Взаимодействие аксионной темной материи с электромагнитным полем в анизотропной однородной Вселенной типа Бианки V и VI

А. Ф. Шакирзянов,* А. Б. Балакин†
Казанский федеральный университет, Институт физики,
кафедра теории относительности и гравитации
Россия, 420008, Казань, ул. Кремлевская, д. 16а

(Поступила в редакцию 18.05.2022; подписана в печать 30.05.2022)

Для классов V и VI моделей Бианки, описывающих эволюцию анизотропной пространственно однородной ранней Вселенной с глобальным магнитным полем, исследована проблема формирования электрического поля, индуцированного взаимодействием фотонов с аксионной темной материей. Проблема исследована в рамках авторской версии нелинейной аксионной электродинамики. Показано, что только для частной модели Бианки-VI_0 симметрия магнито–электрической полевой конфигурации совместна с пространственной симметрией модели. Для модели данного типа найдены точные решения электродинамических уравнений и установлено, что эволюция аксионно-индуцированного электрического поля может сопровождаться его аномальным ростом.

PACS: 95.36.+x; 95.35.+d;98.80.-k УДК: 524.83, 530.16, 532.12, 532.13, 536.71, 536.73
Ключевые слова: темная энергия, темная материя.

ВВЕДЕНИЕ

Вслед за признанием гипотезы о том, что Большой Взрыв на ранней стадии развития Вселенной был с максимальной долей вероятности пространственно анизотропным процессом, у космологов сформировался устойчивый интерес к космологическим моделям I–IX по классификации Бианки [1, 2]. Эта классификация однородных пространств, весьма элегантная и строгая с математической точки зрения, поставила несколько вопросов перед физиками. Дело в том, что согласно требованию, которое наложено уравнениями Эйнштейна, пространственная симметрия, ассоциированная с выбором типа модели Бианки, должна быть унаследована источником гравитационного поля (или наоборот). Иными словами, если производная Ли от тензора Эйнштейна вдоль выбранных векторов Киллинга равна нулю (геометрическое требование), то также должна обращаться в нуль производная Ли от тензора энергии–импульса того поля и/или той материи, которые оказались источником гравитации (физическое требование). Возникает вопрос: если исследуются неизотропные источники гравитации, ассоциированные, например, с полями Янга–Миллса, Фарадея-Максвелла, векторными полями типа Джекобсоновского динамического эфира или его цветной версии [3, 4], какие конфигурации полей совместимы с выбранной моделью Бианки, а какие нет? В истории развития представлений об анизотропной Вселенной выдающуюся роль сыграла модель Бианки–I, для которой характерно наличие трех пространственно-подобных векторов Киллинга, задающих сдвиги в трехмерной части пространства–времени. Вследствие такой симметрии метрика пространства–времени может быть выбрана однородной, зависящей только от космологического времени t. В силу наследования симметрии, все физические поля также выбираются как функции от времени, и многие физические модели оказываются точно интегрируемыми (см., например, [5–7]).

Наше внимание привлекли следующие по простоте классы пространств Бианки, а именно, V и VI. Дело в том, что для этих моделей допустимы два вектора Киллинга, задающие сдвиги в пространстве, а потому метрика может быть приведена к виду [8]

$$ds^2 = dt^2 - \left[a^2(t)e^{-2mz}dx^2 + b^2(t)e^{2nz}dy^2 + c^2(t)dz^2\right] . \tag{1}$$

Здесь $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ — это функции, которые следует найти из уравнений Эйнштейна, а m и n — это константы, управляющие параметры модели. Если $m = n = 0$, получаем метрику в модели Бианки–I; если $-m = n$, мы имеем дело с моделью Бианки-V; общий случай задает модель Бианки–VI, а если $m = n$, мы сталкиваемся со специфической моделью Бианки-VI_0. Специфика последней модели в том, что детерминант метрического тензора $g = -(abc)^2$ не зависит от z и совпадает с таковым для модели Бианки–I, хотя в остальных аспектах ось $0z$ остается выделенной.

