Обобщенная супергравитация из поливекторных деформаций

К. А. Губарев*
Московский физико–технический институт
Россия, 141701, Московская область,
г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
(Поступила в редакцию 19.05.2022; подписана в печать 30.05.2022)

Предложен метод построения уравнений 10D супергравитации при помощи неунимодулярных би–Киллинговых деформаций Янга–Бакстера. Представленный подход обобщен на 11D случай. При помощи неунимодулярных три–Киллинговых обобщенных деформаций Янга–Бакстера получено обобщение уравнений 11D супергравитации.

PACS: 11.25.$-w$, 04.65.$+e$ УДК: 53.01.
Ключевые слова: супергравитация, каппа–симметрия, теория струн, M–теория, исключительная теория поля, двойная теория поля.

ВВЕДЕНИЕ

M–теория является перспективным кандидатом на роль теории великого объединения, который позволит единым образом описать четыре известных фундаментальных взаимодействия на квантовом уровне [1, 2]. Ее фудаментальными объектами являются M2 и M5 браны, распространяющиеся в 11–мерном пространстве с метрикой и 3–формой в качестве фоновых полей. Более того, она естественным образом обобщает и объединяет пять непротиворечивых теорий суперструн (I, IIA/IIB, гетеротическая $E_8 \times E_8$, гетеротическая $SO(32)$), которые, как известно, связаны непертурбативными T– и S–дуальностями. С точки зрения M–теории эти дуальности объединяются в U–дуальность.

Для супермембран в M–теории, также как и для суперструн в теории струн, возможны различные способы записи действия [3]:

1. вращающаяся мембрана/вращающаяся струна — описание с явной суперсимметрией на мировом объеме мембраны/струны [4],

2. супермембрана/суперструна — описание с явной суперсимметрией в объемлющем пространстве [5, 6],

3. дважды суперсимметричная мембрана/дважды суперсимметричная струна — описание с явной суперсимметрией на мировом объеме мембраны/струны и в объемлющем пространстве [7, 8],

которые друг другу классически эквивалентны.

В теории струн наиболее удобными и широко распространенными являются первые два подхода.

Вращающаяся суперструна — формализм известный как действие Рамона–Навье–Шварца (RNS) [9, 10]. В таком подходе действие для струны записывается с помощью двумерной метрики на мировом листе струны, несущей три дополнительных степени свободы. Однако эти степени свободы являются нефизическими и должны компенсироваться симметриями действия, а именно двумя диффеоморфизмами и одним Вейлевским преобразованием, которые должны сохраняться на квантовом уровне. Это означает, что для согласованности теории необходимо обнуление Вейлевской аномалии для струны, что накладывает два условия. Первое условие на размерность пространства в котором формулируется теория, а именно что пространство 10-мерное. Второе — это требование обнуления бета–функций для фоновых полей на фоне которых распространяется струна. В однопетлевом приближении, лидирующем в пределе сильного натяжения струн, эти условия эквивалентны уравнениям 10D супергравитации [11–13].

Альтернативный подход к описанию суперструн — действие Грина–Шварца (GS), в котором струна распространяется в суперсимметричном объемлющем пространстве с 10-ю бозонными и 32-мя антикомутирующими спинорными координатами на фоне суперрепера, суперкручения и суперполя Кальба–Рамонда [14, 15]. Размерность пространства вновь ограничивается из требования отсутствия Вейлевской аномалии в квантовой теории. На уравнениях движения такая струна имеет 8 бозонных и 16 фермионных степеней свободы. Восемь лишних нефизических фермионных степеней свободы для согласованности теории должны быть скомпенсированы локальной фермионной симметрией действия, называемой каппа–симметрией. Требование каппа–инвариантности действия накладывает условия на суперкручение и супернапряженность для суперполя Кальба–Рамонда, которые помимо этого также должны удовлетворять тождествам Бьянки. Совместное решение этих условий является набором уравнений на фоновые поля теории. В [16–18] было показано, что эти уравнения являются обобщением обычной 10D супергравитации и были названы уравнениями обобщенной 10D супергравитации. Их отличие заключается в явной зависимости уравнений на фоновые поля от дополнительного вектора I^m, являющегося вектором Киллинга для метрики и поля Кальба–Рамонда.

* kirill.gubarev@phystech.edu

В случае $I^m = 0$ уравнения обобщенной супергравитации совпадают с уравнениями обычной супергравитации.

С точки зрения струны RNS выполнение уравнений обобщенной супергравитации для фоновых полей нарушает Вейлевскую симметрию струны до масштабной [17]. Вейлевская симметрия может быть восстановлена введением нелокального контрчлена в действие [19].

Для вращающихся мембран, в отличие от вращающихся струн, нефизические степени свободы, связанные с метрикой на мировом объеме, не могут быть компенсированы симметриями теории, так как их недостаточно. Поэтому такой подход к описанию мембран с точки зрения квантовой теории является несогласованным.

Согласованным же подходом для описания супермембран является подход Грина–Шварца (GS) [5, 6]. Такая мембрана распространяется в суперсимметричном объемлющем пространстве с 11-тью бозонными и 32-мя антикоммутирующими спинорными координатами на фоне суперрепера, суперкручения и супер–три–формы. Для согласованности действия (равенства количества бозонных и фермионных степеней свободы) нужно потребовать его каппа–инвариантности [20]. Это требование накладывает условия на суперкручение и супернапряженность для супер–три–формы, которые помимо этого также должны удовлетворять тождествам Бьянки. Совместное решение этих условий является набором уравнений на фоновые поля теории. В [5, 6] было показано, что для выполнения каппа–инвариантности достаточно уравнений 11D супергравитации на фоновые поля. Более того, из-за отсутствия Вейлевской симметрии для мембран и соответственно возможности ее нарушения до масштабной симметрии, предполагается, что в 11-ти измерениях обобщеной супергравитации быть не должно.

Мы предлагаем альтернативный способ построения уравнений 10D обобщенной супергравитации при помощи деформаций (вместо решения условий следующих из каппа–симметрии), который обобщаем на 11-мерный случай.

