форму функции Φ можно считать универсальной для случая рождения частиц за счет поляризации вакуума, обусловленной произвольным гравитационным полем. А именно, в вышеупомянутой работе показано, что величина $\nabla_a \left(\eta \, u^a\right) \sqrt{-g}$ является конформным инвариантом, соответственно из связи (47) следует, что $\Phi \sqrt{-g}$ тоже конформный инвариант. С другой стороны, в римановой геометрии простейшей конформно инвариантной комбинацией из геометрических инвариантов является $C^2 \sqrt{-g}$.

Рассмотрим действие (41) в отсутствии внешних полей ψ с $\Phi = \beta \, C^2$. Предположим, что в данной задаче плотность числа частиц имеет вид:

$$\eta = \eta(\pm) + \eta_{(0)} \, \delta(n(x))\,, \tag{49}$$

метрика и четыре-скорость непрерывны на Σ_0, тогда имеет место следующее:

$$\begin{aligned}\nabla_a \left(\eta \, u^a\right) \sqrt{-g} = \partial_a \left(\eta \, u^a \sqrt{-g}\right) = \partial_a \left(\eta u^a \sqrt{-g}\right)(\pm) + \\ + \left(\left[\eta u^a \sqrt{-g}\right] \partial_a n + \partial_a \left(\eta_{(0)} u^a \sqrt{-g}\right)\right) \delta(n(x)) + \\ + \eta_{(0)} u^a \sqrt{-g} \, \partial_a n \, \delta'(n(x)),\end{aligned} \tag{50}$$

где домножение на корень из детерминанта метрики необходимо для того, чтобы избавиться от ковариантной производной дельта–функции.

Лагранжиан материи также не должен содержать неопределенные функции, такие как квадрат дельта–функции или произведение дельта и тета–функций. Из-за присутсвия квадрата тензора Вейля это означает, что вне зависимости от выбранной модели гравитации должны выполняться условия Лихнеровича. В этом случае тензор Вейля содержит не более чем скачок на Σ_0:

$$C^2 = C^2(\pm).$$

С другой стороны, связь (47) предполагает, что $C^2 \sqrt{-g}$ и $\partial_a \left(\eta \, u^a \sqrt{-g}\right)$ равны как обощенные функции, для этого необходимо, чтобы $\eta_{(0)} = [\eta] = 0$, в этом случае:

$$\partial_a \left(\eta \, u^a \sqrt{-g}\right) = \nabla_a \left(\eta \, u^a\right) \sqrt{-g}(\pm).$$

Соответственно, лагранжевы множители, плотность энергии $E(\eta)$ и функция $X(x)$ также должны быть непрерывными на Σ_0, тогда исходное действие материи можно переписать в следующем виде:

$$S_m = \int_{\Omega^+} L_m^+ \sqrt{|g|} \, d^4x + \int_{\Omega^-} L_m^- \sqrt{|g|} \, d^4x, \tag{51}$$

где

$$\begin{aligned}L_m^+ = -E^+(\eta, \psi) + \mu_0 \left(u_a^+ \, u^{+a} - 1\right) + \\ + \mu_1 \left(\nabla_a \left(\eta^+ u^{+a}\right) - \Phi\right) + \mu_2 \, \partial_a X u^{+a}, \, L_m^-\end{aligned}$$

определяется аналогично.

Поверхностный тензор энергии–импульса по определению выражается через часть вариации действия материи по метрике, которая сводится к интегралу по сингулярной гиперповерхности Σ_0:

$$\delta_g S_m|_{\Sigma_0} = -\frac{1}{2}\int_{\Sigma_0} \sqrt{|h|}\left(S^{ab}\delta g_{ab}\right)\, d^3y\,.$$

Используя описанные выше координаты $\{n, y^i\}$, для действия (51) имеем:

$$\begin{aligned}
&-2\beta\mu_1\ \{\ 2\left([\nabla^n R^{bd}] + [\partial_k\left(g^{kn}R^{bd}\right)] + g^{kn}\Gamma^a_{ak}[R^{bd}] + g^{an}\Gamma^b_{ac}[R^{cd}] + g^{an}\Gamma^d_{ac}[R^{cb}]\right)\delta g_{bd} + \\
&\quad -\frac{1}{3}\left(g^{bd}[\partial^n R] + [\partial_k\left(g^{kn}g^{bd}R\right)] + g^{kn}\, g^{bd}\Gamma^a_{ak}[R] + g^{an}g^{cd}\,\Gamma^b_{ac}[R] + g^{an}g^{cb}\,\Gamma^d_{ac}[R]\right)\delta g_{bd} - \\
&\quad -\frac{2}{3}\left([\nabla^b R^{nd}] + [\partial_k\left(g^{nb}R^{kd}\right)] + g^{nb}\,\Gamma^a_{ak}[R^{kd}] + g^{nd}\,\Gamma^b_{ac}[R^{ac}] + g^{nc}\,\Gamma^b_{ac}[R^{ad}]\right)\delta g_{bd} - \\
&\quad -\frac{2}{3}\left([\nabla^d R^{nb}] + [\partial_k\left(g^{nd}R^{kb}\right)] + g^{nd}\,\Gamma^a_{ak}[R^{kb}] + g^{nb}\,\Gamma^d_{ac}[R^{ac}] + g^{nc}\,\Gamma^d_{ac}[R^{ab}]\right)\delta g_{bd} + \\
&\quad +\frac{1}{3}\left([R]\left(2g^{bn}g^{dn} + \varepsilon g^{bd}\right) - 6\varepsilon\,[R^{bd}]\right)\partial_n\delta g_{bd}\ \} + \\
&+\frac{2}{3}\,\beta\,\partial_a\mu_1\left(-[R](g^{nb}g^{ad} + g^{nd}g^{ab} - g^{an}g^{bd}) - 6g^{na}[R^{bd}] + 4\left(g^{dn}[R^{ab}] + g^{bn}[R^{ad}]\right)\right)\delta g_{bd} + \\
&\qquad + \mu_1[\eta\, u^n\, g^{bd}]\delta g_{bd} = S^{ab}\,\delta g_{ab}\,. \qquad (52)
\end{aligned}$$

Последнее слагаемое равно нулю: $[\eta\, u^n\, g^{bd}] = 0$ в силу описанных выше соображений.

Теперь можно в явном виде выделить компоненты S^{nn} и S^{ni} поверхностного тензора энергии–импульса для рассматриваемого лагранжиана материи:

$$S^{nn} = -\frac{4}{3}\beta\mu_1\left(g^{in}\,[\nabla_i R^{nn}] - \varepsilon\,[\nabla_i R^{in}] + \Gamma^n_{ij}\left(g^{in}g^{jn}[R] - 2\varepsilon[R^{ij}]\right)\right)\,, \qquad (53)$$

$$\begin{aligned}
S^{ni} = &\frac{2}{3}\beta\,\partial_j\mu_1\left(4\varepsilon[R^{ij}] - (\varepsilon g^{ij} + g^{ni}g^{nj})\,[R]\right) - 2\beta\mu_1\ \{\ \frac{4}{3}\,g^{nk}[\nabla_k R^{in}] + 2\,g^{an}\Gamma^n_{ac}[R^{ci}] - \\
&-\frac{1}{3}\,g^{in}g^{nk}[\partial_k R] - \frac{1}{3}\,g^{an}g^{ci}\,\Gamma^n_{ac}[R] + \frac{1}{3}\,g^{an}g^{cn}\,\Gamma^i_{ac}[R] + \frac{1}{3}\,g^{kn}\,g^{in}\Gamma^a_{ak}[R] - \frac{2}{3}[\nabla^i R^{nn}] + \\
&+\frac{1}{3}\,[\partial_k\left(g^{kn}g^{in}R\right)] - \frac{2}{3}\,g^{ni}\,\Gamma^n_{ac}[R^{ac}] - \frac{2}{3}\,g^{nc}\,\Gamma^n_{ac}[R^{ai}]\ \}\,, \quad i,j \neq n. \qquad (54)
\end{aligned}$$

Уравнения (53,54) верны для гиперповерхности произвольного типа, далее перейдем к рассмотрению ряда частных случаев. Так для времениподобных (пространственноподобных) гиперповерхностей в нормальных гауссовых координатах имеем:

$$S^{nn} = 2\beta\mu_1\left(-\frac{1}{3}\,K\,[R] + 2\,K_{ij}\,[R^{ij}]\right),$$

$$\begin{aligned}
S^{ni} = &\,\varepsilon\,\beta\,\partial_j\mu_1\,\frac{2}{3}\left(4[R^{ij}] - g^{ij}\,[R]\right) - \\
&- 2\beta\mu_1\left(\frac{1}{3}\,[\partial^i R] - 2\,[\nabla_j R^{ij}]\right), \quad i,j \neq n.
\end{aligned}$$

На основе этих соотношений получим «внешнее давление» и «внешний поток» для сферически–симметричной времениподобной (пространственноподобной) сингулярной гиперповерхности, которая разделяет два сферически–симметричных пространтсва-времени, в координатах $\{n, \tau, \theta, \phi\}$:

$$\frac{\beta\mu_1}{r^2}\,\frac{4}{3}\,\widetilde{K}\,[\widetilde{R}] = S^{nn}\,, \qquad (55)$$

$$\begin{gathered}
-\beta\,\partial_0\mu_1\,\frac{2}{3r^2}\left([\widetilde{R}] + 2r\,[\sigma]\right) - \beta\mu_1\frac{4}{3\,r^3}\left[\partial_0\left(r\widetilde{R}\right)\right] = S^{n0}, \\
S^{n2} = S^{n3} = 0\,.
\end{gathered} \qquad (56)$$

Здесь использовано предположение, что в силу сферической симметрии, лагранжев множитель μ_1 не зависит от углов: $\mu_1(x) = \mu_1(\tau, n)$.