О каких интересных задачах мы хотели бы поговорить в данной заметке? В статьях [9, 10] в рамках модели Бианки–I с магнитным полем удалось найти точные решения уравнений нелинейной аксионной электродинамики, которые описывают аномальный рост аксионно-индуцированного электрического поля. Электрическое поле вспышечного типа, порожденное взаимодействием аксионной темной материи с исходным однородным магнитным полем, оказывается параллельным магнитному полю, причем для модели Бианки–I это выделенное направление может быть выбрано вдоль любой из трех координатных осей. Возможны ли подобные решения для моделей Бианки-V и Бианки–VI? Это один из вопросов, обсуждаемых в работе. Вто-

---

[*] AmFShakirzyanov@stud.kpfu.ru
[†] Alexander.Balakin@kpfu.ru

рой вопрос связан с проблемой взаимодействия аксионной темной материи с динамическим эфиром [11, 12] и его цветным обобщением [4, 13]. Модель Бианки–I допускает самосогласованную модель формирования векторных и калибровочных полей; существуют ли подобные полевые конфигурации в моделях Бианки–V и Бианки–VI? Мы намерены ответить на первый вопрос в данной заметке, а второй вопрос составит предмет отдельного сообщения.

1. НЕЛИНЕЙНАЯ АКСИОННАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

1.1. Математический формализм

Для построения нелинейной аксионной электродинамики мы используем ту же схему, что и в работах [9, 10]. Функционал действия выбираем в виде

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{R+2\Lambda}{2\kappa}+\frac{1}{2}\Psi_0^2\left[V(\phi)-\nabla_k\phi\nabla^k\phi\right]+\mathcal{L}(\mathcal{I})\right\}. \tag{2}$$

Как обычно, R — это скаляр Риччи, Λ — космологическая постоянная, $\kappa=8\pi G$ — постоянная Эйнштейна (мы полагаем, что $c=1$). Символ ϕ используется для обозначения псевдоскалярного (аксионного) поля; $V(\phi)$ — это потенциал аксионного поля, ∇_k — ковариантная производная, а константа Ψ_0 есть величина, обратная константе аксион-фотонного взаимодействия $g_{A\gamma\gamma}$, то есть, $g_{A\gamma\gamma}=\frac{1}{\Psi_0}$. Слагаемое $\mathcal{L}(\mathcal{I})$ описывает Лагранжиан электромагнитного поля, взаимодействующего с аксионным; это есть нелинейная функция аргумента $\mathcal{I}$, заданного соотношением

$$\mathcal{I}=\frac{1}{4}\left(\cos\phi\ F_{mn}F^{mn}+\sin\phi\ F^*_{mn}F^{mn}\right). \tag{3}$$

Эта унифицированная конструкция включает первый инвариант электромагнитного поля $\frac{1}{4}F_{mn}F^{mn}$ и псевдоинвариант $\frac{1}{4}F^*_{mn}F^{mn}$, построенные с помощью тензора Максвелла F_{mn} и дуального ему тензора F^*_{mn}. Коэффициентами при указанных инварианте и псевдоинварианте служат тригонометрические функции, зависящие от безразмерного аксионного поля. Выбор такой конструкции унифицированного инварианта обоснован в работах [9, 10]; этот унифицированный инвариант наследует симметрии трех типов. Во-перых, синус — функция нечетная, а потому произведение нечетной функции от псевдоскаляра на псевдотензор $\sin\phi\ F^*_{mn}$ есть истинный тензор. Во-вторых, он поддерживает дискретную симметрию преобразования аксионного поля $\tilde{\phi}=\phi+2\pi m$ (m — целое число), введенную Печчеи и Квинн в своей классической работе [14]. В-третьих, этот унифицированный инвариант отражает факт наличия Джексоновской SO(2) симметрии электродинамики, в которой позволено совершать преобразования $\mathbf{E}_*\to\mathbf{E}\cos\alpha+\mathbf{B}\sin\alpha$, $\mathbf{B}_*\to\mathbf{B}\cos\alpha-\mathbf{E}\sin\alpha$, то есть повороты в фиктивной плоскости, заданной векторами электрического и магнитного полей. По правилу соответствия нелинейная функция $\mathcal{L}(\mathcal{I})$ должна обращаться в $\mathcal{I}$, если $\mathcal{I}\to 0$. Наконец, если $\phi\to 0$, унифицированный инвариант выдает нам классическое слагаемое

$$\mathcal{I}\to\frac{1}{4}\left(F_{mn}F^{mn}+\phi F^*_{mn}F^{mn}\right), \tag{4}$$

на котором построена линейная аксионная электродинамика [15–17].