Идея метода проистекает из того, как изначально были обнаружены уравнения обобщенной 10D супергравитации. А именно, при исследовании деформаций сигма моделей, сохраняющих интегрируемость. Одним из исследуемых примеров была интегрируемая суперструна на фоне $\mathrm{AdS}_5 \times \mathbb{S}^5$ [21], для которой была предъявлена η–деформация, сохраняющая интегрируемость и каппа–инвариантность [22]. Однако сами поля η–деформированного фона $\mathrm{AdS}_5 \times \mathbb{S}^5$ не являются решением обычной 10D супергравитации, но решают обобщенную [16, 17].

Деформации такого вида могут быть сформулированы при помощи вложения супергравитации в двойную теорию поля (DFT), которая явно ковариантна относительно симметрии 10D супергравитации — T–дуальности [23–26]. В терминах такой теории деформации — это локальные $O(1,9;1,9)$ вращения с би–Киллинговым параметром деформации. Такие деформации генерируют решения обобщенной супергравитации из решений обычной, если бивектор в би–Киллинговой деформации удовлетворяет классическому уравнению Янга–Бакстера [24, 26]. При этом вектор Киллнга I^m пропорционален условию унимодулярности для деформации, что означает что если деформация унимодулярная, то она генерирует решения обычной супергравитации, а если неунимодулярная, то обобщенной.

В настоящей работе при помощи потоковой формулировки DFT и неунимодулярных би–Киллинговых деформаций Янга–Бакстера мы построим уравнения 10D обобщенной супергравитации. Затем мы обобщим развитый подход на 11-мерный случай. Для этого мы используем исключительную теорию поля (ExFT), которая явно ковариантна относительно симметрии 11D супергравитации — U–дуальности. В потоковой формулировке ExFT при помощи неунимодулярных три–Киллинговых обобщенных деформаций Янга–Бакстера мы построим обобщенные уравнения 11D супергравитации. Каппа-инвариантность мембраны на фоне, решающем полученные уравнения, остается открытым вопросом для дальнейшего исследования.

1. ОБОБЩЕННАЯ 10D СУПЕРГРАВИТАЦИЯ ИЗ ДЕФОРМАЦИЙ

1.1. Вложение 10D супергравитации в двойную теорию поля

10D теория суперструн на фоне $\mathbb{T}^d \times \mathcal{M}_{10-d}$ обладает симметрией $O(d,d|\mathbb{Z})$ называемой T–дуальностью. Эта симметрия опускается на уровень супергравитации в виде $O(d,d|\mathbb{R})$, что означает, что супергравитация может быть сформулирована явно ковариантно относительно T–дуальности, а ее решения вида $\mathbb{T}^d \times \mathcal{M}_{10-d}$ полностью сохраняют эту симметрию.

Везде далее мы будем работать с безмассовым NS–NS спектром замкнутой струны (g_{mn}, b_{mn}, ϕ) и уравнениями для него. Подход, позволяющий сформулировать супергравитацию в $O(d,d|\mathbb{R})$ ковариантном виде называется двойной теорией поля (DFT) [23], далее мы обсуждаем случай $O(1,9;1,9|\mathbb{R})$. Бозонный спектр DFT: обобщенная метрика $\mathcal{H}_{MN} \in O(1,9;1,9)/(O(1,9)\times O(1,9))$ и инвариантный дилатон d, определенные в двойном пространстве $\mathbb{X}^M = (x^m, \tilde{x}_m)$ с обобщенными производными Ли [23]

$$
\begin{gathered}
\mathcal{L}_\Lambda V^M = \Lambda^N \partial_N V^M - V^N \partial_N \Lambda^M + \eta^{MN}\eta_{KL}\partial_N \Lambda^K V^L, \\
\mathcal{L}_\Lambda d = \Lambda^M \partial_M d - \frac{1}{2}\partial_M \Lambda^M .
\end{gathered} \tag{1}
$$

Для замкнутости алгебры обобщенных диффеоморфизмов произвольные поля теории f и g должны удовлетворять условию проекции

$$\eta^{MN}\,\partial_M\, f\,\partial_N\, g = 0, \quad \eta^{MN}\,\partial_M\,\partial_N\, f = 0, \tag{2}$$

после решения которого поля теории зависят только от 10-ти из 20-ти $\mathbb{X}^M$ координат. η^{MN} — $O(1,9;1,9)$ инвариантная метрика, при помощи которой поднимаются индексы (опускаются обратной)

$$\eta^{MN} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^m{}_n \\ \delta_m{}^n & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Действие DFT имеет вид

$$S_{DFT} = \int d^{10}\mathbb{X}\, e^{-2d}\,\mathbb{Q}, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} = {} & \mathcal{H}^{AB}\mathcal{F}_A\mathcal{F}_B + \\ & + \mathcal{F}_{ABC}\mathcal{F}_{DEF}\left(\frac{1}{4}\mathcal{H}^{AD}\eta^{BE}\eta^{CF} - \frac{1}{12}\mathcal{H}^{AD}\mathcal{H}^{BE}\mathcal{H}^{CF}\right) - \\ & - \mathcal{F}_A\mathcal{F}^A - \frac{1}{6}\mathcal{F}_{ABC}\mathcal{F}^{ABC}. \end{aligned} \tag{5}$$

где потоки теории ($\partial_A = E^M{}_A\partial_M$)

$$\mathcal{L}_{E_A}E^M{}_B = \mathcal{F}_{AB}{}^C E^M{}_C, \quad \mathcal{L}_{E_A}d = \frac{1}{2}\mathcal{F}_A, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{ABC} &= 3E_{N[C}\partial_A E^N{}_{B]}, \\ \mathcal{F}_A &= E_{NA}\partial^B E^N{}_B + 2\partial_A d = 2\partial_A d - \partial_M E^M{}_A, \end{aligned} \tag{7}$$