Если при заданном лагранжиане материи выбрать в качестве действия гравитации конформную гравитацию и рассмотреть в этой модели сферически–симметричные времениподобные (пространственноподобные) двойные слои, то из уравнений (55,56) и (61,62) получим:

$$-\frac{\alpha_1}{12\pi r^2}\widetilde{K}\,[\widetilde{R}] = S^{nn} = \frac{\beta\mu_1}{r^2}\frac{4}{3}\widetilde{K}\,[\widetilde{R}]\,, \qquad (57)$$

$$\frac{\alpha_1}{12\pi r^3}\left[\partial_0\left(r\widetilde{R}\right)\right] = S^{n0} = \\ = -\beta\,\partial_0\mu_1\frac{2}{3r^2}\left([\widetilde{R}] + 2r\,[\sigma]\right) - \beta\mu_1\frac{4}{3\,r^3}\left[\partial_0\left(r\widetilde{R}\right)\right], \\ S^{n2} = S^{n3} = 0. \qquad (58)$$

Откуда следует, что или $\mu_1(0,\tau) = -\frac{\alpha_1}{16\pi\beta} = \text{const}$, или $\widetilde{K} = 0$ и из второго уравнения получается нетривиальное соотношение на функцию $\mu_1(\tau, 0)$:

$$-\left(\frac{\alpha_1}{8\pi\beta} + 2\mu_1\right)\left[\partial_0\left(r\widetilde{R}\right)\right] = \partial_0\mu_1\left([r\widetilde{R}] + 2r^2\,[\sigma]\right).$$

Необходимо отметить, что уравнения (57,58) задают только значение функции $\mu_1(0,\tau)$ на гиперповерхности, определяя таким образом часть граничных условий для уравнений движения в $\Omega^{\pm}$ областях.

Особый интерес представляет ситуация, когда в лагранжиане материи коэффициент β при слагаемом, ответственном за рождение частиц, не равен нулю, но сам квадрат тензора Вейля равен нулю: $C^2 = 0$. Это так называемый «физический вакуум» [38], т.е. вакуум, в котором возможность рождения частиц существует, но не реализуется.

Несложно проверить, что для произвольной сферически–симметричной метрики квадрат тензора Вейля выражается через радиус и двумерную скалярную кривизну:

$$C^2 = \frac{(\widetilde{R} - 2)^2}{3r^4},$$

поэтому «физический вакуум» для этого случая существует при $\widetilde{R} = 2$.

Общий вид сферически–симметричной метрики, для которой выполняется это условие:

$$ds^2 = \frac{r^2(t,x)}{x^2}\left(dt^2 - dx^2\right) - r^2(t,x)\,d\Omega^2,$$

где $r(t,x)$ — произвольная функция.

Это пространство–время, в частности, представляет из себя один из вакуумов сферически–симметричной конформной гравитации, описаных в работе [28].

Отметим также, что в общей теории относительности, сферически–симметричное вакуумное решение с $\widetilde{R} = 2$ может быть только метрикой де Ситтера (анти-де Ситтера), так как сферически–симметричный вакуум в самом общем виде представляет из себя пространство-время Шварцшильда-де Ситтера (анти-де Ситтера), для которого:

$$\widetilde{R} = 2 - \frac{12\,M}{r}\,,$$

где M — масса черной дыры.

5. КОНФОРМНАЯ ГРАВИТАЦИЯ

Действие конформной гравитации является частным случаем действия квадратичной гравитации с $\alpha_2 = -2\alpha_1$, $\alpha_3 = \frac{1}{3}\alpha_1$. Из определения лагранжиана (2) следует, что при таком соотношении коэффициентов остается только слагаемое, пропорциональное C^2:

$$S_q = \\ = -\frac{\alpha_1}{16\pi}\int_\Omega \sqrt{-g}\left(R_{abcd}R^{abcd} - 2R_{ab}R^{ab} + \frac{1}{3}R^2\right)\,d^4x = \\ = -\frac{\alpha_1}{16\pi}\int_\Omega \sqrt{-g}\,C^2\,d^4x\,. \qquad (59)$$

Таким образом, уравнения движения для конформной гравитации, впервые полученные в работе Р. Баха [27], представляют из себя частный случай (18):

$$B^{ab} = \nabla_c\nabla_d\,C^{acbd} + \frac{1}{2}\,C^{acbd}R_{cd} = \frac{2\pi}{\alpha_1}T^{ab}\,. \qquad (60)$$

Здесь знак перед $\frac{1}{2}$ в уравнении обусловлен выбранной сигнатурой, B^{ab} — тензор Баха.

Определенные типы сферически–симметричных решений (60) были получены в статье [28], в частности, далее будут использованы вакуумные решения и решения типа Вайдья. Поскольку радиус действует как конформный множитель, их общий вид совпадает с (24) при условии, что $r^2(x)$ — произвольные функции.

Уравнения движения времениподобного (пространственноподобного) двойного слоя для сферически–симметричной конформной гравитации являются частным случаем (31, 32):

$$\widetilde{K}\,[\widetilde{R}] = -\frac{12\pi}{\alpha_1}\,r^2\,\varepsilon S^n_n\,, \qquad (61)$$

$$\left[\partial_0\left(r\widetilde{R}\right)\right] = \frac{12\pi r^3}{\alpha_1}S^{n0}, \quad S^{n2} = S^{n3} = 0, \qquad (62)$$

$$[\partial_n\widetilde{R}] - [\widetilde{R}]\left(\widetilde{K} - 2\frac{\partial_n r}{r} + B^{00}_{00}(\tau)\right) = \varepsilon\frac{12\pi}{\alpha_1}r^2 S^0_0, \qquad (63)$$

$$-\frac{1}{2}\,[\partial_n\widetilde{R}] - \frac{\partial_n r}{r}[\widetilde{R}] + \frac{1}{2}\,[\widetilde{R}]\,B^{22}_{22}(\tau) = \frac{12\pi}{\alpha_1}\varepsilon r^2\,S^2_2, \\ S^3_3 = S^2_2. \qquad (64)$$

Аналогично для случая тонкой оболочки получим:

$$= \frac{12\pi\varepsilon r^2}{\alpha_1}S^0_0, \\ S^3_3 = S^2_2 = -\frac{1}{2}S^0_0. \qquad (65)$$

В конформной гравитации след тензора энергии–импульса равен нулю [27]. Для рассматриваемой задачи это означает, что $T^{\pm}_{ab}\, g^{ab} = 0$, но при этом в общем случае не обязательно, что след поверхностного тензора энергии–импульса S^a_a должен быть равен нулю, так как сохранение конформной инвариантности непосредственно на Σ_0 не предполагалось по умолчанию. Тем не менее, из физических соображений имеет смысл рассматривать задачу, которая представляет из себя предельный случай некоторого несингулярного распределения материи, тогда необходимо, чтобы $S^a_a = 0$.

Как видно из уравнения (65), для тонкой оболочки данное условие следует из уравнений движения непосредственно. Для двойного слоя существует дополнительная неопределенность, связанная с выбором «произвольных» функций $B^{kl}_{ij}(\tau)$, соответственно всегда можно положить:

$$S^0_0 + 2S^2_2 + S^n_n = 0\,,$$

откуда из уравнений движения следует, что:

$$B^{22}_{22}(\tau) - B^{00}_{00}(\tau) = 2\,\widetilde{K}.$$

5.1. Сшивка двух вакуумов

Рассмотрим сшивку двух сферически–симметричных вакуумов конформной гравитации с помощью двойного слоя или тонкой оболочки. В работе [28] показано, что существует три типа вакуума сферически–симметричной конформной гравитации: два решения с постоянной двумерной скалярной кривизной $\widetilde{R} = \pm 2$ и решение с переменной $\widetilde{R}$.

Для двойного слоя, разделяющего два вакуума, по определению: $S^{n0} = 0$, тогда уравнения движения (61,62) можно существенно упростить:

$$[\widetilde{R}] = \frac{C}{\rho} \tag{66}$$

$$\widetilde{K}\,\frac{C}{\rho} = -\frac{12\pi}{\alpha_1}\,\rho^2\,\varepsilon S^n_n\,, \tag{67}$$

где C — произвольная константа, $\rho(\tau) = r|_{\Sigma_0} = r(0,\tau)$. Здесь и далее будем использовать обозначение ρ, подразумевая, что это функция от переменной τ.

Возвращаясь к классификации вакуумов, несложно заметить, что сшивка двух вакуумов с одинаковой постоянной $\widetilde{R}$ не реализуется ни в виде двойного слоя, ни в виде тонкой оболочки.

Сшивка вакуумов с постоянными различными $\widetilde{R}$ возможна только в виде двойного слоя, так как $\partial_n \widetilde{R}^{\pm} = 0$. Рассмотрим случай, когда Ω^+ — вакуум с $\widetilde{R} = 2$ и Ω^- — вакуум с $\widetilde{R} = -2$:

$$ds^{2\pm} = (r^{\pm}(u^{\pm}, v^{\pm}))^2 \left(\frac{4\,du^{\pm}dv^{\pm}}{(u^{\pm} \mp v^{\pm})^2} - d\Omega^2\right),$$

тогда $[\widetilde{R}] = 4$, поэтому из уравнения (66) следует, что $\rho = \frac{C}{4} = const$. Это означает, что Σ_0 задана в $\Omega^{\pm}$ областях соотношениями $r^{\pm}(u^{\pm}, v^{\pm}) = const = \frac{C}{4}$.