1.2. Уравнения электромагнитного поля

Вариация функционала (2) по потенциалу электромагнитного поля A_i дает нелинейное эволюционное уравнение

$$\nabla_k\left\{\mathcal{L}'(\mathcal{I})\left[\cos\phi\ F^{ik}+\sin\phi\ F^{*ik}\right]\right\}=0, \tag{5}$$

где штрих означает производную по аргументу $\mathcal{I}$ Лагранжевой функции. Вторая подсистема уравнений электромагнетизма имеет стандартный линейный вид

$$\nabla_k F^{*ik}=0, \tag{6}$$

как следствие определения тензора Максвелла $F_{mn}=\nabla_m A_n-\nabla_n A_m$.

1.3. Точное решение уравнений электромагнетизма для модели с магнитным полем, направленным вдоль выделенной оси

Для начала поиска точных решений уравнений нелинейной электродинамики в модели Бианки с метрикой (1) мы используем анзац о том, что магнитное поле направлено вдоль выделенной оси $0z$, то есть, имеет компоненту F_{xy}, а соответствующее аксионно индуцированное электрическое поле F^{z0} параллельно ему. Учитывая симметрию задачи, можно предположить, что ϕ, F_{xy} и F^{z0} есть функции от времени и координаты z. Тогда из (6) немедленно следует, что

$$\partial_0 F_{xy}=0=\partial_z F_{xy}\ \to F_{xy}=\mathrm{const}\equiv B_0\,. \tag{7}$$

Система уравнений (5) превращается при этом в пару условий

$$\partial_0\left\{\mathcal{L}'(\mathcal{I})\left[\sqrt{-g}\cos\phi F^{z0}-B_0\sin\phi\right]\right\}=0, \tag{8}$$

$$\partial_z\left\{\mathcal{L}'(\mathcal{I})\left[\sqrt{-g}\cos\phi F^{z0}-B_0\sin\phi\right]\right\}=0. \tag{9}$$

Очевидно, что решением этой системы является функция

$$F^{z0}=\frac{e^{(m-n)z}}{abc}\left[B_0\tan\phi+\frac{\mathrm{const}}{\cos\phi\ \mathcal{L}'(\mathcal{I})}\right]. \tag{10}$$

Для простоты предположим, что в некий момент t_0 электрическое поле отсутствовало, а аксионное поле принимало одно из значений $\phi(t_0) = \pi k$ $(k = 0, 1, ...)$. Тогда константа интегрирования равна нулю, и аксионно индуцированное электрическое поле принимает вид

$$E(t,z) \equiv c(t)F^{z0} = \frac{e^{(m-n)z}}{a(t)b(t)}\, B_0 \tan\phi\,. \qquad (11)$$

На решениях такого вида легко подсчитать инварианты электродинамической системы

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}F^{*}_{pq}F^{pq} &= \frac{B_0^2}{a^2b^2}e^{2(m-n)z}\tan\phi, \\ \frac{1}{4}F_{pq}F^{pq} &= \frac{B_0^2}{2a^2b^2}\left[1-\tan^2\phi\right]e^{2(m-n)z}\,. \end{aligned} \qquad (12)$$

Унифицированный инвариант $\mathcal{I}$ оказывается равным следующей функции:

$$\mathcal{I} = \frac{B_0^2}{2a^2b^2\cos\phi}e^{2(m-n)z}\,. \qquad (13)$$

Эффективный тензор энергии–импульса данной электродинамической системы

$$T_{ik}^{(\mathrm{EMA})} = \mathcal{L}'(\mathcal{I})\cos\phi\left[\frac{1}{4}g_{ik}F_{mn}F^{mn} - F_{im}F_k{}^{m}\right] + \\ + g_{ik}\left[\mathcal{L}(\mathcal{I}) - \mathcal{I}\cdot\mathcal{L}'(\mathcal{I})\right] \qquad (14)$$