$E^N{}_A$ — обобщенные реперы, d — $O(1,9;1,9)$ инвариантный дилатон, $\eta^{MN} = E^M{}_A E^N{}_B\eta^{AB}$ и $\mathcal{H}^{MN} = E^M{}_A E^N{}_B\mathcal{H}^{AB}$ — обобщенная метрика

$$\eta^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^a{}_b \\ \delta_a{}^b & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}^{AB} = \begin{pmatrix} h^{ab} & 0 \\ 0 & h_{ab} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Действие NS–NS сектора 10D супергравитации для полей $e_m{}^a$, b_{mn} и ϕ воспроизводится из действия DFT в b-фрейм параметризации

$$\begin{gathered} d = \phi - \frac{1}{2}\ln e, \quad e = \det e_k{}^a, \\ E_M{}^A = \begin{bmatrix} e_m{}^a & 0 \\ -e^k{}_a b_{km} & e^m{}_a \end{bmatrix}, \; E^M{}_A = \begin{bmatrix} e^m{}_a & -e^k{}_a b_{km} \\ 0 & e_m{}^a \end{bmatrix}, \end{gathered} \tag{9}$$

со следующим решением уравнения проекции (2)

$$\partial_M = (\partial_m, \partial^m), \quad \partial^m f \equiv 0. \tag{10}$$

Из вариации действия (4) в потоковой формулировке могут быть найдены уравнения движения DFT в терминах потоков, в b-фрейм параметризации, для которой

$$\begin{gathered} \mathcal{F}_{abc} = -H_{abc}, \quad \mathcal{F}_{ab}{}^c = f_{ab}{}^c, \\ \mathcal{F}_a = 2e_a{}^m\nabla_m\phi + f_a, \end{gathered} \tag{11}$$

$$f_{ab}{}^c = -2e^m{}_a e^n{}_b\partial_{[m}e_{n]}{}^c, \qquad f_a = f_{ab}{}^b, \tag{12}$$

уравнения движения DFT воспроизводят уравнения 10D супергравитации

$$\delta d: R - \frac{1}{12}H^2 + 4\,\nabla^m\nabla_m\phi - 4\,(\nabla\phi)^2 = 0\,, \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \delta e^m{}_a: R_{mn} - \frac{1}{4}H_{mkl}H_n{}^{kl} + \nabla_m\nabla_n\phi + \\ + \nabla_n\nabla_m\phi = 0\,, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\delta b_{mn}: \frac{1}{2}\,\nabla_k H^{kmn} - H^{kmn}\nabla_k\phi = 0\,, \tag{15}$$

где $H_{mnk} = 3\nabla_{[m}b_{nk]}$ и ∇_m ковариантная производная по отношению к $g_{mn} = e_m{}^a e_n{}^b g_{ab}$.

1.2. Неунимодулярные деформации Янга–Бакстера

В [24, 25] был предложен способ генерация новых решений супергравитации из решений имеющих по крайней мере два вектора Киллинга. В терминах DFT это $O(1,9;1,9|\mathbb{R})$ вращение

$$\begin{aligned} \bar{E}_M{}^A &= O_M{}^N E_N{}^A = (\delta_M{}^N + \Omega_M{}^N)E_N{}^A, \\ \bar{E}^M{}_A &= \tilde{O}^M{}_N E^N{}_A = (\delta^M{}_N + \tilde{\Omega}^M{}_N)E^N{}_A, \end{aligned} \tag{16}$$

$$d' = \phi' - \frac{1}{2}ln\, e' = d, \tag{17}$$

с последующей репараметризацией

$$\begin{gathered} E'_M{}^A E'_N{}^B\mathcal{H}_{AB} = \bar{E}_M{}^A\bar{E}_N{}^B\mathcal{H}_{AB}, \\ E'_M{}^A = \begin{bmatrix} e'_m{}^a & 0 \\ -e'^k{}_a b'_{km} & e'^m{}_a \end{bmatrix}, \; E'^M{}_A = \begin{bmatrix} e'^m{}_a & -e'^k{}_a b'_{km} \\ 0 & e'_m{}^a \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{18}$$

Матрица поворота

$$\begin{gathered} O_K{}^M = \begin{bmatrix} \delta^m{}_k & 0 \\ \beta^{mk} & \delta_m{}^k \end{bmatrix}, \quad \tilde{O}^N{}_M = \begin{bmatrix} \delta^n{}_m & -\beta^{nm} \\ 0 & \delta_n{}^m \end{bmatrix}, \\ O_K{}^M\tilde{O}^N{}_M = \delta_K{}^N, \end{gathered} \tag{19}$$

где для бивектора предполагается би–Киллинговый анзац $\beta^{mn} = r^{ij}k_i{}^m k_j{}^n$, r^{ij} — постоянная антисимметричная матрица.

Для того чтобы после такого поворота $e'_m{}^a$, b'_{km}, ϕ' было решением супергравитации должны выполняться классическое уравнение Янга–Бакстера (CYBE) и условие унимодулярности [26]

$$\begin{cases} f_{j_1 j_2}{}^{[i_1}r^{i_2|j_1|}r^{i_3]j_2} = 0, & \text{(CYBE)}, \\ f_{i_1 i_2}{}^{j}r^{i_1 i_2} = 0, & \text{(унимодулярность)}, \end{cases} \tag{20}$$

$$
\begin{tikzcd}
E_M{}^A \arrow[r] \arrow[d, dashed, leftrightarrow] & E'_M{}^A = (O_M{}^N E_N{}^A)|_{b-\text{фрейм}} \arrow[d, dashed, leftrightarrow] \\
\mathcal{F}_{ABC},\, \mathcal{F}_A \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}'_{ABC} = \mathcal{F}_{ABC},\, \mathcal{F}'_A = \mathcal{F}_A + \delta_I \mathcal{F}_A \arrow[d] \\
\text{EoMs}(\mathcal{F}_{ABC},\, \mathcal{F}_A){=}0 \arrow[d, dash] & \text{EoMs}(\mathcal{F}'_{ABC},\, \mathcal{F}'_A - \delta_I \mathcal{F}_A){=}0 \arrow[d, dash] \\
\text{EoMs}_{SUGRA}(g, b, \phi) = 0 & \text{EoMs}_I(g', b', \phi') = 0
\end{tikzcd}
$$