Нормированные уравнения гиперповерхности, т.е. удовлетворяющие условию (6): $n^{\pm} = \frac{r^{\pm} - C/4}{\sqrt{\Delta^{\pm}}}$. При этом функции $r^{\pm}(u^{\pm}, v^{\pm})$ различны для $\Omega^{\pm}$, но совпадают на Σ_0 и удовлетворяют условию $[\Delta] = 0$.

Для остальных вариантов сшивки двух сферически–симметричных вакуумов конформной гравитации существуют как двойные слои, так и тонкие оболочки.

Рассмотрим сшивку с помощью двойного слоя вакуума с переменной $\widetilde{R}$ в качестве Ω^+ и вакуума с постоянной $\widetilde{R}$ в качестве Ω^-. Для определенности выберем $\widetilde{R}^- = 2$ и обозначим $\widetilde{R}^+ = \widetilde{R}$, тогда:

$$ds^{2+} = r^+(\eta, \widetilde{R})^2 \left(A\, d\eta^2 - A^{-1} d\widetilde{R}^2 - d\Omega^2\right),$$

$$A(\widetilde{R}) = \frac{1}{6}\left(\widetilde{R}^3 - 12\widetilde{R} + C_0\right)\,,$$

$$ds^{2-} = r^-(t,x)^2 \left(\frac{1}{x^2}(dt^2 - dx^2) - d\Omega^2\right).$$

Из соотношения (66) следует, что уравнение гиперповерхности в Ω^+ в исходных координатах: $\widetilde{R} - 2 - \frac{C}{r^+(\widetilde{R},\eta)} = 0$.

Уравнения движения (61,62) записаны в гауссовой нормальной системе координат, при этом переход от исходных произвольных координат $\{x^{\pm}\}$ в $\Omega^{\pm}$ к нормальным гауссовым координатам Σ_0 зависит от функций $n^{\pm}(x^{\pm})$, которые заранее неизвестны. Соответственно, далее по умолчанию примем, что даже при использовании исходных координат $\{x^{\pm}\}$, они рассматриваются как функции от n и τ и, как следствие, только от τ непосредственно на Σ_0.

Запишем условия Лихнеровича для рассматриваемой сшивки:

$$\Delta|_{\Sigma_0} = \frac{1}{A\,\rho^2}\left(\partial_\eta r^+\right)^2 - \frac{A}{\rho^2}\left(\partial_{\widetilde{R}} r^+\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{C^2}{\rho^4} + \frac{C^3}{6\rho^5} + \frac{C_0-16}{6\rho^2}\right)\left\{\frac{6\rho\,\dot\rho^2\left(\rho^2 + C\,\partial_{\widetilde{R}} r\right)^2}{6\rho\,\dot\rho^2 C^2 - \varepsilon\left(6\rho C^2 + C^3 + \rho^3\left(C_0-16\right)\right)} - \left(\partial_{\widetilde{R}} r\right)^2\right\} =$$
$$= \frac{x^2}{\rho^2}\left(\left(\partial_t r^-\right)^2 - \left(\partial_x r^-\right)^2\right), \quad (68)$$

$$-\rho\,\widetilde{K}|_{\Sigma_0} = \kappa_-\frac{x^2}{\dot x}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\sqrt{\dot x^2\rho^2 - \varepsilon\,x^2}}{x^2}\right) = \frac{\kappa_+}{\dot{\widetilde{R}}}\frac{d}{d\tau}\left(\sqrt{\dot{\widetilde{R}}^2\rho^2 - \varepsilon\,A}\right) =$$
$$= -sign(C)\,\kappa_+\frac{\rho^2}{\dot\rho}\frac{d}{d\tau}\left\{\frac{1}{\rho}\sqrt{\dot\rho^2 - \frac{\varepsilon}{6}\left(6 + \frac{C}{\rho} + \frac{\rho^2}{C^2}\left(C_0-16\right)\right)}\right\}, \quad (69)$$

где точкой обозначена полная производная по τ, константы κ_+ и κ_- - знаки $\partial_n\widetilde{R}(0,\tau)$ и $\partial_n x(0,\tau)$ соответственно. Выше также были использованы соотношения:

$$\dot\rho = \partial_\eta r^+\,\dot\eta + \partial_{\widetilde{R}} r^+\,\dot{\widetilde{R}} = \partial_\eta r^+\,\dot\eta - \frac{C\dot\rho}{\rho^2}\,\partial_{\widetilde{R}} r^+,$$
$$\dot\eta^2 = \frac{\dot{\widetilde{R}}^2\rho^2 - \varepsilon A}{\rho^2 A^2} = \frac{C^2\dot\rho^2 - \varepsilon\rho^2 A}{\rho^4 A^2},$$
$$A(0,\tau) = \frac{C^2}{6\,\rho^2}\left(\frac{C}{\rho} + 6 + \rho^2\,\frac{C_0-16}{C^2}\right).$$

Уравнения движения (66,67) для данного двойного слоя:

$$\widetilde{R} - 2 = \frac{C}{\rho},$$

$$\kappa_+\frac{|C|}{\dot\rho}\frac{d}{d\tau}\left\{\frac{1}{\rho}\sqrt{\dot\rho^2 - \frac{\varepsilon}{6}\left(6 + \frac{C}{\rho} + \frac{\rho^2}{C^2}\left(C_0-16\right)\right)}\right\} =$$
$$= -\frac{12\pi}{\alpha_1}\,\rho^2\,\varepsilon S^n_n.$$

При сшивке двух вакуумов — с переменной $\widetilde{R}$ и постоянной $\widetilde{R}$ — помимо двойных слоев возможны также тонкие оболочки, для которых должны выполняться дополнительные ограничения (40).

Из условия непрерывности $\widetilde{R}$ для случая тонкой оболочки следует, что гиперповерхность в Ω^+ области определяется соотношением: $\widetilde{R} = 2$.

Условия Лихнеровича (68,69) при $\widetilde{R}(0,\tau) = 2$ соответственно:

$$\Delta|_{\Sigma_0} = -\varepsilon\,\dot\rho^2 - \frac{C_0-16}{6\,\rho^2}\left(\partial_{\widetilde{R}} r^+\right)^2 =$$
$$= \frac{x^2}{\rho^2}\left(\left(\partial_t r^-\right)^2 - \left(\partial_x r^-\right)^2\right), \quad (70)$$

$$-\rho\,\widetilde{K}|_{\Sigma_0} = \kappa_-\frac{x^2}{\dot x}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\sqrt{\dot x^2\rho^2 - \varepsilon\,x^2}}{x^2}\right) = 0. \quad (71)$$

Уравнения движения для рассматриваемой тонкой оболочки:

$$\kappa_+\sqrt{\varepsilon\,\frac{16-C_0}{6}} = \frac{12\pi\varepsilon}{\alpha_1}\,\rho^3 S^0_0, \quad S^3_3 = S^2_2 = -\frac{1}{2}S^0_0,$$

из них следует, что

$$\frac{d}{d\tau}\left(\rho^3\,S^0_0\right) = 0. \quad (72)$$

Этот же результат можно получить из условия консервативности для тензора энергии–импульса сферически–симметричной тонкой оболочки в конформной гравитации:

$$\frac{1}{\rho^3}\frac{d}{d\tau}\left(S^0_0\,\rho^3\right) - \varepsilon\left[T^{0n}\right] = 0, \quad (73)$$

так как $[T^{n0}] = 0$ для сшивки двух вакуумов.

Рассмотрим также двойной слой, разделяющий два вакуума с переменной $\widetilde{R}$:

$$ds^{2\pm} = r^\pm(\eta^\pm, \widetilde{R}^\pm)^2\left(A^\pm\,d\eta^{\pm 2} - A^{\pm -1}d\widetilde{R}^{\pm 2} - d\Omega^2\right),$$
$$A^\pm(\widetilde{R}^\pm) = \frac{1}{6}\left(\widetilde{R}^{\pm 3} - 12\widetilde{R}^\pm + C_0^\pm\right),$$

Выпишем условия Лихнеровича для данной сшивки:

$$[\Delta] = \frac{1}{\rho^2}\left[A\left(\partial_\eta r\right)^2 - A^{-1}\left(\partial_{\widetilde{R}} r\right)^2\right] = 0,$$
$$-\rho\,\widetilde{K}|_{\Sigma_0} = \frac{\kappa_+}{\dot{\widetilde{R}}^+}\frac{d}{d\tau}\left(\sqrt{\dot{\widetilde{R}}^{+2}\rho^2 - \varepsilon\,A^+}\right) =$$
$$= \frac{\kappa_-}{\dot{\widetilde{R}}^-}\frac{d}{d\tau}\left(\sqrt{\dot{\widetilde{R}}^{-2}\rho^2 - \varepsilon\,A^-}\right), \quad (74)$$

где $\kappa_\pm$ — знаки $\partial_n \widetilde{R}^\pm(0,\tau)$.