в общем случае наследует зависимость от координаты z. Однако, если $m = n \neq 0$ или $m = n = 0$, зависимость от z становится скрытой, ибо все иварианты теряют множитель $e^{2(m-n)z}$. Когда же речь идет о структуре аксионного поля, мы вынуждены потребовать, чтобы псевдоскалярное поле было функцией только от времени $\phi(t)$; в противном случае однородность нелинейной модели будет автоматически потеряна. На вопрос как этого добиться, мы найдем ответ в следующем разделе. Иными словами, только модели Бианки–I и Бианки VI_0 допускают ситуацию, когда полная система уравнений гравитации и электромагнетизма оказывается самосогласованной.

1.4. О точных решениях уравнений электромагнетизма для модели с магнитным полем, перпендикулярным выделенной оси

В данном разделе мы предположим, что магнитное поле направлено перпендикулярно выделенной оси $0z$, например, вдоль оси $0y$ и имеет, соответственно, ненулевую компоненту F_{xz}. Параллельное ему аксионно индуцированное электрическое поле задается теперь компонентой F^{y0}. Полагая, что ϕ, F_{xz} и F^{y0} по-прежнему есть функции от времени и координаты z, получаем из (6) два непреложных требования:

$$\partial_0 F_{xz} = 0\,, \quad \partial_z F_{0y} = 0\,. \qquad (15)$$

Первое из этих требований согласуется с правилом $F_{xz} = const \equiv -B_0$. Однако, второе требование означает, что для компоненты электрического поля предписана структура $F^{y0} = F(t)e^{-2nz}$. Как и в предыдущем случае, система уравнений (5) допускает точное решение

$$F^{y0} = \frac{e^{(m-n)z}}{abc}B_0\tan\phi\,, \qquad (16)$$

однако, требование $F^{y0} = F(t)e^{-2nz}$ может быть выполнено только при условии $m = -n$, то есть, если мы имеем дело с моделью Бианки-V. Расчет инвариантов электромагнитного поля дает в этом случае следующие результаты:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}F^{*}_{pq}F^{pq} &= \frac{B_0^2}{a^2c^2}e^{2mz}\tan\phi, \\ \frac{1}{4}F_{pq}F^{pq} &= \frac{B_0^2}{2a^2c^2}\left[1-\tan^2\phi\right]e^{2mz}\,, \end{aligned} \qquad (17)$$

$$\mathcal{I} = \frac{B_0^2}{2a^2c^2\cos\phi}e^{2mz}\,. \qquad (18)$$

Соблюдение симметрии модели возможно исключительно в том случае, если $m = 0$, то есть, если модель Бианки-V вырождается в модель Бианки–I.

1.5. Уравнения аксионного поля

Вариация функционала (2) по ϕ для периодического потенциала

$$V(\phi) = 2m_A^2\left(1-\cos\phi\right) \qquad (19)$$

приводит к уравнению эволюции аксионного поля

$$\nabla^k\nabla_k\phi = -m_A^2\sin\phi + \frac{1}{4\Psi_0^2}\mathcal{L}'(\mathcal{I})\times \\ \times\left[\sin\phi F_{ik}F^{ik} - \cos\phi F_{ik}F^{*ik}\right]\,. \qquad (20)$$

Как мы выяснили выше, для моделей Бианки с $m = n$ нелинейный электромагнитный источник аксионного поля в правой части этого уравнения также не зависит от пространственной координаты z. Это означает, что для однородных начальных условий $\phi(t_0, z) = \phi_0 = \mathrm{const}$, $\dot\phi(t_0, z) = \dot\phi_0 = \mathrm{const}$ это уравнение описывает аксионное поле, зависящее только от космологического времени. Редуцированное уравнение для аксионного поля приобретает вид

$$\ddot\phi + \frac{(abc)^{\cdot}}{abc}\dot\phi + m_A^2\sin\phi = -\frac{B_0^2\mathcal{L}'(\mathcal{I})\sin\phi}{2\Psi_0^2a^2b^2\cos^2\phi}\,, \qquad (21)$$

в котором точка означает производную по времени. Если использовать результат расчета унифицированного инварианта (13) и переписать уравнение (21) в виде

$$\ddot\phi + \frac{(abc)^{\cdot}}{abc}\dot\phi = -\sin\phi\left[m_A^2 + \frac{\mathcal{I}\mathcal{L}'(\mathcal{I})}{\Psi_0^2\cos\phi}\right]\,, \qquad (22)$$

то становится очевидным, что оно допускает бесконечную серию точных решений $\phi = \pi k$ (k — целое число) при произвольном выборе нелинейной функции $\mathcal{L}(\mathcal{I})$. При четном k все эти решения устойчивы, ибо доставляют минимумы потенциалу аксионного поля (19).