Рис. 1. Обобщенная 10d супергравитация из потоковых сдвигов

где $k_{i_1}{}^m \partial_m k_{i_2}{}^n - k_{i_2}{}^m \partial_m k_{i_1}{}^n = f_{i_1 i_2}{}^{i_3} k_{i_3}{}^n$. Такое вращение называется унимодулярной деформацией Янга–Бакстера. Однако имеют смысл и неунимодулярные деформации Янга–Бакстера. Они порождают решения обобщенной супергравитации с соответствующим вектором Киллинга $I^m = \nabla_k \beta^{km} = f_{i_1 i_2}{}^j r^{i_1 i_2} k_j{}^m \neq 0$ [26]. С точки зрения развитого выше потокового подхода DFT это подтверждается тем, что при такой деформации потоки преобразуются как

$$\delta_I \mathcal{F}_{ABC} = 0, \quad \delta_I \mathcal{F}_a = 2 I^m b_{mn} e^n{}_a, \quad \delta_I \mathcal{F}^a = 2 I^a. \tag{21}$$

Таким образом уравнения супергравитации будут попрежнему удовлетворяться для унимодулярного деформированного решения Янга–Бакстера, поскольку потоки DFT не изменяются. Но для неунимодулярных деформированных решений Янга–Бакстера выполняющиеся уравнения должны быть модифицированы и отличаются от супергравитационных.

1.3. Условия на I^m из тождеств Бьянки

Потоки DFT (7) должны удовлетворять тождествам Бьянки [23]:

$$
\begin{aligned}
0 &= \partial_{[A} \mathcal{F}_{BCD]} - \frac{3}{4} \mathcal{F}_{[AB}{}^E \mathcal{F}_{CD]E}, \\
0 &= 2 \partial_{[A} \mathcal{F}_{B]} + \partial^C \mathcal{F}_{CAB} - \mathcal{F}^C \mathcal{F}_{CAB}, \\
0 &= \partial^A \mathcal{F}_A - \frac{1}{2} \mathcal{F}^A \mathcal{F}_A + \frac{1}{12} \mathcal{F}^{ABC} \mathcal{F}_{ABC},
\end{aligned} \tag{22}
$$

которые должны также быть выполнены и после деформации

$$\mathcal{F}'_{ABC} = \mathcal{F}_{ABC}, \quad \mathcal{F}'_A = \mathcal{F}_A + X_A. \tag{23}$$

где $X_A = \delta_I \mathcal{F}_A$. Это приводит к условию на X^M, а именно он должен удовлетворять $X_M X^M = 0$, а также быть вектором Киллинга для деформированного фона

$$\mathcal{L}_X E'_A{}^M = 0, \quad \mathcal{L}_X d' = 0. \tag{24}$$

1.4. Уравнения обобщенной 10D супергравитации

Чтобы построить модифицированные уравнения, которым будут удовлетворять неунимодулярные деформированные решения Янга–Бакстера, мы следуем процедуре рис. 1.

В результате мы находим уравнения обобщенной супергравитации в NS-NS секторе (ниже у всех полей опущены штрихи)

$$
\begin{aligned}
\delta d:\ & R - \tfrac{1}{12} H^2 + 4 \nabla^m X_m - 4 X_m X^m = 0, && (25) \\
\delta e_a^m:\ & R_{mn} e^{na} - \tfrac{1}{4} H_{nkm} H^{nk}{}_l e^{la} + \nabla_m X_n e^{na} + \\
& + \nabla_m X_n e^{na} + \nabla_n X_m e^{na} = 0, && (26) \\
& R_{mn} - \tfrac{1}{4} H_{mkl} H_n^{kl} + \nabla_m X_n + \nabla_n X_m = 0, && (27) \\
\delta b_{mn}:\ & \tfrac{1}{2} \nabla_k H^{kmn} - H^{kmn} X_k - \nabla^m X^n + \\
& + \nabla^n X^m = 0, && (28)
\end{aligned}
$$

где $X_m = I_m + Z_m$, а I_m и Z_m решают

$$
\begin{gathered}
\nabla_m I_n + \nabla_n I_m = 0, \quad \nabla_m Z_n - \nabla_n Z_m + I^k H_{kmn} = 0\,, \\
I^m Z_m = 0\,.
\end{gathered} \tag{29}
$$

Первое уравнение (29) означает, что I^m вектор Киллинга

$$\mathcal{L}_I B_{mn} = I^k \partial_k B_{mn} + B_{kn} \partial_m I^k - B_{km} \partial_n I^k = 0\,, \tag{30}$$

а второе уравнение (29) может быть решено

$$Z_m = \nabla_m \phi - B_{mn} I^n\,. \tag{31}$$

2. ОБОБЩЕННАЯ 11D СУПЕРГРАВИТАЦИЯ ИЗ ДЕФОРМАЦИЙ

2.1. Вложение 11D супергравитации в исключительную теорию поля

M–теория на фоне $\mathbb{T}^d \times \mathcal{M}_{11-d}$ обладает симметрией $E_{d(d)}$ называемой U–дуальностью. Эта симметрия опускается на уровень 11D супергравитации, что означает, что супергравитация может быть сформулирована явно ковариантно относительно U–дуальности [27], а ее решения вида $\mathbb{T}^d \times \mathcal{M}_{11-d}$ полностью сохраняют эту симметрию.