Уравнения движения для двойного слоя, разделяющего два вакуума с переменной $\widetilde{R}$:

$$\widetilde{R}^+ - \widetilde{R}^- = \frac{C}{\rho},$$

$$-\frac{C\,\kappa_+}{\rho^2 \dot{\widetilde{R}}^+}\,\frac{d}{d\tau}\left(\sqrt{\dot{\widetilde{R}}^{+2}\;\rho^2 - \varepsilon\,A^+}\right) = -\frac{12\pi}{\alpha_1}\,\rho^2\,\varepsilon S^n_n\,.$$

Перейдем к сценарию тонкой оболочки для тех же $\Omega^\pm$. В силу дополнительных соотношений (40): $\widetilde{R}^+ = \widetilde{R}^- = \widetilde{R}$. Соответственно, условия Лихнеровича сводятся к следующим соотношениям:

$$[A\,(\partial_\eta r)^2 - A^{-1}\,(\partial_{\widetilde{R}} r)^2] = 0,$$

$$[\partial_n \widetilde{R}] = \kappa_+ \sqrt{\dot{\widetilde{R}}^{+2} - \frac{\varepsilon}{\rho^2}\,A^+} - \kappa_- \sqrt{\dot{\widetilde{R}}^{-2} - \frac{\varepsilon}{\rho^2}\,A^-} = \frac{C_1}{\rho},$$

где C_1 — произвольная константа.

Уравнения движения для тонкой оболочки, разделяющей два вакуума с переменной $\widetilde{R}$:

$$C_1\,\frac{\alpha_1}{12\pi\varepsilon} = \rho^3\,S^0_0, \quad S^3_3 = S^2_2 = -\frac{1}{2}S^0_0.$$

Таким образом, для данного случая также выполняется соотношение (72), так как он тоже относится к сшивке двух вакуумных сферически–симметричных решений конформной гравитации.

Далее перейдем к исследованию сферически–симметричных времениподобных и пространственноподобных сингулярных гиперповерхностей, которые представляют из себя аналоги для конформной гравитации таких физических моделей, как горение вакуума [39, 40], фазовый переход [41], коллапс сферически–симметричной тонкой оболочки. При этом, как уже было указано ранее, в качестве $\Omega^\pm$ рассматриваются решения сферически–симметричной конформной гравитации, полученные в работе [28], а именно, использованы различные вакуумы и решения типа Вайдья.

5.2. Фазовый переход в вакууме

Рассмотрим сшивку с помощью двойного слоя пространства-времени Фридмана-Робертсона-Уокера в качестве Ω^+ и геометрии Шварцшильда в качестве Ω^-:

$$ds^{2-} = f(r)(dt^-)^2 - f^{-1}(r)dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad f(r) = 1 - \frac{r_g}{r}\,,$$

$$ds^{2+} = dt^2 - \frac{a(t)^2}{1-kx^2}dx^2 - a(t)^2 x^2 d\Omega^2.$$

Заметим, что для метрики Шварцшильда выполняется соотношение: $\widetilde{R}^- = 2 - \frac{6\,r_g}{r}$, из которого следует, что её невозможно сшить с вакуумом с $\widetilde{R} = 2$, которым является метрика Фридмана–Робертсона–Уокера, тонкой оболочкой. Для этого типа сингулярной гиперповерхности $[\widetilde{R}] = 0$, что означает $r = +\infty$ на Σ_0.

Так как здесь рассматривается двойной слой, описывающий фазовый переход в вакууме, то Σ_0 — пространственноподобная гиперповерхность, т.е. $\varepsilon = 1$. Эта модель может интерпретироваться как образование новой Вселенной под горизонтом черной дыры. В частности, в работе [42] показано, что S–брана, которая возникает под горизонтом черной дыры, когда тензор Вейля достигает струнного масштаба, описывает гиперповерхность перехода между внутренней частью черной дыры и началом новой Вселенной. В общем случае, S–брана и сингулярная гиперповерхность — различные физические модели, но для данного примера между ними можно провести аналогию как минимум на уровне действия.

Для рассматриваемого двойного слоя удобно представить условия Лихнеровича в следующей форме:

$$\left(-\widetilde{K} + \frac{\partial_n r}{r}\right)|_{\Sigma_0} = \frac{\partial_n \gamma_{00}}{2\,\gamma_{00}}|_{\Sigma_0} = \frac{\kappa_+}{a\,\dot{t}}\,\frac{d}{d\tau}\left(a\sqrt{1+\dot{t}^2}\right) =$$
$$= \frac{\kappa}{\dot{\rho}}\,\frac{d}{d\tau}\left(\sqrt{-1 + \frac{r_g}{\rho} + \dot{\rho}^2}\right)\,,$$

$$\Delta = x^2\,(\partial_t a)^2 + k\,x^2 - 1 = -1 + \frac{r_g}{\rho},$$

где κ_+ и κ — знаки $\partial_n t(0,\tau)$ и $\partial_n r(0,\tau)$ соответственно.

Последнее соотношение определяет уравнение гиперповерхности в Ω^+ области:

$$a(t)\,x = \rho(t) = \left(\frac{r_g\,a(t)^2}{(\partial_t a(t))^2 + k}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Для метрики Шварцшильда в нормальной гауссовой системе координат имеем:

$$\widetilde{K} = -\kappa\frac{\rho}{\dot{\rho}}\,\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\rho}\sqrt{\dot{\rho}^2 - 1 + \frac{r_g}{\rho}}\right),$$

эта формула полностью согласуется с (69), так как пространство-время Шварцшильда — частный случай вакуума с переменной $\widetilde{R}$, для которого $C = -6r_g$, $C_0 = 16$.

Уравнения движения для сшивки рассматриваемых метрик:

$$\kappa\frac{r_g}{\dot{\rho}}\,\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\rho}\sqrt{\dot{\rho}^2 - 1 + \frac{r_g}{\rho}}\right) = \frac{2\pi}{\alpha_1}\,\rho^2\,S^n_n\,,$$

$$S^{n0} = 0.$$

Так как одной из возможных интерпретаций данной модели является образование новой Вселенной под горизонтом черной дыры, то логично предположить, что Σ_0 должна быть однородной и изотропной по пространственным координатам. Соответственно, учитывая тот факт, что рассматривается пространственноподобная гиперповерхность, имеет смысл требовать постоянной двумерной скалярной кривизны по обе стороны Σ_0: $\widetilde{R}^{\pm} = const$.

Для метрики Шварцшильда из условия $\widetilde{R}^{+} = const$ следует, что радиус является постоянным на гиперповерхности, т.е. Σ_0 в $\Omega^{\pm}$-областях задана соотношением: $r = \rho_0 = const$. Как уже было отмечено ранее, $\rho_0 < r_g$, сшивка происходит под горизонтом. Это условие также связано с тем, что рассматриваемая гиперповерхность является пространственноподобной, а r - времениподобная координата под горизонтом.

Для $\Omega^{\pm}$ нормированное уравнение гиперповерхности постоянного радиуса:

$$n^{-}(r) = \kappa\,\frac{r-\rho_0}{\sqrt{|\Delta^{-}|}} = 0\,,$$

$$n^{+}(t,x) = \kappa\,\frac{a(t)x-\rho_0}{\sqrt{|\Delta^{+}|}} = 0\,.$$

Выпишем условия Лихнеровича для частного случая $\rho = \rho_0$:

$$\frac{\kappa_+}{a\,\dot{t}}\,\frac{d}{d\tau}\left(a\sqrt{1+\dot{t}^2}\right) = -\kappa\frac{r_g}{2\rho_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{r_g-\rho_0}}\,,$$

$$\frac{1}{a^2}\left(\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + k\right) = \frac{r_g}{\rho_0^3},$$

из последнего уравнения находим функцию $a(t)$ на Σ_0:

$$a(t) = a_0\,\exp\left\{\pm\sqrt{\frac{r_g}{\rho_0^3}}\,t\right\},\quad k=0,$$

$$a(t) = \sqrt{\frac{\rho_0^3}{r_g}}\,\mathrm{ch}\left\{\sqrt{\frac{r_g}{\rho_0^3}}\,t + \mathrm{arch}\left(\sqrt{\frac{r_g}{\rho_0^3}}\,a_0\right)\right\},\quad k=1,$$

$$a(t) = \sqrt{\frac{\rho_0^3}{r_g}}\,\mathrm{sh}\left\{\pm\sqrt{\frac{r_g}{\rho_0^3}}\,t + \mathrm{arsh}\left(\sqrt{\frac{r_g}{\rho_0^3}}\,a_0\right)\right\},\quad k=-1. \tag{75}$$

Эти решения описывают метрику де Ситтера, но они строго говоря не относятся ко всей области Ω^{+}, так как условия Лихнеровича выполняются только непосредственно на гиперповерхности.

Если же с самого начала рассмотреть в качестве Ω^{+} метрику де Ситтера, то из непрерывности инварианта Δ:

$$\Delta|_{\Sigma_0} = \frac{r_g}{\rho} - 1 = \frac{\rho^2}{\alpha^2} - 1\,,$$

автоматически следует, что единственно возможный вариант сшивки — гиперповерхность постоянного радиуса: $r = \rho_0 = \sqrt[3]{r_g\,\alpha^2}$. Здесь α — космологический горизонт метрики де Ситтера, который связан с космологической постоянной, в четырехмерном случае: $\Lambda = \frac{3}{\alpha^2}$.

Перейдем к уравнениям движения для гиперповерхности постоянного радиуса $\rho = \rho_0$:

$$-\kappa\frac{r_g}{2\,\rho_0^4}\frac{3r_g-2\rho_0}{\sqrt{\rho_0\,(r_g-\rho_0)}} = \frac{2\pi}{\alpha_1}\,S^{nn},\quad S^{n0}=0.$$

В случае пространственноподобной гиперповерхности S^{nn} играет роль плотности энергии. Для того, чтобы она была положительна, необходимо: $-\kappa\,\alpha_1 > 0$.