1.6. Об уравнениях гравитационного поля в модели Бианки–VI_0

Вариация функционала (2) по метрике дает уравнения гравитационного поля в стандартном виде

$$R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik} = \Lambda g_{ik} + \kappa T^{(\mathrm{EMA})}_{ik} + \kappa T^{(\mathrm{A})}_{ik} \,. \tag{23}$$

Здесь выписан тензор энергии–импульса аксионного поля

$$T^{(\mathrm{A})}_{ik} = \Psi^2_0 \left[\nabla_i \phi \nabla_k \phi + \frac{1}{2} g_{ik} \left(V - \nabla_p \phi \nabla^p \phi\right)\right] \tag{24}$$

и тензор энергии–импульса электромагнитного поля, нелинейно взаимодействующего с аксионной темной материей

$$T^{(\mathrm{EMA})}_{ik} = \mathcal{L}'(\mathcal{I}) \cos\phi \left[\frac{1}{4} g_{ik} F_{mn} F^{mn} - F_{im} F_k{}^m\right] + \\ + g_{ik} \left[\mathcal{L}(\mathcal{I}) - \mathcal{I} \cdot \mathcal{L}'(\mathcal{I})\right] . \tag{25}$$

Редукция этих уравнений для модели Бианки–VI_0 позволяет записать пять нетривиальных уравнений

$$\left[\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{c}}{c} + \frac{\dot{b}}{b}\frac{\dot{c}}{c}\right] - \frac{m^2}{c^2} = \Lambda + \frac{1}{2}\kappa\Psi^2_0\left(V + \dot{\phi}^2\right) + \kappa\mathcal{L}(\mathcal{I}) \,, \tag{26}$$

$$\left[\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{b}}{b}\frac{\dot{c}}{c}\right] - \frac{m^2}{c^2} = \Lambda + \frac{1}{2}\kappa\Psi^2_0\left(V - \dot{\phi}^2\right) + \\ + \kappa\left[\mathcal{L}(\mathcal{I}) - 2\mathcal{I}\mathcal{L}'(\mathcal{I})\right] \,, \tag{27}$$

$$\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{c}}{c}\right] - \frac{m^2}{c^2} = \Lambda + \frac{1}{2}\kappa\Psi^2_0\left(V - \dot{\phi}^2\right) + \\ + \kappa\left[\mathcal{L}(\mathcal{I}) - 2\mathcal{I}\mathcal{L}'(\mathcal{I})\right] \,, \tag{28}$$

$$\left[\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b}\frac{\dot{a}}{a}\right] + \frac{m^2}{c^2} = \Lambda + \frac{1}{2}\kappa\Psi^2_0\left(V - \dot{\phi}^2\right) + \kappa\mathcal{L}(\mathcal{I}) \,, \tag{29}$$

$$m\left(\frac{\dot{b}}{b} - \frac{\dot{a}}{a}\right) = 0 \,. \tag{30}$$

При $m \neq 0$ из последнего уравнения следует, что $\frac{a(t)}{b(t)} = \mathrm{const}$, факторы $a(t)$ и $b(t)$ пропорциональны (в частности, могут быть выбраны равными).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. При исследовании моделей формирования космического электрического поля, генерированного в ранней Вселенной за счет нелинейного взаимодействия аксионной темной материи с магнитным полем, показано, что эволюционные уравнения для гравитационного, аксионного и электромагнитного полей образуют непротиворечивую самосогласованную систему в моделях Бианки–I и Бианки–VI_0; в моделях Бианки–V и Бианки–VI общего вида симметрия магнито–электрической полевой конфигурации не согласуется с пространственной симметрией.
2. Для самосогласованной модели Бианки–VI_0 найдено точное решение для аксионно-индуцированного электрического поля (11), построены инварианты электромагнитного поля (12), (13). Получено уравнение для аксионного поля (22) и найдены особые решения этого уравнения. Записаны ключевые уравнения для масштабных факторов (26)–(30). Построенная полная система уравнений готова к качественному и численному анализу.
3. Как и при исследовании модели Бианки–I [9, 10] удалось установить, что космологическая модель Бианки–VI_0 также допускает аномальный (тангенциальный) рост аксионно-индуцированного электрического поля $E(t) = \frac{B_0}{a(t)b(t)} \tan\phi(t)$ при $\phi \to \frac{\pi}{2}$.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 20-02-00280, 20-52-05009).