Теория позволяющая сформулировать 11D супергравитацию в виде явно ковариантном относительно U–дуальности называется исключительной теорией поля (ExFT). Далее мы будем обсуждать лишь бозонный сектор 11D супергравитации и соответственно ExFT, а также ограничимся рассмотрением $d = 4$ для которого $E_{4(4)} = SL(5)$. Бозонный сектор SL(5) ExFT состоит из полей: $g_{\mu\nu}$— внешняя метрика, ${A_\mu}^{[MN]}$ — обобщенная связность, $B_{\mu\nu\, M}$ — обобщенная 2-форма, $m_{MN} \in SL(5)/SO(5)$ — обобщенная метрика, где $\mu, \nu = 0, \ldots, 6$, $M, N = 1, \ldots, 5$. Все поля зависят от $7 + 10$ координат $\{x^\mu, X^{[MN]}\}$ обобщенного пространства с обобщенной производной Ли

$$\mathcal{L}_\Lambda V^M = \frac{1}{2}\Lambda^{KL}\partial_{KL}V^M - V^L\partial_{LK}\Lambda^{MK} + \\ + \frac{1}{4}V^M\partial_{KL}\Lambda^{KL} + \lambda_V\partial_{KL}\Lambda^{KL}V^M, \quad (32)$$

для замкнутости которой требуется выполнение условия проекции для произвольных полей теории f и g

$$\partial_{[MN}f \otimes \partial_{KL]}g = 0, \quad \partial_{[MN}\partial_{KL]}g = 0, \quad (33)$$

после решения которого поля теории зависят только от 11-ти из 17-ти $\{x^\mu, X^{[MN]}\}$ координат. Лагранжиан SL(5) ExFT [28, 29]

$$\mathcal{L} = \hat{\mathcal{R}} - \frac{1}{8}\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{MN}\mathcal{F}^{\mu\nu}{}_{MN} + \frac{1}{48}h^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu m_{MN}\mathcal{D}_\nu m^{MN} \\ + V(m, g) + \frac{1}{3\cdot(16)^2}m^{MN}\mathcal{F}_{\mu\nu\rho M}\mathcal{F}^{\mu\nu\rho}{}_N + \mathcal{L}_{top}, \quad (34)$$

где индексы поднимаются и опускаются при помощи m_{MN} и ее обратной. $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - \mathcal{L}_{A_\mu}$ внешняя ковариантная производная. В С-фрейм параметризации с решением условия проекции в виде $(m, n = 1, \ldots, 4)$

$$\partial_{5m} = \partial_m, \quad \partial_{mn} = 0, \quad (35)$$

действие SL(5) ExFT воспроизводит действие полной 4+7 супергравитации.

Для простоты дальнейшего рассмотрения мы будем использовать следующий анзац для полей теории [30, 31]:

$$\begin{gathered} {A_\mu}^{MN} = 0, \quad B_{\mu\nu\, M} = 0, \\ g_{\mu\nu}(x, X) = e^{-2\phi}h^{\frac{1}{5}}\bar{g}_{\mu\nu}(x), \\ m_{MN} = e^{-\phi}h^{\frac{1}{5}}M_{MN}. \end{gathered} \quad (36)$$

Где $h = \det ||h_{mn}||$ обозначает определитель 4×4 блока полной 11-мерной метрики и поля ϕ, h, M_{MN} зависят только от внутренних координат $X^{[MN]}$. В С-фрейм параметризации отвечающей супергравитации обобщенные реперы для M^{MN} и M_{MN}

$$\begin{gathered} E_M{}^A = e^{\frac{\phi}{2}}\begin{bmatrix} e^{-1/2}e_m{}^a & e^{1/2}V^a \\ 0 & e^{1/2} \end{bmatrix}, \\ E^M{}_A = e^{-\frac{\phi}{2}}\begin{bmatrix} e^{1/2}e^m{}_a & 0 \\ -e^{1/2}V^m & e^{-1/2} \end{bmatrix}, \end{gathered} \quad (37)$$

где $V^m = \frac{e^{-1}}{3!}\epsilon^{mnkl}C_{nkl}$, $e = det[e_m{}^a]$.

В результате действие можно записать через $M_{MN} \in SL(5)/SO(5) \times \mathbb{R}^+$ и в терминах потоков $\mathcal{F}_{AB,C}{}^D$

$$\begin{gathered} \mathcal{L}_{E_{AB}}E^M{}_C = \mathcal{F}_{AB,C}{}^D E^M{}_D, \\ \mathcal{F}_{AB,C}{}^D = \frac{3}{2}E_N{}^D\partial_{[AB}E^N{}_{C]} - E^M{}_C\partial_{MN}E^N{}_{[B}\delta^D{}_{A]} - \\ - \frac{1}{2}E^M{}_{[B|}\partial_{MN}E^N{}_{|A]}\delta^D{}_C, \end{gathered} \quad (38)$$

где $E^{MN}{}_{AB} = 4E^M{}_{[A}E^N{}_{B}$, $\partial_{AB} = E^{MN}{}_{AB}\partial_{MN}$. В результате Лагранжиан принимает вид

$$m\ \mathcal{L}' = \bar{e}\mathcal{R}[\bar{g}_{(7)}] + Y_{AB}Y_{CD}m^{AC}m^{BD} - \frac{1}{2}Y_{AB}Y_{CD}m^{AB}m^{CD} \\ + 32Z^{ABC}Z^{DEF}(m_{AD}m_{BE}m_{CF} + m_{AC}m_{BD}m_{EF}) - \frac{700}{3}\theta_{AB}\theta_{CD}m^{AC}m^{BD}, \quad (39)$$

где потоки $\theta_{AB} \in \mathbf{10}, Y_{AB} \in \mathbf{15}, Z^{ABC} \in \overline{\mathbf{40}}$ определяются из

$$\mathcal{F}_{AB,C}{}^D = 5\theta_{[AB}\delta_{C]}{}^D - 2\epsilon_{ABCEF}Z^{EFD} + \delta_{[A}{}^D Y_{B]C}. \quad (40)$$