5.3. Горение вакуума

Исследуем времениподобный ($\varepsilon = -1$) двойной слой, разделяющий пространство-время де Ситтера:

$$ds^{2+} = f(r)dt^2 - f^{-1}(r)dr^2 - r^2d\Omega^2\,,\quad f(r) = 1-\frac{r^2}{\alpha^2},$$

и решение типа Вайдья:

$$ds^{2-} = (r^{-}(v,\widetilde{R}))^2\left(A(v,\widetilde{R})\,dv^2 - 2dv\,d\widetilde{R} - d\Omega^2\right),$$
$$A(v,\widetilde{R}) = \frac{1}{6}\left(\widetilde{R}^3 - 12\widetilde{R} + C_0(v)\right). \tag{76}$$

Рассмотрим сингулярную гиперповерхность особого вида, впервые открытую и исследованную в работах [39, 40] для общей теории относительности. Подобные гиперповерхности описывают так называемое «горение вакуума». В этом случае стенка пузыря — сферически–симметричной времениподобной гиперповерхности, не несет энергии, т.е. $S_0^0 = 0$, но поверхностное натяжение $S_2^2 = S_3^3$ ненулевое. В отличии от общей теории относительности, для сингулярной гиперповерхности в конформной гравитации компоненты S_n^n и S^{n0} также ненулевые даже для модели «горение вакуума». Более того, так как для конформной гравитации след поверхностного тензора энергии–импульса равен нулю, существует связь меджу поверхностным натяжением и «внешним давлением»:

$$S_2^2 = S_3^3 = -\frac{1}{2}S_n^n.$$

Внутренняя область пузыря заполнена некоторой материей, созданной из высвободившейся вокруг нее энергии вакуума. В ссылках, цитируемых выше, это идеальная жидкость, здесь ее можно интерпретировать как излучение в силу того, что рассматривается аналог метрики Вайдья.

Выпишем условия Лихнеровича (36) для данного случая, воспользовавшись формулами перехода от исходных координат $\{t,r\}$, $\{v,\widetilde{R}\}$ в $\Omega^{\pm}$ к нормальным гауссовым $\{n,\tau\}$:

$$\widetilde{K}|_{\Sigma_0} = \frac{1}{4}\left(\widetilde{R}^2-4\right)\,\dot{v} + \frac{d}{d\tau}\{ln\,(\rho\,\dot{v})\} = \\ = -\frac{\rho}{\dot\rho}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\sqrt{1-\frac{\rho^2}{\alpha^2}+\dot\rho^2}}{\rho}\right), \quad (77)$$

$$\Delta|_{\Sigma_0} = -\frac{\partial_{\widetilde{R}} r^-}{\rho^2}\left(2\,\partial_v r^- + A\,\partial_{\widetilde{R}} r^-\right) = -1+\frac{\rho^2}{\alpha^2}. \quad (78)$$

Подставляя полученное выражение для $\widetilde{K}$ в уравнения движения (61,62), получим:

$$\frac{1}{\dot\rho}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\sqrt{1-\frac{\rho^2}{\alpha^2}+\dot\rho^2}}{\rho}\right)\left(2-\widetilde{R}\right) = \frac{12\pi}{\alpha_1}\,\rho\,S^n_n, \quad (79)$$

$$\dot\rho\left(2-\widetilde{R}\right) - \rho\,\dot{\widetilde{R}} = \frac{12\pi\rho^3}{\alpha_1}S^{n0}, \quad S^{n2}=S^{n3}=0. \quad (80)$$

Найти общее решение подобной системы достаточно сложно, поэтому ограничимся частным случаем: $\rho=\rho_0=const$. При этом $\rho_0<\alpha$, так как только тогда гиперповерхность $r=const$ может быть времениподобной в Ω^+. Нормированные уравнения гиперповерхности в областях $\Omega^\pm$:

$$n^-(v,\widetilde{R}) = \frac{r^- - \rho_0}{\sqrt{\left|\frac{\partial_{\widetilde{R}} r^-}{(r^-)^2}\left(2\,\partial_v r^- + A\,\partial_{\widetilde{R}} r^-\right)\right|}} = \frac{r^- - \rho_0}{\sqrt{|\Delta^-|}} = 0,$$

$$n^+(r) = \frac{r-\rho_0}{\sqrt{|1-\frac{r^2}{\alpha^2}|}} = \frac{r-\rho_0}{\sqrt{|\Delta^+|}} = 0.$$

Перепишем условия Лихнеровича (77,78) для частного случая $r=const$:

$$\dot{y} + \frac{\alpha}{\rho_0\sqrt{\alpha^2-\rho_0^2}}\,y = \frac{1}{4}\left(\widetilde{R}^2-4\right), \quad y=\frac{1}{\dot v}, \quad (81)$$

$$\Delta|_{\Sigma_0} = -\frac{\partial_{\widetilde{R}} r^-}{\rho_0^2}\left(2\,\partial_v r^- + A\,\partial_{\widetilde{R}} r^-\right) = -1+\frac{\rho_0^2}{\alpha^2}. \quad (82)$$

Уравнения движения для рассматриваемого двойного слоя постоянного радиуса:

$$\frac{\alpha}{\rho_0^2\sqrt{\alpha^2-\rho_0^2}}\left(\widetilde{R}-2\right) = \frac{12\pi}{\alpha_1}\,\rho_0\,S^n_n, \quad (83)$$

$$\dot{\widetilde{R}} = -\frac{12\pi\rho_0^2}{\alpha_1}S^{n0}, \quad S^{n2}=S^{n3}=0. \quad (84)$$

Заметим, что для метрики де Ситтера наблюдатель, находящийся на постоянном радиусе — так называемый «наблюдатель Кодамы» [43], как отмечено в статье [44], «чувствует» постоянную локальную температуру:

$$T_{loc} = \frac{T_H}{\sqrt{1-\frac{r_0^2}{\alpha^2}}} = \frac{\sqrt{a^2+\frac{1}{\alpha^2}}}{2\pi},$$

где $T_H = \frac{1}{2\pi\alpha}$ - температура Хокинга для пространства-времени де Ситтера, $a^2 = a^c\,a_c = -\frac{\rho_0^2}{\alpha^2(\alpha^2-\rho_0^2)}$ - квадрат ускорения для траектории $r=\rho_0$.

Так как «внешний поток» связан с излучением, то можно предположить, что постоянство локальной температуры в Ω^+ для наблюдателя, находящегося на гиперповерхности, связано с постоянством S^{n0}. В этом случае из уравнения (84) следует, что двумерная скалярная кривизна Ω^- на Σ_0 линейно зависит от собственного времени τ:

$$\widetilde{R}(0,\tau) = -\frac{12\pi\,\rho_0^2}{\alpha_1}\,S^{n0}\,\tau + \widetilde{R}_0, \quad \widetilde{R}_0 = \widetilde{R}(0,0). \quad (85)$$

Таким образом, получается гиперповерхность, для которой радиус не меняется, но двумерная скалярная кривизна со стороны Ω^- линейно растет или падает. Здесь можно провести аналогию с полузамкнутыми мирами, которые впервые были исследованы О. Клейном (1961), а также И. Д. Новиковым и Я. Б. Зельдовичем (1962).

Воспользовавшись (85), преобразуем уравнение, полученное из условия непрерывности $\widetilde{K}$:

$$-\frac{12\pi\,\rho_0^2}{\alpha_1}\,S^{n0}\,\frac{dy}{d\widetilde{R}} + \frac{\alpha}{\rho_0\sqrt{\alpha^2-\rho_0^2}}\,y = \frac{1}{4}\left(\widetilde{R}^2-4\right),$$

для него можно получить общее решение:

$$y(\tau) = \frac{1}{\dot v(0,\tau)} = C1\,\exp\left\{\frac{\alpha\,\alpha_1}{12\pi\,\rho_0^3\,S^{n0}\sqrt{\alpha^2-\rho_0^2}}\,\widetilde{R}\right\} + \\ + \frac{\rho_0\sqrt{\alpha^2-\rho_0^2}}{\alpha}\left\{\frac{1}{4}\widetilde{R}^2 + \frac{6\pi\,\rho_0^3\sqrt{\alpha^2-\rho_0^2}}{\alpha_1\,\alpha}S^{n0}\,\widetilde{R} + \frac{72\,\pi^2\rho_0^6\,(\alpha^2-\rho_0^2)}{\alpha_1^2\,\alpha^2}\left(S^{n0}\right)^2 - 1\right\}, \quad (86)$$

где $C1$ — константа, зависящая от начальных условий.

Следствием стандартных соотношений замены координат при переходе к гауссовой нормальной системе координат в Ω^- является связь: $\widetilde{\gamma}_{00} = \dot{v}\,(A\,\dot{v} - 2\,\dot{\widetilde{R}})$. Кроме того, для случая $\rho(\tau) = \rho_0$ верно следующее: $\widetilde{\gamma}_{00}|_{\Sigma_0} = \frac{1}{\rho_0^2}$. С учетом всех вышеперечисленных соотношений, можно выразить функцию $C_0(v)$ на Σ_0 через найденные ранее величины:

$$C_0(\tau) = C_0(v(0,\tau)) = 12\,\dot{\widetilde{R}}\,y + 6\,\frac{y^2}{\rho_0^2} - \widetilde{R}^3 + 12\,\widetilde{R}.$$

Что касается сшивки тех же геометрий с помощью времениподобной тонкой оболочки, то в отличии от общей теории относительности, для сферически-симметричной конформной гравитации никакая времениподобная тонкая оболочка не может описывать модель «горения вакуума», так как существует связь: $S_3^3 = S_2^2 = -\frac{1}{2}S_0^0$.