---

[1] *Ellis G.F.R., Maartens R., MacCallum M.A.H.* // Relativistic Cosmology. Cambridge University Press. Cambridge, 2012.
[2] *Yadav A.K.* // Anisotropic Models of Accelerating Universe: Cosmology of Anisotropic Universe. LAP LAMBERT Academic Publishing. Chisinau, 2011.
[3] *Jacobson T., Mattingly D.* // Phys. Rev. D. 2001. **64**. 024028.
[4] *Balakin A.B., Kiselev G.B.* // Universe. 2020. **6**. 95.
[5] *Saha B.,Boyadjiev T.* // Phys. Rev. D. 2004. **69**. 124010.

[6] *Balakin A.B.* // Class. Quantum Grav. 2007. **24**. P. 5221.
[7] *Mak M.K., Harko T.* // Int. J. Mod. Phys. D. 2002. **11**. P. 447.
[8] *Saha B.* // Eur. Phys. J. Plus. 2016. **131**. 170.
[9] *Balakin A.B., Galimova A.A.* // Phys. Rev. D. 2021. **104**. 044059.
[10] *Balakin A.B., Bochkarev V.V., Nizamieva A.F.* // Symmetry. 2021. **13**. 2038.
[11] *Balakin A.B., Shakirzyanov A.F.* // Phys. Dark Univ. 2019. **24**. 100283.
[12] *Balakin A.B., Shakirzyanov A.F.* // Universe. 2020. **6**. 192.
[13] *Balakin A.B., Andreyanov A.V.* // Space, Time and Fund. Interact. 2017. No.4. P. 36.
[14] *Peccei R.D., Quinn H.R.* // Phys. Rev. Lett. 1977. **38**. P. 1440.
[15] *Ni Wei-Tou* // Phys. Rev. Lett. 1977. **38**. P. 301.
[16] *Sikivie P.* // Phys. Rev. Lett. 1983. **51**. P. 1415.
[17] *Wilczek F.* // Phys. Rev. Lett. 1987. **58**. P. 1799.

Interaction of axionic dark matter with electromagnetic field in the anisotropic homogeneous Universe of the Bianchi types V and VI

A. F. Shakirzyanov^{a}, **A. B. Balakin**^{b}

Department of General Relativity and Gravitation, Institute of Physics, Kazan Federal University
Kazan 420008, Russia.
E-mail: ^{a}*AmFShakirzyanov@stud.kpfu.ru,* ^{b}*Alexander.Balakin@kpfu.ru*

For the classes V and VI of the Bianchi models, which describe the evolution of an anisotropic spatially homogeneous early Universe with a global magnetic field, the problem of the formation of an electric field induced by the interaction of photons with axionic dark matter is studied. The problem is investigated within the framework of the author's version of nonlinear axion electrodynamics. It is shown that only for a particular Bianchi–VI_0 model the symmetry of the magnetoelectric field configuration is consistent with the spatial symmetry of the model. For the model of this type, the exact solutions of the electrodynamic equations are found, and it is established that the evolution of the axionically induced electric field can be accompanied by its anomalous growth.

PACS: 95.36.+x; 95.35.+d;98.80.-k.
Keywords: dark energy, dark matter.
Received 18 May 2022.

Сведения об авторах

1. Шакирзянов Амир Фаридович — аспирант; e-mail: AmFShakirzyanov@stud.kpfu.ru.
2. Балакин Александр Борисович — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: Alexander.Balakin@kpfu.ru.