Из вариации действия (39) в потоковой формулировке могут быть найдены уравнения движения SL(5) ExFT с использованным анзацем (36) для полей в терминах потоков, в С-фрейм параметризации, эти уравнения совпадают с уравнениями 4+7 супергравитации

$$
\begin{aligned}
\delta\phi: &\quad \frac{5}{7}e^{2\phi}\mathcal{R}[\bar g_{(7)}]+\mathcal{R}[h_{(4)}]+12\,\nabla_m\nabla_n\phi\; h^{mn}-42\,\nabla_m\phi\,\nabla_n\phi\, h^{mn}+\frac{1}{2}\,(\nabla_k V^k)^2=0,\\
\delta V^m: &\quad \partial_m(\nabla_k V^k)-7\,(\nabla_k V^k)\partial_m\phi=0,\\
\delta h^{mn}: &\quad \mathcal{R}_{mn}[h_{(4)}]-7\,\partial_m\phi\,\partial_n\phi\,+7\,\nabla_m\nabla_n\phi+\\
&\quad +h_{mn}\left(-\frac{1}{2}e^{2\phi}\mathcal{R}[\bar g_{(7)}]-\frac{1}{2}\,\mathcal{R}[h_{(4)}]+28\,\partial_k\phi\,\partial_l\phi\, h^{kl}-7\,\nabla_k\nabla_l\phi\, h^{kl}+\frac{1}{4}\,(\nabla_k V^k)^2\right)=0,\\
\delta\bar g^{\mu\nu}: &\quad \mathcal{R}_{\mu\nu}[\bar g_{(7)}]-\frac{1}{7}\bar g_{\mu\nu}\mathcal{R}[\bar g_{(7)}]=0.
\end{aligned}
\tag{41}
$$

2.2. Обобщенные неунимодулярные деформации Янга–Бакстера

По аналогии с би–Киллинговыми деформациями решений 10D супергравитации можно построить поли-Киллинговые деформации для решений 11D супергравитации [31, 32]. В терминах SL(5) ExFT это $SL(5)$ вращение

$$\bar E_M{}^A = O_M{}^N E_N{}^A = (\delta_M{}^N+\Omega_M{}^N)E_N{}^A, \tag{42}$$

с последующей репараметризацией

$$
\begin{aligned}
&E'_M{}^A E'_N{}^B m_{AB} = \bar E_M{}^A \bar E_N{}^B m_{AB},\\
&E'_M{}^A = e^{\frac{\phi'}{2}}\begin{bmatrix} e'^{-1/2}e'_m{}^a & e'^{1/2}V'^a\\ 0 & e'^{1/2}\end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{43}
$$

Матрица поворота

$$O_M{}^N = \begin{bmatrix} \delta_m{}^n & 0\\ \frac{1}{3!}\epsilon_{mpqr}\Omega^{pqr} & 1\end{bmatrix}, \tag{44}$$

где для тривектора предполагается три–Киллинговый анзац $\Omega^{m_1m_2m_3}=\frac{1}{3!}\rho^{i_1i_2i_3}k_{i_1}{}^{m_1}k_{i_2}{}^{m_2}k_{i_3}{}^{m_3}$, $\rho^{i_1i_2i_3}$ — постоянный антисимметричный тензор.

Для того чтобы после такого поворота $e'_m{}^a$, V'^{km}, ϕ' было решением супергравитации должны выполняться обобщенное уравнение Янга–Бакстера (gCYBE) и условие унимодулярности [32]

$$
\begin{cases}
6\rho^{[i2|i7j1}\rho^{|i3i4|j2}f_{j1j2}{}^{|i5]}+\rho^{j1j2[i2}\rho^{i3i4i5]}f_{j1j2}{}^{i7}=0, & \text{(gCYBE)},\\
f_{i_1i_2}{}^{j_1}r^{i_1i_2j_2}=0, & \text{(унимодулярность)},
\end{cases}
\tag{45}
$$

где $k_{i_1}{}^m\partial_m k_{i_2}{}^n-k_{i_2}{}^m\partial_m k_{i_1}{}^n=f_{i_1i_2}{}^{i_3}k_{i_3}{}^n$. Такое вращение называется обобщенной унимодулярной деформацией Янга–Бакстера. Однако мы ожидаем, что аналогично 10–мерному случаю, обобщенные неунимодулярные деформации Янга–Бакстера порождают решения обобщенной 11D супергравитации с бивектором $J^{mn}=k_{i_1}{}^m k_{i_4}{}^n\rho^{i_1i_2i_3}f_{i_2i_3}{}^{i_4}\neq 0$. С точки зрения развитого выше потокового подхода ExFT это подтверждается тем, что при такой деформации потоки преобразуются как

$$
\begin{aligned}
\delta_\rho\mathcal{F}_{AB,C}{}^D = E^m{}_C E^n{}_A E^k{}_B E_l{}^D J^{lp}\epsilon_{kmnp}+\\
+(gCYBE),\quad \delta_\rho\mathcal{R}[\bar g_{(7)}]=0.
\end{aligned}
\tag{46}
$$

Таким образом уравнения 11D супергравитации будут по-прежнему удовлетворяться после обобщенной унимодулярной деформации Янга–Бакстера, поскольку потоки ExFT не изменяются. Но для решений деформированных обобщенными неунимодулярными деформирмациями Янга–Бакстера выполняющиеся уравнения должны быть модифицированы и отличаются от супергравитационных.

2.3. Условия на J^{mn} из тождеств Бьянки

Потоки SL(5) ExFT (38) удовлетворяют тождествам Бьянки

$$
\begin{aligned}
0=&\frac{3}{2}\partial_{[AB}\mathcal{F}_{|DF,|C]}{}^E-\frac{1}{2}\partial_{DF}\mathcal{F}_{AB,C}{}^E+\\
&+\partial_{CG}\mathcal{F}_{DF,[A}{}^G\delta_{B]}{}^E-\frac{1}{4}\delta_C{}^E\partial_{BG}\mathcal{F}_{DF,A}{}^G+\\
&+\frac{1}{4}\delta_C{}^E\partial_{AG}\mathcal{F}_{DF,B}{}^G-\mathcal{F}_{BG,C}{}^E\mathcal{F}_{DF,A}{}^G+\\
&+\mathcal{F}_{AG,C}{}^E\mathcal{F}_{DF,B}{}^G+\mathcal{F}_{AB,G}{}^E\mathcal{F}_{DF,C}{}^G-\\
&-\mathcal{F}_{AB,C}{}^G\mathcal{F}_{DF,G}{}^E,
\end{aligned}
\tag{47}
$$

которые должны выполняться и после деформации (46), что накладывает условия на J^{mn}

$$
\begin{aligned}
L_{e_a}J^{kl}+J^{nl}\partial_n\phi\, e_a{}^k=0,&\qquad J^{mn}\partial_n\phi=0,\\
\nabla_m\big(e^{-\phi}I^{mn}\big)=0,&\qquad J^{m[n}J^{kl]}=0,
\end{aligned}
\tag{48}
$$

где $I^{mn}=J^{[mn]}$. Эти уравнения являются естественным обобщением уравнений для I^m в 10–мерном случае. Первое уравнение может быть записано как $\nabla_{(m}J_{nk)}=0$, что говорит о том, что $S^{mn}=J^{(mn)}$ тензор Киллинга для деформированного фона.