5.4. Фазовый переход

Исследуем пространственноподобный двойной слой ($\varepsilon = 1$), который описывает фазовый переход от пространства-времени Шварцшильда к решению типа Вайдья:

$$ds^{2-} = f(r)dt^2 - f^{-1}(r)dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad f = 1 - \frac{r_g}{r},$$

$$ds^{2+} = \left(r^+(v,\widetilde{R})\right)^2 \left(A(v,\widetilde{R})\,dv^2 - 2dv\,d\widetilde{R} - d\Omega^2\right),$$
$$A(v,\widetilde{R}) = \frac{1}{6}\left(\widetilde{R}^3 - 12\widetilde{R} + C_0(v)\right). \tag{87}$$

Запишем условия Лихнеровича для этой сшивки:

$$-\widetilde{K}|_{\Sigma_0} = \frac{1}{4}\left(\widetilde{R}^2 - 4\right)\dot{v} + \frac{d}{d\tau}\{ln\,(\rho\,\dot{v})\} = $$
$$= -\frac{\rho}{\dot{\rho}}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\rho}\sqrt{\dot{\rho}^2 - 1 + \frac{r_g}{\rho}}\right), \tag{88}$$

$$\Delta|_{\Sigma_0} = -\frac{\partial_{\widetilde{R}} r^+}{\rho^2}\left(A\,\partial_{\widetilde{R}} r^+ + 2\,\partial_v r^+\right) = -1 + \frac{r_g}{\rho}. \tag{89}$$

Уравнения движения для рассматриваемого двойного слоя:

$$\frac{\rho}{\dot{\rho}}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\rho}\sqrt{\dot{\rho}^2 - 1 + \frac{r_g}{\rho}}\right)\left(2 - \frac{6\,r_g}{\rho} - \widetilde{R}\right) = -\frac{12\pi}{\alpha_1}\rho^2 S_n^n, \tag{90}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\rho\left(\widetilde{R} - 2\right)\right\} = \frac{12\pi\rho^3}{\alpha_1}\,S^{n0}. \tag{91}$$

Если данная модель, аналогично разобранному выше примеру фазового перехода в вакууме, представляет из себя фазовый переход к новой Вселенной под горизонтом, то в силу изотропии двумерная скалярная кривизна должна быть постоянна по обе стороны Σ_0:

$$\widetilde{R}^-|_{\Sigma_0} = 2 - \frac{6r_g}{\rho_0} = \text{const}, \quad \widetilde{R} = \widetilde{R}_0 = \text{const},$$

откуда следует, что радиус — константа на Σ_0: $\rho = \rho_0 < r_g$, так как он является непрерывным инвариантом для сферически–симметричной задачи.

Нормированные уравнения гиперповерхности в $\Omega^\pm$ для случая постоянного радиуса:

$$n^\pm = \frac{\rho_0 - r}{\sqrt{|\Delta^\pm|}} = 0\,.$$

Подставляя соотношение $\rho = \rho_0$ в условия Лихнеровича (88,89) и уравнения движения (90,91), получим:

$$\dot{y} + \frac{\frac{3}{2}r_g - \rho_0}{\rho_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{r_g - \rho_0}}y = \frac{1}{4}\left(\widetilde{R}_0^2 - 4\right), \quad y = \frac{1}{\dot{v}},$$

$$\frac{\frac{3}{2}r_g - \rho_0}{\rho_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{r_g - \rho_0}}\left(-2 + \frac{6r_g}{\rho_0} + \widetilde{R}_0\right) = \frac{12\pi}{\alpha_1}\rho_0^2 S^{nn}, \quad S^{n0} = 0.$$

Для пространственноподобной гиперповерхности S^{nn} интерпретируется как поверхностная плотность энергии. Из уравнений движения следует, что она неотрицательна, если верно следующее:

$$\widetilde{R}_0 \geq 2 - \frac{6\,r_g}{\rho_0}.$$

Для сшивки рассматриваемых метрик также возможен аналог «горения вакуума», для которого $S_n^n = S^{nn} = 0$, но он соответствует пространственноподобной тонкой оболочке, разобранной далее.

Как было отмечено выше, для решения типа Вайдья можно выразить функцию $C_0(v)$ на Σ_0 через y и $\widetilde{R}$:

$$\widetilde{\gamma}_{00} = \dot{v}\left(A\,\dot{v} - 2\,\dot{\widetilde{R}}\right),$$
$$\widetilde{\gamma}_{00}(0,\tau) = -\frac{1}{\rho^2} \Rightarrow C_0(v(0,\tau)) = C_0(\tau) =$$
$$= 12\dot{\widetilde{R}}y - 6\,\frac{y^2}{\rho_0^2} - \widetilde{R}^3 + 12\widetilde{R},$$

откуда, учитывая полученные выше результаты, получаем:

$$C_0(\tau) =$$
$$= -\frac{6}{\rho_0^2}\left\{\left(y_0 - \frac{1}{4\lambda}\left(\widetilde{R}_0^2 - 4\right)\right)e^{-\lambda\tau} + \frac{1}{4\lambda}\left(\widetilde{R}_0^2 - 4\right)\right\}^2 -$$
$$- \widetilde{R}_0^3 + 12\widetilde{R}_0,$$
$$\lambda = \frac{\frac{3}{2}r_g - \rho_0}{\rho_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{r_g - \rho_0}}, \quad \widetilde{R}_0 = \widetilde{R}(0,0), \quad y_0 = \frac{1}{\dot{v}(0,0)}, \tag{92}$$

т.е. $C_0(\tau)$ стремится к константе при $\tau \to \infty$.

Рассмотрим сшивку решений, представленных выше, с помощью пространственноподобной тонкой оболочки. В силу непрерывности двумерной скалярной кривизны для этого типа сингулярных гиперповерхностей:

$$\widetilde{R}|_{\Sigma_0} = \widetilde{R}^{-}|_{\Sigma_0} = 2 - \frac{6\,r_g}{\rho}\,,$$

подставляя это соотношение в (88), получим:

$$-\widetilde{K}|_{\Sigma_0} = \left(\frac{3}{2}r_g - \rho\right)\frac{6r_g}{\rho^2}\,\dot{v} + \frac{\ddot{v}}{\dot{v}} + \frac{\dot{\rho}}{\rho} = = -\frac{\rho}{\dot{\rho}}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\sqrt{-1+\frac{r_g}{\rho}+\dot{\rho}^2}}{\rho}\right). \quad (93)$$

Аналогичным образом используем непрерывность $\widetilde{R}$ для того, чтобы уменьшить количество неизвестных функций в уравнениях движения тонкой оболочки:

$$[\partial_n \widetilde{R}] = \sqrt{-1+\frac{r_g}{\rho}+\dot{\rho}^2} + \frac{\kappa_+}{\rho}\sqrt{\dot{\rho}^2\,\rho^2 - \frac{\rho^4}{36\,r_g^2}\,A} = = \frac{2\pi\,\rho^4}{\alpha_1\,r_g}S_0^0, \quad S_3^3 = S_2^2 = -\frac{1}{2}S_0^0, \quad (94)$$

где κ_+ — знак $\partial_n \widetilde{R}(0,\tau)$.

Из условия изотропности на гиперповерхности следует, что $\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$, соответственно, для постоянного радиуса из (93,94) получаем следующую систему уравнений:

$$\dot{y} + \frac{\frac{3}{2}\,r_g - \rho_0}{\rho_0^2\sqrt{\frac{r_g}{\rho_0}-1}}\,y = \left(\frac{3}{2}r_g - \rho_0\right)\frac{6r_g}{\rho_0^2}, \quad y = \frac{1}{\dot{v}},$$

$$\frac{\alpha_1\,r_g}{2\pi\,\rho_0^4}\left(\sqrt{-1+\frac{r_g}{\rho_0}} + \kappa_+\frac{|y|}{6r_g}\right) = S_0^0,$$

$$S_3^3 = S_2^2 = -\frac{1}{2}S_0^0.$$

Здесь используется соотношение: $-A = \frac{y^2}{\rho_0^2}$, которое является следствием формул перехода в Ω^+ от координат $\{v, \widetilde{R}\}$ к гауссовым нормальным для частного случая $\rho = \mathrm{const}$.

С учетом всего вышеперечисленного, общее решение представленной выше системы уравнений:

$$y = 6r_g\sqrt{-1+\frac{r_g}{\rho_0}} + \left(y_0 - 6r_g\sqrt{-1+\frac{r_g}{\rho_0}}\right)\exp\left\{-\frac{\frac{3}{2}\,r_g - \rho_0}{\rho_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{r_g - \rho_0}}\,\tau\right\},$$

$$\frac{\alpha_1\,r_g}{2\pi\,\rho_0^4}\left(\sqrt{-1+\frac{r_g}{\rho_0}} + \kappa_+\left|\sqrt{-1+\frac{r_g}{\rho_0}} + \left(\frac{y_0}{6r_g} - \sqrt{-1+\frac{r_g}{\rho_0}}\right)\exp\left\{-\frac{\frac{3}{2}\,r_g - \rho_0}{\rho_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{r_g - \rho_0}}\,\tau\right\}\right|\right) = S_0^0,$$

$$S_3^3 = S_2^2 = -\frac{1}{2}S_0^0,$$

откуда, в частности, следует, что если $\kappa_+ = -1$, то $S_0^0 \to 0$ при $\tau \to +\infty$.

Аналогично предыдущему случаю, для функции $C_0(\tau)$ получаем:

$$C_0(\tau) = -\frac{6}{\rho_0^2}\left(6r_g\sqrt{-1+\frac{r_g}{\rho_0}} + \left(y_0 - 6r_g\sqrt{-1+\frac{r_g}{\rho_0}}\right)\exp\left\{-\frac{\frac{3}{2}\,r_g - \rho_0}{\rho_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{r_g - \rho_0}}\,\tau\right\}\right)^2 - -8\left(1 - \frac{3\,r_g}{\rho_0}\right)^3 + 24\left(1 - \frac{3\,r_g}{\rho_0}\right). \quad (95)$$

Так как при выводе этой формулы были использованы только условия Лихнеровича и соотношения перехода к гауссовой нормальной системе координат, очевидно, что она представляет из себя частный случай (92) с $\widetilde{R}_0 = 2 - \frac{6\,r_g}{\rho_0}$.

5.5. Коллапс

Исследуем времениподобный двойной слой, разделяющий вакуум Минковского и метрику типа Вайдья:

$$ds^{2-} = dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2,$$

$$ds^{2+} = \left(r^+(u,\widetilde{R})\right)^2 \left(A(u,\widetilde{R})\,du^2 + 2du\,d\widetilde{R} - d\Omega^2\right),$$

$$A(u,\widetilde{R}) = \frac{1}{6}\left(\widetilde{R}^3 - 12\widetilde{R} + C_0(u)\right).$$

Выпишем условия Лихнеровича, воспользовавшись формулами перехода от исходных координат $\{u,\widetilde{R}\}$, $\{t,r\}$ в $\Omega^\pm$ к нормальным гауссовым $\{n,\tau\}$:

$$-\widetilde{K}|_{\Sigma_0} = \frac{\rho}{\dot\rho}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\sqrt{1+\dot\rho^2}}{\rho}\right) = -\frac{\dot\rho}{\rho} - \frac{\ddot u}{\dot u} + \frac{1}{4}\left(\widetilde{R}^2 - 4\right)\dot u\,, \tag{96}$$

$$\Delta|_{\Sigma_0} = \frac{\partial_{\widetilde{R}} r^+}{\rho^2}\left(2\,\partial_u r^+ - A\,\partial_{\widetilde{R}} r^+\right) = -1, \tag{97}$$

Уравнения движения для двойного слоя, разделяющего вакуум Минковского и метрику типа Вайдья:

$$\frac{\rho}{\dot\rho}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\sqrt{1+\dot\rho^2}}{\rho}\right)\left(\widetilde{R}-2\right) = -\frac{12\pi}{\alpha_1}\rho^2 S^n_n\,, \tag{98}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\rho\left(\widetilde{R}-2\right)\right\} = \frac{12\pi\rho^3}{\alpha_1}S^{n0}, \quad S^{n2} = S^{n3} = 0. \tag{99}$$

Рассмотрим частный случай — двойной слой, состоящий из пыли, для которого: $S^2_2 = S^3_3 = 0, \quad S^0_0 = \frac{M}{4\pi\rho^2}$. Из условия равенства нулю следа поверхностного тензора энергии–импульса следует, что $S^n_n = -S^0_0 = -\frac{M}{4\pi\rho^2}$. Подставляя это выражение в уравнения движения (98,99), получим:

$$\frac{\rho}{\dot\rho}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\sqrt{1+\dot\rho^2}}{\rho}\right)\left(\widetilde{R}-2\right) = \frac{3M}{\alpha_1},$$

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\rho\left(\widetilde{R}-2\right)\right\} = \frac{12\pi\rho^3}{\alpha_1}S^{n0}, \quad S^{n2} = S^{n3} = 0.$$

Выразив из первого уравнения функцию $\rho\left(\widetilde{R}-2\right)$, можно свести систему к одному уравнению:

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\dot\rho\left(\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\sqrt{1+\dot\rho^2}}{\rho}\right)\right)^{-1}\right\} = \frac{4\pi\rho^3}{M}S^{n0}.$$

Если $S^{n0} \propto \frac{1}{\rho^2}$, существует решение: $\rho(\tau) = \rho_0 + \omega\,\tau, \quad \omega = \pm\left\{4\left(\frac{S^{nn}}{S^{n0}}\right)^2 - 1\right\}^{-\frac{1}{2}}$. В этом случае возникает определенное ограничение на соотношение между «внешним давлением» и «внешним потоком» : $\left|\frac{S^{n0}}{S^{nn}}\right| < 2$.

Двумерная скалярная кривизна на гиперповерхности со стороны Ω^+ для этого решения:

$$\widetilde{R}(\tau) = 2 - \frac{3M}{\alpha_1}\frac{\rho(\tau)}{\sqrt{1+\omega^2}} = 2 - \frac{3M}{\alpha_1}\frac{\rho_0 + \omega\,\tau}{\sqrt{1+\omega^2}}.$$

Если $\omega < 0$, то радиус падает до нуля за конечное собственное время $\tau_1 = -\frac{\rho_0}{\omega}$, а $\widetilde{R}$ стремится к 2, что означает исчезновение двойного слоя.

Подставляя полученное выше выражение для $\rho(\tau)$ в уравнение (96), находим:

$$\frac{1}{\dot u} = \rho^2(\tau)\,\frac{3M}{2\alpha_1\sqrt{1+\omega^2}}\times$$
$$\times\left\{\frac{2}{\omega+\sqrt{1+\omega^2}} - \frac{3M}{2\alpha_1\sqrt{1+\omega^2}}\frac{\rho(\tau)}{2\omega+\sqrt{1+\omega^2}}\right\},$$

При переходе к гауссовым нормальным координатам для исходящей метрики типа Вайдья выполняется соотношение: $\widetilde{\gamma}_{00} = \dot u\left(A\,\dot u + 2\dot{\widetilde{R}}\right)$, с помощью которого можно выразить $C_0(\tau)$ через найденные выше функции:

$$C_0(u(0,\tau)) = C_0(\tau) = \frac{6}{\dot u^2\rho^2} - \frac{12}{\dot u}\dot{\widetilde{R}} + 12\widetilde{R} - \widetilde{R}^3,$$

откуда, с учетом полученных результатов, получим:

$$\begin{aligned} C_0(\tau) = &\frac{27M^2\rho^2}{2\alpha_1^2(1+\omega^2)}\left\{\frac{2}{\omega+\sqrt{1+\omega^2}} - \frac{3M}{2\alpha_1\sqrt{1+\omega^2}}\frac{\rho(\tau)}{2\omega+\sqrt{1+\omega^2}}\right\}^2 + \\ &+ \frac{54\,M^2\rho^2\,\omega}{\alpha_1^2(1+\omega^2)}\left\{\frac{2}{\omega+\sqrt{1+\omega^2}} - \frac{3M}{2\alpha_1\sqrt{1+\omega^2}}\frac{\rho(\tau)}{2\omega+\sqrt{1+\omega^2}}\right\} + \\ &+ 12\left(2 - \frac{3M}{\alpha_1}\frac{\rho}{\sqrt{1+\omega^2}}\right) - \left(2 - \frac{3M}{\alpha_1}\frac{\rho}{\sqrt{1+\omega^2}}\right)^3. \end{aligned} \tag{100}$$

Из этой формулы, в частности, следует, что $C_0(\tau) \to 16$ при $\rho \to 0$.

Для представленных выше геометрий рассмотрим сшивку с помощью времениподобной тонкой оболочки. Так как метрика Минковского относится к типу вакуумов сферически–симметричной конформной гравитации с постоянной $\widetilde{R} = 2$, то в силу непрерывности двумерной скалярной кривизны имеем:

$$\widetilde{R}(0,\tau) = \widetilde{R}^-(0,\tau) = 2\,,$$

подставляя это соотношение в (96), получим:

$$-\widetilde{K}|_{\Sigma_0} = \frac{\rho}{\dot\rho}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\sqrt{1+\dot\rho^2}}{\rho}\right) = \frac{1}{2}\frac{\dot C_0}{C_0 - 16}\,. \qquad (101)$$

Выпишем уравнения движения для рассматриваемой сингулярной гиперповерхности:

$$\kappa_+\sqrt{\frac{1}{6}\left(C_0 - 16\right)} = -\frac{12\pi\rho^3}{\alpha_1}S^0_0, \quad S^3_3 = S^2_2 = -\frac{1}{2}S^0_0. \qquad (102)$$

Выше была использована формула:

$$\partial_n\widetilde{R}(0,\tau) = \kappa_+\sqrt{\dot{\widetilde{R}}^2 + \frac{A}{\rho^2}}, \quad \kappa_+ = \pm 1\,,$$

которая получается из соотношений перехода для исходящего решения типа Вайдья от координат $\{\widetilde{R}, u\}$ к нормальным гауссовым $\{n,\tau\}$.

Необходимо отметить, что из уравнений (65) следует, что в сферически–симметричной конформной гравитации не существует тонкой оболочки, состоящей из пыли.

В отличии от сшивки двух вакуумов, здесь $\frac{d}{d\tau}\left(\rho^3\,S^0_0\right) \neq 0$. Покажем, что из уравнений движения, как и в случае вакуумной тонкой оболочки, следует (73).