Также дополнительно получаются условия линейные по $V^m=\frac{1}{3!}\varepsilon^{mnkl}C_{nkl}$:

$$
\begin{aligned}
\nabla_{[m}Z_{n]}-\frac{1}{3}J^{kl}F_{mnkl}=0,\\
\nabla_k\Big(e^{-\phi}J^{k[l}V^{p]}\Big)=0,\\
\nabla_k(J^{(pl)}V^k)-\nabla_k(V^{(p}J^{l)k})=0.
\end{aligned}
\tag{49}
$$

где

$$Z_m=\partial_m\phi-\frac{2}{3}\varepsilon_{mnkl}I^{nk}V^l. \tag{50}$$

$$
\begin{tikzcd}
E_M{}^A \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, dashed] & E'_M{}^A = (O_M{}^N E_N{}^A)|_{C-\text{фрейм}} \arrow[d, leftrightarrow, dashed] \\
\mathcal{F}_{AB,C}{}^D \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}'_{AB,C}{}^D = \mathcal{F}_{AB,C}{}^D + \delta_J \mathcal{F}_{AB,C}{}^D \arrow[d] \\
\text{EoMs}(\mathcal{F}_{AB,C}{}^D)\text{=0} \arrow[d, dash] & \text{EoMs}(\mathcal{F}'_{AB,C}{}^D - \delta_J \mathcal{F}_{AB,C}{}^D)\text{=0} \arrow[d, dash] \\
\text{EoMs}_{SUGRA}(h, C, \phi) = 0 & \text{EoMs}_J(h', C', \phi') = 0
\end{tikzcd}
$$

Рис. 2. Обобщенная 11D супергравитация из потоковых сдвигов

2.4. Уравнения обобщенной 11D супергравитации

Аналогично 10–мерному случаю, мы строим модифицированные уравнения, которым будут удовлетворять фоны получающиеся из решений 11D супергравитации при обобщенных неунимодулярных деформациях Янга–Бакстера, следуя процедуре рис. 2.

В результате мы находим обобщенные уравнения 11D супергравитации (ниже у всех полей опущены штрихи)

$$
\begin{aligned}
0 &= \mathcal{R}_{mn}[h_{(4)}] - 7\,\tilde{\nabla}_{(m}Z_{n)} - \frac{1}{3}h_{mn}(\nabla V) + 8(1+V^2)\Big(S_{mn}J^k{}_k - 2J^k{}_{(m}J_{n)k}\Big) + \\
&\quad + 4V_mV_n\Big(J^{kl}J_{kl} - 2J^{kl}J_{lk}\Big) + 4V_kV_l\Big(4J_{(m}{}^kJ_{n)}{}^l - J^k{}_{(m}J^l{}_{n)} - 2S^{kl}S_{mn}\Big) + \\
&\quad + 8V_kV_{(m}\Big(2J^l{}_{n)}J^k{}_l - 2S_{n)}{}^kJ^l{}_l + J^{kl}J_{n)l}\Big), \\
0 &= \frac{1}{7}e^{2\phi}\,\mathcal{R}[\bar{g}_{(7)}] + \frac{1}{6}\,(\nabla V)^2 + \tilde{\nabla}^m Z_m - 6Z_mZ^m - 2J^{mn}J_{mn} + \frac{4}{3}J_{mn}J^{nm}, \\
0 &= \tilde{\nabla}^m F_{mnkl} - 6Z^m F_{mnkl} + 6\Big(2J^{pm}C_{m[nk}J_{l]p} - J^{pm}J_{p[n}C_{kl]m}\Big), \\
0 &= \mathcal{R}_{\mu\nu}[\bar{g}_{(7)}] - \frac{1}{7}\bar{g}_{\mu\nu}\mathcal{R}[\bar{g}_{(7)}],
\end{aligned}
\tag{51}
$$

где $F_{mnkl} = 4\partial_{[m}C_{nkl]}$, $\nabla V = \nabla_m V^m$ и

$$
\tilde{\nabla}_m = \nabla_m - \partial_m\phi\,. \tag{52}
$$

Z_m и F_{mnkl} должны удовлетворять

$$
\nabla_{[m}Z_{n]} - \frac{1}{3}I^{kl}F_{mnkl} = 0. \tag{53}
$$

При $J^{mn} = 0$ эти уравнения воспроизводят уравнения 11D супергравитации [31].

Наконец отметим, что при редукции, то есть когда есть вектор Киллинга $k_*{}^m$, коммутирующий со всеми остальными векторами Киллинга $f_{*\alpha}{}^{i_4} = 0$, в адаптированной системе координат, для которой $k_*{}^m = \delta_*{}^m$ и $k_\gamma{}^* = 0$ $(m = (*, \bar{m})$, мы получаем

$$
\begin{aligned}
J^{mn} = \rho^{i_1i_2i_3} f_{i_2i_3}{}^{i_4} k_{i_1}{}^m k_{i_4}{}^n \underset{i=(*,\alpha),\, m=(*,\bar{m})}{\longrightarrow} I^{\bar{m}} \equiv \\
\equiv J^{*\bar{m}} = \rho^{*\alpha\beta} f_{\alpha\beta}{}^\gamma k_\gamma{}^{\bar{m}},
\end{aligned}
\tag{54}
$$