Для исходящего решения типа Вайдья единственная ненулевая компонента тензора энергии–импульса: $T_{uu} = \frac{\alpha_1}{144\,\pi r^2}\frac{d}{du}C_0(u)$. При переходе к координатам $\{n,\tau\}$ получим: $T_{0n} = \dot u\,u'\,T_{uu}$, откуда в свою очередь следует:

$$T^{0n}(0,\tau) = -\dot u\,u'\,T_{uu} = \\ = \frac{\alpha_1}{144\,\pi}\frac{\dot C_0}{A\,\rho^2}\left(-\dot{\widetilde{R}} + \kappa_1\sqrt{\dot{\widetilde{R}}^2 + \frac{A}{\rho^2}}\right) = \\ = \frac{\kappa_1\,\alpha_1}{144\,\pi}\frac{\sqrt{6}\,\dot C_0}{\sqrt{C_0 - 16}\,\rho^3}\,.$$

Таким образом, несложно убедиться, что выполняется равенство (73).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этом заключительном разделе обсудим полученные результаты. В наиболее общем виде сингулярная гиперповерхность в квадратичной гравитации представляет из себя двойной слой, частным случаем являются тонкие оболочки. Для времениподобного и пространственноподобного случаев критерием того, что гиперповерхность представляет из себя тонкую оболочку является отсутствие скачков в тензоре Риччи на гиперповерхности, для светоподобного — непрерывность скалярной кривизны. Из равенства нулю соответствующих скачков для любого типа гиперповерхностей автоматически следует, что «внешнее давление» и «внешний поток» равны нулю.

Для того, чтобы пояснить физический смысл «внешнего давления» и «внешнего потока», которые равны нулю в общей теории относительности, они были получены напрямую из лагранжиана материи. В частности, рассматривался лагранжиан идеальной жидкости с непостоянным числом частиц. Как оказалось, именно добавка, связанная с рождением частиц, которая в отсутствии внешних полей пропорциональная квадрату тензора Вейля, дает вклад в соответствующие компоненты поверхностного тензора энергии–импульса.

Для времениподобных и пространственноподобных сферически–симметричных сингулярных гиперповерхностей систему уравнений движения, наряду с условиями Лихнеровича, можно записать с помощью инвариантов сферической геометрии, а именно, радиуса, двумерной скалярной кривизны $\widetilde{R}$ и двумерного лапласиана от радиуса. В этом случае критерием того, что сингулярная гиперповерхность представляет из себя тонкую оболочку, является непрерывность двумерной скалярной кривизны и двумерного лапласиана от радиуса.

В качестве приложений исследованы сферически–симметричные времениподобные и пространственноподобные сингулярные гиперповерхности, разделяющие два решения сферически–симметричной конформной гравитации, полученные в работе [28]. В частности, использованы различные вакуумы и решения типа Вайдья. С помощью сшивок соответствующих решений исследованы аналоги для конформной гравитации таких физических моделей, как «горение вакуума», фазовый переход, коллапс сферически–симметричной тонкой оболочки.

Благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю доктору физ.-мат. наук. В. А. Березину за советы и ценные замечания при работе над данной статьей.

[1] *Ostrogradsky M.* // Mem. Ac. St. Petersbourg. 1850. **VI**. P. 385.
[2] *Hooft G., Veltman M.J.G.* // Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor. A 1974. **20**. P. 69.
[3] *Deser S.* // Conf. Proc. C. 1975. **750926** P. 229.
[4] *Stelle K.S.*// Phys. Rev. D. 1977. **16**. P. 953.
[5] *Utiyama R., DeWitt B.S.* // J. Math. Phys. 1962 **3**. P. 608.
[6] *Zel'dovich Ya.B.* // JETP Lett. 1970. **12**. P. 307.
[7] *Grib A.A., Mamaev S.G.*// Sov. J. Nucl. Phys. 1970. **10**. P. 722.
[8] *Zel'dovich Ya.B., Pitaevsky L.P.*// Comm. Math. Phys. 1971. **23**. P. 185.
[9] *Zel'dovich Ya.B., Starobinskii A.A.*// Sov. Phys. JETP. 1972. **34**. P. 1159.
[10] *Parker L., Fulling S.A.*// Phys. Rev. D. 1973. **7**. P. 2357.
[11] *Hu B.L., Fulling S.A., Parker L.* // Phys. Rev. D. 1973. **8**. P. 2377.
[12] *Hu B.L., Fulling S.A., Parker L.*// Phys. Rev. D. 1974. **10** P. 3905.
[13] *Fulling S.A., Parker L.*// Ann. Phys. 1974. **87**. P. 176.
[14] *Lukash V.N., Starobinskii A.A.*// Sov. Phys. JETP. 1974. **39**. P. 742.
[15] *Zel'dovich Ya.B., Starobinskii A.A.* //JETP. Lett. 1977. **26**. P. 252.
[16] *Starobinskii A.A.*// Phys. Lett. B. 1980. **91**. P. 99.
[17] *Israel W.* //Il Nuovo Cim. B. 1966. **44**. P. 1.
[18] *Israel W.* // Phys. Lett. A. 1967. **24**. P. 184.
[19] *de la Cruz V., Israel W.*//Il Nuovo Cim. A. 1967. **51**. P. 744.
[20] *Senovilla J.M.M.* // Phys. Rev. D. 2013. **88**. 064015.
[21] *Senovilla J.M.M.*//Class. Quantum Grav. 2014. **31**. 072002.
[22] *Senovilla J M M*//J. Phys.: Conf. Ser. 2015. **600**. 012004.
[23] *Reina B, Senovilla J.M.M., Vera R.*// Class. Quantum Grav. 2016. **33**. 105008.
[24] *Eiroa E.F., Figueroa Aguirre G., Senovilla J.M.M.*// Phys. Rev. D. 2017. **95**. 124021.
[25] *Senovilla J.M.M.* // J. High Energ. Phys. 2018. 134.
[26] *Berezin V.A.* // Int. J. Mod. Phys. A 1987. **2** P. 1591.
[27] *Bach R.* // Math. Zeit. 1921. **9** P. 110.
[28] *Berezin V.A., Dokuchaev V.I., Eroshenko Yn.N.* // J. Cosmol. Astropart. Phys. 2016. **10** P. 19.
[29] *Lake K.* // Gen. Rel. Grav. 2017. **49**. P. 134.
[30] *Deruelle N., Madore J.*// On the quasi-linearity of the Einstein- "Gauss-Bonnet"gravity field equations. Preprint. gr-qc/0305004. 2003.
[31] *Berezin V.A., Ivanova I.D.*// Lightlike singular hypersurfaces in quadratic gravity. Preprint. gr-qc/2201.09142.
[32] *Berezin V.A., Dokuchaev V.I., Eroshenko Yu.N., Smirnov A.L.*// Class. Quantum Grav. 2021. **38**. 045014.
[33] *Ray J.R.* // J. Math. Phys. 1972. **13** P. 1451.
[34] *Berezin V.A., Dokuchaev V.I., Eroshenko Yn.N.* // EPJ Web Conf. 2016. **125** 03003.
[35] *Berezin V.A., Dokuchaev V.I. , Eroshenko Yn.N.* // JCAP 2017. **1** P. 18.
[36] *Berezin V.A., Dokuchaev V.I., Eroshenko Yn.N.* // J. Phys. Conf. Ser. 2018. **1051** 012006.
[37] *Berezin V.A., Dokuchaev V.I.* // MDPI Phys. 2021. **3** P. 814.
[38] *Berezin V.A., Dokuchaev V.I.* // Weyl cosmology. Preprint. gr-qc/2203.04257. 2022.
[39] *Berezin V.A., Kuzmin V.A., Tkachev I.I.* // Phys. Lett. B 1983. **124** P. 479.
[40] *Berezin V.A., Kuzmin V.A., Tkachev I.I.* // Sov. Phys. JETP 1984. **59** P. 459.
[41] *Berezin V.A., Kuzmin V.A., Tkachev I.I.* // Phys. Lett. B 1983. **130** P. 27.
[42] *Brandenberger R., Robnik J., Heisenberg L.* // Int. J. Mod. Phys. D 2021. **30** P. 2142001.
[43] *Kodama H.* // Prog. Theor. Phys. 1980. **63** P. 1217.
[44] *Casadio R., Chiodini S., Orlandi A., Acquaviva G., Di Criscienzo R., Vanzo L.* //Mod.Phys.Lett.A 2011. **26** P. 2149.

Spherically symmetrical singular hypersurfaces in conformal gravity

I. D. Ivanova

Institute for Nuclear Research of the Russian Academy of Sciences, Moscow 117312, Russia
E-mail: pc_mouse@mail.ru

The surface energy-momentum tensor was obtained for the action of an ideal fluid with a variable number of particles in Euler variables. It is shown that in the absence of external fields, “external pressure” and “external flow” are associated with the production of particles in a double layer. The equations of motion along with the Lichnerowicz conditions are expressed using invariants of spherical geometry for timelike and spacelike spherically symmetric singular hypersurfaces. It is shown that for spherically symmetric thin shells the two-dimensional scalar curvature and the two-dimensional Laplacian of the radius are continuous. Spherically symmetric timelike and spacelike singular hypersurfaces separating two solutions of spherically symmetric conformal gravity are investigated as applications, in particular, various vacua and Vaidya-type solutions are used.

PACS: 02.40.Ky, 02.40.-k, 04.20.Fy, 04.50.Kd.

Keywords: conformal gravity, singular hypersurfaces, thin shell, double layer.

Received 21 May 2022.

Сведения об авторах

Иванова Инна Дмитриевна — стажер-исследователь; e-mail: pc_mouse@mail.ru.