что означает, что при редукции би-вектор J^{mn} обобщения 11D супергравитации порождает вектор I^m обобщенной 10D супергравитации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе был предложен новый способ построения уравнений обобщенной 10D супергравитации при помощи неунимодулярных деформаций Янга–Бакстера. Такой способ технически проще, чем вывод уравнений из решения условий каппа–симметричности струны. Более того, этот подход был обобщен на 11-мерный случай. При помощи обобщенных неунимодулярных деформаций Янга–Бакстера были получены обобщенные уравнения 11D супергравитации. Согласно общей интуиции обобщения 11D супергравитации быть не должно, так как появление обобщенной 10D супергравитации было связано с нарушением Вейлевской симметрии RNS струны на таком фоне до масштабной, чего нельзя добиться для мембран. Однако мы предполагаем, что предложенное нами обобщение возможно, так как оно появляется в результате явного нарушения GL(11) симметрии диффеоморфизмов до GL(7)×GL(4). Каппа-инвариантность мембраны на фоне, решающем полученные уравнения, остается открытым вопросом для дальнейшего исследования.

Благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Э. Т. Мусаеву за регулярные обсуждения и всестороннюю помощь в научной работе, а также И. В. Бахматову, Л. Н. Астраханцеву, A. Catal-Ozer и N. S. Deger.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант RSCF-20-72-10144).

[1] *Witten E.* // Nucl. Phys. B. 1995. **443**. P. 85.
[2] *Townsend P. K.* // CTP Summer School in High-energy Physics and Cosmology. 1996. **33**. P. 385.
[3] *Duff M. J.* // Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics (TASI 96): Fields, Strings, and Duality, 1996.
[4] *Howe P. S., Tucker R. W.* // Journal of Physics A: Mathematical and General. 1977. **10**, №.9. P. L155.
[5] *Bergshoeff E., Sezgin E., Townsend P. K.* // Phys. Lett. B. 1987. **189**. P. 75.
[6] *Bergshoeff E., Sezgin E., Townsend P. K.* // Annals. Phys. 1988. **185**. P. 330.
[7] *Bandos I. A., Sorokin D. P., Tonin M., Pasti P., Volkov D. V.* // Nucl. Phys. B. 1995. **446**. P. 79.
[8] *Sorokin D. P.* // Phys. Rept. 2000. **329**. P. 1.
[9] *Ramond P.* // Phys. Rev. D. 1971 **3**. P. 2415.
[10] *Neveu A., Schwarz J.* // Nucl. Phys. B. 1971. **31**. P. 86.
[11] *Callan C. G., Thorlaciu L.* // Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: Particles, Strings and Supernovae (TASI 88). 1989. **3**.
[12] *Callan C. G., Lovelace C, Nappi C. R., Yost S. A.* // Nucl. Phys. B. 1987. **288**. P. 25.
[13] *Callan C. G., Martinec E., Perry M., Friedan D.* // Nucl. Phys. B. 1985. **262**. P. 593.
[14] *Green M. B., Schwarz J. H.* // Nucl. Phys. B. 1984. **136**. P. 367.
[15] *Green M. B., Schwarz J. H.* // Nucl. Phys. B. 1984. **243**. P. 285.
[16] *Arutyunov G., Borsato R., Frolov S.* // JHEP. 2015. **12**. P. 049.
[17] *Arutyunov G., Frolov S., Hoare B., Roiban R., Tseytlin A. A.* // Nucl. Phys. B. 2016. **903**. P. 262.
[18] *Wulff L., Tseytlin A. A.* // JHEP. 2016. **06**. P. 174.
[19] *Fernandez-Melgarejo J. J., Sakamoto J.-I., Sakatani Y., Yoshida K.* // Phys. Rev. Lett. 2019. **122**. P. 111602.
[20] *Hughes J., Liu J., Polchinski J.* // Phys. Lett. B. 1986. **180**. P. 370.
[21] *Bena I., Polchinski J., Roiban R.* // Phys. Rev. D. 2004. **69**. P. 046002.
[22] *Delduc F., Magro M., Vicedo B.* // JHEP. 2013. **11**. P. 192.
[23] *Geissbuhler D., Marques D., Nunez C., Penas V.* // JHEP. 2013. **06**. P. 101.
[24] *Bakhmatov I., Kelekci O., Colgain E. O., Sheikh-Jabbari M. M.* // Phys. Rev. D. 2018. **98**. P. 021901.
[25] *Bakhmatov I., Colgain E. O., Sheikh-Jabbari M. M., Yavartanoo H.* // JHEP. 2018. **06**. P. 161.
[26] *Bakhmatov I., Musaev E. T.* // JHEP. 2019. **01**. P. 140.
[27] *Samtleben H., Weidne M.* // Nucl. Phys. B. 2005. **725**. P. 383.
[28] *Hohm O., Samtleben H.* // Phys. Rev. Lett. 2013. **111**. P. 231601.
[29] *Musaev E. T.* // JHEP. 2016. **02**. P. 012.
[30] *Blair C. D. A. Malek, E.* // JHEP. 2015. **03**. P. 144.
[31] *Bakhmatov I., Gubarev K., Musaev E. T.* // JHEP. 2020. **05**. P. 113.
[32] *Gubarev K., Musaev E. T.* // Phys. Rev. D. 2021. **103**. P. 066021.

Generalized supergravuty from polyvector deformations

K. A. Gubarev

Moscow Institute of Physics and Technology. Moscow region, Dolgoprudny, 141701, Russia
E-mail: kirill.gubarev@phystech.edu

We propose a method for constructing equations of generalized 10D supergravity using non-unimodular bi–Killing Yang–Baxter deformations. The presented approach is generalized to the 11-dimensional case. Using non-unimodular three–Killing generalized Yang–Baxter deformations, a generalization of the equations of 11D supergravity is obtained.

PACS: 11.25.$-w$, 04.65.$+e$.
Keywords: supergravity, kappa–symmetry, string theory, M–theory, exceptional field theory, double field theory.
Received 19 May 2022.

Сведения об авторе

Губарев Кирилл Алексеевич — аспирант МФТИ; e-mail: kirill.gubarev@phystech.edu.